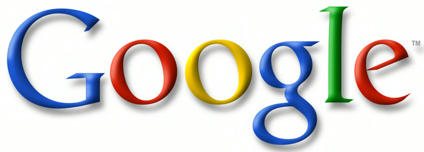

Google


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909964 0





HANDBUCH

DER

OPTIK,

MIT BESONDERER RÜCKSICHT

AUF DIE

NEUESTEN FORTSCHRITTE DER WISSENSCHAFT

BEARBEITET

VON

F. W. G. RADICKE.

ZWEITER BAND.

MIT SECHS LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

BERLIN, 1839.

IN DER NICOLAISCHEN BUCHHANDLUNG.

Vorrede.

In dem 8ten und 9ten Abschnitt glaubte der Verf., da dieselben eigentlich nur Anwendungen der in dem Vorangegangenen entwickelten Lehren behandeln, um das Werk nicht noch weiter auszudehnen, sich kürzer fassen zu dürfen. Im 8ten Abschnitt wurden nämlich die verwickelteren analytischen Untersuchungen übergangen, und nur die Hauptresultate derselben mitgetheilt; und im 9ten Abschnitt wurden zwar wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes die analytischen Entwickelungen mitgetheilt, jedoch nur in ihren Grundzügen.

In dem 5ten Abschnitt ist ferner Einiges, namentlich das auf die kaustischen Curven und Flächen sich Beziehende nicht in seinem ganzen Umfange ausgeführt worden, weil es einerseits bedeutenden Raumaufwand erfordert hätte, andrerseits für die Praxis sowohl wie für die Constatirung der Grundlagen der Theorie von geringerem Interesse ist.

Endlich ist, was die neueren Produktionen anlangt, Hamilton's *Essay on the Theory of*

Systems of Rays (enthalten in den *Transactions of the Royal Irish Academy*) nicht berücksichtigt worden, weil die Resultate desselben im Wesentlichen mit den im Handbuch entwickelten übereinstimmen, und das Neue in demselben hauptsächlich nur die Entwickelungsmethode ist — eine Methode freilich, die wegen ihrer Allgemeinheit von besonderem Werthe ist, und welche ihren Urheber auf die Entdeckung der konischen Refraction geführt hat.

Da es wünschenswerth sein dürfte, wegen der gröfseren Ausdehnung der mathematischen Untersuchungen in den ersten 3 Abschnitten die in denselben enthaltenen Formeln auch aufser ihrem Zusammenhange verständlicher zu sehen, so ist am Schlusse ein Verzeichnifs derjenigen Bezeichnungen beigegeben worden, welche gröfsere Strecken hindurch beibehalten wurden. Eine Ausnahme bilden hierbei natürlich diejenigen Stellen, an denen ausdrücklich den Buchstaben eine eigene Bedeutung untergelegt worden ist.

Berlin im Februar 1839.

Der Verfasser.

Inhalt des zweiten Bandes.

Vierter Abschnitt.

Die Interferenz-Erscheinungen, welche durch Ungleichheit der Wege des Lichtes erzeugt werden.

Seite

Fünfter Abschnitt.

Erscheinungen, welche auf der Aenderung der Strahlenrichtung durch Reflexion und Refraction beruhen.

Sechster Abschnitt.

Von der Absorption.

HANDBUCH

DER

OPTIK,

MIT BESONDERER RÜCKSICHT

AUF DIE

NEUESTEN FORTSCHRITTE DER WISSENSCHAFT

BEARBEITET

VON

F. W. G. RADICKE.

ZWEITER BAND.

MIT SECHS LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

BERLIN, 1839.

IN DER NICOLAISCHEN BUCHHANDLUNG.

also schwächer als für beide vorige Lagen des Schirms. Dieser schwache Lichtpunkt liegt in Bezug auf die neue Lage des Schirms noch tiefer im geometrischen Schatten, als der eben erwähnte helle Punkt, nämlich um den Winkel p_2ep von dessen Grenze entfernt. Verschiebt man den Schirm bis f, so steigt wiederum die Intensität etc., so dafs man, wenn man das gebeugte Licht mit einem Schirm auffängt, innerhalb des geometrischen Schattens nach dem Innern zu einen periodischen Wechsel von hellen und dunkleren Punkten wahrnimmt, welcher aber sehr bald, wegen der schnellen Abnahme der obigen Reihe, unmerklich wird und in vollkommenes Dunkel übergeht.

Ein ähnlicher Intensitätswechsel findet aufserhalb des Schattens statt. Wird nämlich der Theil da der Welle durch den Schirm aufgehalten, so ist $I+i$ die (vom Bogen bd herrührende) Intensität des Punktes p, und da

$$I = i-(i'-i_1)-(i_1'-i_2)-(i_2'-i_3)- \text{ etc.}$$

und $i'-i_1$, $i_1'-i_2$, $i_2'-i_3$ sämmtlich positiv sind, so ist $i>I$, also die Intensität von p, welcher Punkt um den Winkel p_1dp vom geometrischen Schatten absteht, gröfser als $2I$, also noch gröfser, als wenn gar kein Schirm vorhanden wäre. Ginge der Schirm nur bis e, so würde die Lichtstärke von p, $I+(i-i')$ sein, also ein Minimum erreichen; ginge aber der Schirm nur bis f, so würde sie $I+i-i'+i_1$ sein, also ein Maximum und wiederum gröfser als $2I$ etc.

Je weiter man den Schirm zurückrückt, oder, was dasselbe ist, je weiter man sich bei feststehendem Schirm von der Grenze des Schattens entfernt, desto mehr nähern sich die Maxima und Minima dem Werthe $2I$ (der Lichtstärke des direkten Lichtes), so dafs bald der Lichtwechsel unmerklich, und die Helligkeit gleichmäfsig wird. Was die Oerter der Maxima und Minima betrifft, so geht aus diesen Betrachtungen hervor, dafs die Maxima denjenigen Punkten entsprechen, für welche der Gangunterschied des direkten Strahls (welcher die Richtung pS hat) und des vom Rande des Schirms kommenden eine ungerade Anzahl hal-

ber Wellenlängen beträgt; die Minima dagegen denjenigen Punkten, für welche derselbe eine gerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt.

In dem Bisherigen ist zwar nur die Wirkung des ebenen Durchschnitts *ab* der Wellenfläche berücksichtigt, allein es läfst sich leicht auf die Totalwirkung der letzteren schliefsen. Ist die Grenze des Schirms geradlinig, so denke man sich dieselbe senkrecht auf den Durchschnitt *ab*, und die Wirkung der auf *ab* senkrechten Durchschnitte der Wellenfläche in den Punkten von *ab*, durch welche diese letzteren hindurchgehen, vereinigt. Die Modification der Intensität des gebeugten Lichtes hat alsdann nur auf die relative Gröfse der Maxima und Minima, nicht auf ihre relative Lage Einflufs.

Was die Vertikaldimension betrifft, wenn der Rand des Schirms vertikal gedacht wird, so ist, wie sich von selbst versteht, jeder der Punkte der gröfsten und geringsten Helligkeit der Durchschnitt einer Linie der gröfsten und geringsten Helligkeit.

Die von Fresnel nach der von ihm construirten Formel berechneten Werthe der aufserhalb des geometrischen Schattens befindlichen Maxima und Minima sind, die Intensität des direkten Lichtes gleich 2 gesetzt,

1stes	Maximum	2,7413	1stes	Minimum	1,5570
2tes	«	2,3990	2tes	«	1,6867
3tes	«	2,3022	3tes	«	1,7440
4tes	«	2,2523	4tes	«	1,7785
5tes	«	2,2206	5tes	«	1,8014
6tes	«	2,1985	6tes	«	1,8185
7tes	«	2,1818	7tes	«	1,8317

Die Linien der gröfsten und geringsten Helligkeit ändern ihre Entfernung unter sich und ihre Entfernung vom geometrischen Schatten, wenn man die Entfernung des Schirms, welcher das gebeugte Licht auffängt, von dem schattengebenden Körper ändert.

Ist in der vorigen Figur *dh* der beugende Schirm, p_1p die *auffangende Tafel*, welche auf Sp_1 senkrecht sein

mag, und cr ein aus p mit dem Radius pc beschriebener Kreisbogen, so ist der Gangunterschied der Strahlen cp und dp, welcher die Intensität des Punktes p bedingt, gleich dr. Sind hd und pp_1 einander nicht zu nahe, so kann man $rc = dc$ nehmen und dr als die Summe der Sinus versus der Bögen rc und dc betrachten. Man hat daher, wenn pc durch y und Sc durch v bezeichnet wird,

$$dr = \frac{(rc)^2}{2y} + \frac{(dc)^2}{2v} = (dc)^2\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{2v}\right),$$

oder insofern $dc = \frac{pp_1\, Sc}{Sp} = \frac{pp_1 . v}{v+y}$ ist,

$$dr = \frac{pp_1{}^2 . v}{2y(v+y)},$$

und wenn man $pp_1 = x$ setzt,

$$2)\quad vx^2 = 2y(v+y)\,dr.$$

Giebt man der Gröfse dr einen bestimmten Werth, so findet sich aus dieser Gleichung die Lage derjenigen Punkte, welche demselben Gangunterschiede entsprechen. Nimmt man x und y zu Coordinaten, so gehört die Gleichung einer Hyperbel an. Entfernt man daher die Tafel pp_1 vom Lichtpunkt, so beschreiben die entsprechenden Punkte des Beugungsbildes eine hyperbolische Bahn.

Man sieht ferner, dafs bei unverändertem y und dr, x wächst, wenn v abnimmt, d. h. dafs die Entfernung der Maxima zunimmt, wenn man bei unveränderter Lage der Schirme dh und pp_1 den Lichtpunkt S nähert.

Beträgt der Gangunterschied m Wellenlängen, ist also $dr = m.l$, so sieht man aus (2), dafs, wenn l ungeändert bleibt, also für eine und dieselbe Lichtfarbe, die Quadrate von x der Zahl m proportional sind. Da nun die Lichtmaxima einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen entsprechen, so verhalten sich die Entfernungen der Maxima wie die Quadratwurzeln aus den ungeraden Zahlen; die Entfernungen der Minima dagegen, die hier einer geraden Zahl Wellenlängen entsprechen, wie die Quadratwurzeln aus den geraden Zahlen.

Die hellen Streifen, welche den Schatten umsäumen,

nnt man Fransen oder Spektra, und zwar innere der äuſsere, je nachdem sie innerhalb oder auſserhalb des eometrischen Schattens liegen.

Soll *dr* einer bestimmten Zahl Wellenlängen gleich sein, o muſs *p* um so entfernter von p_1 liegen, je gröſser die Wellenlänge ist; folglich werden die Fransen um so enger, je brechbarer die Farbe ist. Da x^2 proportional *dr* ist, so verhalten sich die Fransenbreiten wie die Quadratwurzeln aus den Wellenlängen. Wendet man daher weiſses Licht an, so fallen die blauen Maxima innerhalb der rothen, so daſs die Fransen nach innen blau und nach auſsen roth gefärbt erscheinen. Die Farbenfolge wird in der ersten Franse: violett, indigo, blaſsblau, grün, gelb, roth; in der zweiten Franse: blau, gelb, roth; in der dritten: blaſsblau, blaſsgelb, blaſsroth; etc.

Um die Erscheinung wahrzunehmen, leitet man direktes Sonnenlicht durch eine kleine runde oder strichförmige Oeffnung von etwa $\frac{1}{40}$ Durchmesser in ein dunkles Zimmer, stellt dem eindringenden divergirenden Lichtbüschel in einiger Entfernung den beugenden Körper entgegen. Hinter diesem läſst sich in jeder beliebigen Entfernung der Schatten mit den Farbensäumen durch eine weiſse Tafel auffangen. Da aber das Licht durch die Reflexion an dieser Tafel geschwächt wird, so wird die Erscheinung ungleich schöner und deutlicher, wenn man das gebeugte Licht mit dem Auge direkt auffängt, nachdem man dasselbe mit einer Loupe oder einem Fernrohr bewaffnet hat. Eine bei weitem gröſsere Lichtstärke erlangt man, wenn man das Licht, statt es durch eine kleine Oeffnung zu leiten, durch eine in dem Fensterladen angebrachte Linse auf einen möglichst kleinen Raum (in dem Brennpunkt der Linse) concentrirt, und den von diesem kleinen aber lichtstarken Raum ausgehenden Lichtkegel benutzt.

Beugung durch schmale Körper.

Unterbricht man das von einem Lichtpunkt aus sich verbreitende Licht durch einen sehr schmalen Körper, wie z. B. durch einen feinen Metalldraht oder durch ein Haar, so bilden sich nicht allein zu beiden Seiten des geometrischen Schattens die oben erwähnten äufseren Fransen, sondern noch weit hellere im inneren Raum des Schattens, welche durch die Interferenz derjenigen Strahlen entstehen, die von den beiden Seiten des Drahtes oder Haares gebeugt werden, denn sie verschwinden, sobald man den Zutritt des Lichtes zu dem zweiten Rande hindert, oder den Zutritt des vom zweiten Rande gebeugten Lichtes zum Auge durch einen Schirm abhält.

Um sich das Entstehen dieser Fransen klar zu machen, denke man in Fig. 1. *ec* als den von dem Draht bedeckten Theil der Wellenfläche, p_1 als den Punkt des Beugungsbildes, dessen Intensität man bestimmen will. Der von dem Bogen *ea*, so wie der vom Bogen *cb* herrührende Theil der Intensität des Punktes p_1 läfst sich wiederum, wenn man diese Bögen so getheilt denkt, dafs die Differenz der von p_1 nach je zwei auf einander folgenden Theilpunkten gezogenen Linien eine halbe Wellenlänge beträgt, durch eine Reihe wie die (1) darstellen.

Da nun wegen des Uebergewichtes des Gliedes $i-i'$, das von der einen Seite (*ea*) herkommende Licht dasjenige Licht des Bogens *ef* ist, welches vom zweiten Bogen *fg* nicht aufgehoben ist, so kann man das wirksame gebeugte Licht als gleichwirkend denken mit dem Licht, welches von einem nahe an *e* liegenden Punkt *u* kommt. Ebenso ist das von der andern Seite *cb* ausgesendete Licht gleichgeltend mit einem Lichtbündel von gleicher Intensität, der in einem nahe an *c* liegenden Punkt *w* seinen Ausgangspunkt hat. Ein Punkt p_1 ist daher vollkommen dunkel oder im Maximum der Helligkeit, je nachdem der Gangunterschied beider $wp_1 - up_1$ eine ungerade oder eine gerade Anzahl alber Wellenlängen beträgt. Der Mitte des geometrischen

Schattens entspricht stets ein Maximum der Helligkeit, da für sie $wp_1 - up_1 = 0$ ist, und zwar für alle Farben. Im weifsen Licht ist daher die Mitte eine glänzend weifse Lichtlinie, an welche sich Farbenstreifen reihen, welche ihre blaue Seite nach Innen kehren. Ist der auffangende Schirm (d. h. die Punkte p_1) weit genug vom Draht entfernt, so kann man die Punkte u und w als mit e und c zusammenfallend betrachten, so dafs die Intensität vom Gangunterschied der Randstrahlen abhängt.

Beugung durch eine schmale geradlinige Oeffnung.

Unterbricht man das direkte Licht durch einen Schirm, welcher eine schmale hohe, aber geradlinige Oeffnung hat, so liefert das durch diese Oeffnung gebeugte Licht ähnliche Fransen, wie ein Draht. Die Maxima des gebeugten Lichtes befinden sich jedoch da, wo der Gangunterschied der von den Rändern kommenden gebeugten Strahlen eine ungerade Anzahl Wellenlängen beträgt, die Minima da, wo derselbe eine gerade Anzahl Wellenlängen beträgt. Ist nämlich Fig. I. *ec* der Durchschnitt der Oeffnung, so läfst sich der Bogen *ec* so getheilt denken, dafs die Entfernungen je zwei auf einander folgender Theilpunkte von dem Punkt p_1, dessen Intensität untersucht werden soll, um eine halbe Wellenlänge verschieden sind. Enthält nun der Durchschnitt *ec* eine ganze Zahl solcher Theile, und ist dieselbe eine gerade, also der Gangunterschied der Randstrahlen eine gerade Anzahl halber Wellenlängen, so heben sich die Wirkungen der auf einander folgenden Bogentheile auf p_1 paarweise auf, und p_1 ist dunkel; ist dagegen die Zahl der Bogentheile ungerade, also der Gangunterschied der Randstrahlen eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen, so heben sich die Wirkungen je zwei auf einander folgender Bogentheile auf, und nur der letzte Bogentheil bleibt wirksam und erzeugt ein Maximum.

Ist der Lichtpunkt dem Schirm nicht sehr nahe, so dafs man die auf die Oeffnung fallenden Strahlen Se und

Sc als parallel ansehen kann, so findet man als analytischen Ausdruck für die Intensität, wenn man α den Einfallswinkel (d. h. den Winkel, welchen die einfallenden Strahlen mit der Normale des Schirms bilden) nennt, und α' den Beugungswinkel (d. h. den Winkel, welchen die gleichfalls parallelen gebeugten Strahlen mit der Normale des Schirms bilden), ferner c die Breite der Oeffnung, $\varkappa$ den Quotienten $\frac{2\pi}{l}$ (unter l die Wellenlänge verstanden), A^2 die auf die Spaltöffnung fallende Gesammtmasse des Lichtes, und I^2 die Intensität des betreffenden Punktes hinter dem Schirm,

$$I^2 = A^2 \frac{\sin\left[\frac{1}{2}\varkappa c(\sin\alpha - \sin\alpha')\right]}{\frac{1}{2}\varkappa c(\sin\alpha - \sin\alpha')}.$$

Es mufs daher da Dunkelheit sein, wo $\sin\alpha - \sin\alpha'$ ein Vielfaches von $\pm\frac{l}{c}$ ist.

Die dunklen Stellen lassen sich hiernach geometrisch construiren.

Man denke sich nämlich Fig. 2. AB als den senkrecht gegen die Ränder der Oeffnung geführten Durchschnitt des Schirms, ON als dessen Normale, SOp als einfallenden Strahl, also $pON = \alpha$, beschreibe aus O mit dem Radius 1 einen Kreis und fälle pP senkrecht auf AB, trage zu beiden Seiten von P auf AB Theile auf, welche gleich $\frac{l}{c}$ sind, errichte in den Theilpunkten, 1, 2, 1', 2', 3' etc. die Perpendikel $1p_1$, $2p_2$, $1'p_1'$, $2p_2'$ etc. und verbinde die Punkte p_1, p_2, p_1', p_2' etc. mit O. Alsdann ist $OP = \sin\alpha$, und wenn man O als den Punkt betrachtet, auf welchen die Axe des Auges gerichtet ist, und das Auge selbst in p_1 oder p_2 oder p_1' etc. sich befindet, so sind Nop_1, Nop_2, Nop_1' etc. die zugehörigen Werthe von α', also $O1$, $O2$, $O1'$ etc. die zugehörigen Werthe von $\sin\alpha'$, und $P1 = \frac{l}{c}$, $P2 = \frac{2l}{c}$, $P1' = -\frac{l}{c}$, $P2' = -\frac{2l}{c}$ etc. die betreffenden

Werthe von $\sin\alpha' - \sin\alpha$; mithin Op_1, Op_2, Op_1', Op_2' Richtungen, in welchen Dunkelheit herrscht. Ein in p_1, p_2, p_1', p_2' etc. befindliches Auge sieht demnach in O eine den Rändern der Oeffnung parallele dunkle Linie. Statt das Auge in den genannten Punkten zu denken, kann man dasselbe als in O befindlich betrachten. Die dunklen Linien sind alsdann bei unveränderter Lage desselben in der Verlängerung der Linien Op_1, Op_2 etc. sichtbar. Man sieht sonach die Erscheinung gleichsam auf einer Hohlkugel ANB, in deren Centrum O das Auge ist, und zwar so, daſs sich die dunklen Linien in p_1, p_2, p_1', p_2' etc. befinden. Die Projektionen der dunklen Oerter auf dem Schirm, nämlich 1, 2, 1′, 2′ etc. sind gleichweit von einander entfernt. In der Richtung SOp selbst, wo $\alpha = \alpha'$ ist, ist die Intensität, wie auch aus dem obigen Ausdruck folgt, A^2, also gleich der Intensität des direkten Lichtes. Zu beiden Seiten dieser hellen Mittellinie sind die Spektra, wie man sieht, nur dann symmetrisch vertheilt, wenn Op mit ON zusammenfällt, d. h. wenn das Licht senkrecht auf den Schirm fällt. Das mittlere Spektrum hat die Breite p_1p_1', und zu beiden Seiten reihen sich die übrigen Spektra an, welche um so breiter sind, je mehr sie sich dem Schirm nähern, wie p_1p_2 und $p_6'p_7'$. Ist z. B. die Breite der Oeffnung 8 Wellenlängen und $\sin\alpha = \frac{5l}{c} = \frac{5}{8}$, so sind auf der einen Seite nur 2, auf der andern nur 12 Seitenspektra möglich. Für $\sin\alpha = \frac{6}{8}$, giebt es auf der einen Seite nur 1 Seitenspektrum, auf der andern Seite 13; für $\sin\alpha = \frac{7}{8}$ endlich reicht das mittlere Spektrum bis an den Rand des Schirms.

Mit der Breite der Oeffnung vermehrt sich demnach auch die Zahl der Spektra, dagegen nimmt die Breite derselben ab. Je gröſser die Wellenlänge ist, desto geringer wird die Zahl der Spektra und desto gröſser deren Breite. Ist $c < l$, so ist gar kein dunkler Ort möglich, und das mittlere Spektrum erhält eine unbegrenzte Breite.

Die Intensität in denjenigen Punkten, deren Projektionen in der Mitte zwischen den Projektionen der dunklen

Stellen liegen, verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der ungeraden Zahlen; die Lichtstärke der Spektra nimmt daher zu beiden Seiten der Mitte rasch ab.

Die Winkeldistanz der dunklen Stellen läfst sich benutzen, die Wellenlänge zu messen. Steht z. B. der Schirm senkrecht auf die einfallenden Strahlen, ist also $\alpha = 0$, so sind die dunklen Stellen bestimmt durch $c \sin \alpha' = ml$; ist also die Breite des Spaltes c und α' (d. h. der Winkel zwischen einer dunklen Stelle und der Mitte) gemessen, so findet man, da m durch die Zahl des gemessenen Spektrums bekannt ist, aus der letzten Gleichung den Werth von l. Der hiernach von Schwerd beispielsweise für rothes Licht berechnete Werth von l stimmte sehr genau mit Fraunhofer's und Fresnel's Messungen.

Beugung durch eine Oeffnung, welche die Form eines Parallelogrammes hat.

Die gegenüberstehenden Ränder einer solchen Oeffnung verhalten sich wie die Ränder eines Spaltes. Bezeichnet man das eine Seitenpaar mit a, das andere mit b, und die auf diesen Seitenpaaren senkrechten Höhen, welche den Breiten des Spaltes entsprechen, mit h' und h'', so verhalten sich die in der Ebene des Schirms auf a und b senkrecht gezogenen Richtungen, wie die Richtung AB der vorigen Figur, und die Abstände der Projektionen der dunklen Stellen sind beziehlich $\frac{1}{h'}$ und $\frac{l}{h''}$, mit Ausnahme der Mittelspektra, welche der Distanz 1 1' der vorigen Figur entsprechen und die doppelte Breite haben. Es sei $CABD$ Fig. 3. die Ebene des Schirms, O der Punkt desselben, nach welchem die Augenaxe gerichtet ist, von O aus eine Kugel mit dem Radius 1 beschrieben, OS die Richtung der einfallenden Strahlen, S der Punkt, in welchem die Kugel von derselben getroffen wird, und p die Projektion desselben im Schirm; ferner sei AA' senkrecht auf a, und BB' senkrecht auf b. Diese geraden Linien mögen hier

wie bei jeder andern Oeffnungsform die auf die Ränder der Oeffnung senkrechten und durch die Mitte des Beugungsbildes gehenden Linien, Hauptrichtungen heifsen. Die Projektion der dunklen Stellen, welche in diese Linien fallen, und welche in der Figur mit 1, 2, 3, 4, 5 etc. und 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ etc. bezeichnet sind, findet man, wenn man von p aus Linien beziehlich von der Länge $\frac{l}{h'}$ und $\frac{l}{h''}$ aufträgt. Da $\frac{l}{h'}$ und $\frac{l}{h''}$ den Grundlinien eines Parallegramms gleich sind, dessen Inhalt l, und dessen Höhen h' und h'' sind, und diese Grundlinien sich wie die Seiten a und b der Oeffnung verhalten, so kann man als aufzutragende Einheiten a und b selbst nehmen. Die Projektionen der dunklen Linien sind die durch die Punkte 1, 2, 3 ... parallel mit BB', und die durch die Punkte 1′, 2′, 3′ ... parallel mit AA' gezogenen Linien. Die auf den Schirm projicirte Beugungsfigur (der Grundrifs) besteht daher aus parallelogrammförmigen Spektren, deren Winkel den Winkeln der Oeffnung gleich sind. Dieser Grundrifs ist Fig. 4. besonders dargestellt. Die Richtungen AA', BB' und die Punkte p, 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ sind dieselben, wie die eben so bezeichneten der letzten Figur. Das mittlere Spektrum $cdef$ ist das gröfste, und die Lichtstärke der Mitte p der des direkten Lichtes gleich. Wie bei einem Spalt nimmt die Intensität derjenigen Punkte der Richtungen AA' und BB', welche den Mitten der Linien 12, 23, 34, etc., 1′2′, 2′3′, 3′4′ etc. entsprechen, wie die Quadrate der Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. ab, so dafs die letzten Spektra sich nur bei sehr intensivem Einfallslicht erkennen lassen. Die Intensität eines beliebig liegenden Punktes q des Bildes erhält man, wenn man die Intensitäten der coordinirten Punkte auf den Hauptrichtungen AA', BB' mit einander multiplicirt. Da die Lichtstärke dieser coordinirten Punkte geringer als die der Mitte p ist, und selbst die hellsten Punkte der Spektra auf AA' und BB' sehr rasch an Intensität *abnehmen*, so werden die Spektra, welche die

Hauptrichtungen nicht durchschneiden, ausnehmend lichtschwach.

Der allgemeine Ausdruck für die Intensität eines beliebigen Punktes, dessen Projektion zu Coordinaten p' und p'' hat, wenn man AA' und BB' als schiefwinklige Coordinatenaxen nimmt, ist

$$I^2 = A^2 \left(\frac{sin(\frac{1}{2}\varkappa h' p')}{\frac{1}{2}\varkappa h' p'}\right)^2 \left(\frac{sin(\frac{1}{2}\varkappa h'' p'')}{\frac{1}{2}\varkappa h'' p''}\right)^2,$$

wo A^2 die Menge des direkten auf die Oeffnung fallenden Lichtes ist. Für die dunklen Linien, welche AA' parallel sind, wird $\varkappa h' p'$ einer geraden Zahl π gleich, für die dunklen Linien, welche parallel BB' sind, wird $\varkappa h'' p''$ einer geraden Zahl π gleich. Die Werthe für die in der Mitte der projicirten Spektra liegenden Punkte erhält man auf der Richtung AA', wenn man für $\varkappa h' p'$ nach und nach π, 3π, 5π, und den letzten Faktor von I^2, gleich Eins setzt; auf der Richtung BB', wenn man für $\varkappa h'' p''$ nach und nach π, 2π, 3π und den ersten Faktor von I^2 gleich Eins setzt. Nimmt man daher die einfallende Lichtmenge A^2 zur Einheit, so erhält man für die Mitten der Seitenspektra, welche die Hauptrichtungen AA', BB' durchschneiden, folgende Zahlen, wenn man das mittlere Spektrum *cdef* das erste nennt:

Spektrum	I^2	Spektrum	I^2
1tes	1,0000	6tes	0,0050
2tes	0,4053	7tes	0,0032
3tes	0,0450	8tes	0,0024
4tes	0,0162	9tes	0,0018
5tes	0,0083	10tes	0,0014

Man erhält demnach für die Mitte der Spektra *q*, *r*, *s*, *t*, *u* durch Multiplication der Werthe der beiden coordinirten Spektra beziehlich

(0,0450).(0,0450) = 0,0020; (0,0450).(0,0162) = 0,0007; (0,0450).(0,0083) = 0,0004; (0,0450).(0,0050) = 0,0002; (0,0162).(0,0162) = 0,0003.

Legt man zwei mit einem feinen Spalte versehene Stan-

niolblättchen quer über einander, und verändert die Form des Parallelogrammes dadurch, dafs man den einen Spalt bleibend vertikal hält, den anderen aber allmälig bis in eine gleichfalls vertikale Richtung verschiebt, so behalten die Spektra des ersten Spaltes eine horizontale Lage, die anderen gehen aus der vertikalen Lage nach und nach in die horizontale über, während sie die Horizontallinie stets in denselben Punkten durchschneiden. Ist die Oeffnung sehr hoch, so werden die Spektra sehr niedrig, und scheinen zuletzt, wenn sie sich wegen ihrer Feinheit nicht mehr unterscheiden lassen, einen blofsen Lichtstreif zu bilden.

Beugung durch eine dreieckige Oeffnung.

Die Figur, welche man durch eine dreieckige Oeffnung erblickt, ist ein von 6 Lichtstreifen gebildeter Stern, dessen Arme senkrecht auf den Seiten der Oeffnung stehen. Diese Arme sind aber nicht, wie die Arme des Kreuzes im Bilde des Parallelograms von dunklen Linien durchschnitten, sondern nur an den entsprechenden Stellen etwas eingeschnitten. Der Grundrifs des Bildes ist in Fig. 5. dargestellt, wo p wiederum die Projektion der Mitte ist, und AA', BB', CC' die auf den Seiten des Dreiecks senkrechten Hauptrichtungen sind. Die Intensität in p ist der des direkten Lichtes gleich. Vergleicht man die Lichtstärke in den Hauptrichtungen mit derjenigen, welche ein Parallelogram von derselben Höhe in diesen Richtungen darbietet, so findet sich die letztere durchgängig schwächer als bei dem Dreieck, vorausgesetzt, dafs das Licht der Mitte in beiden Fällen gleich stark ist.

In den Hauptrichtungen selbst befinden sich, wie schon erwähnt ist, keine dunklen Punkte. Nennt man diejenigen Stellen der Hauptrichtungen, welche bei einem Parallelogramm, dessen der Hauptrichtung parallele Höhe dieselbe wie beim Dreieck ist, dunkel sind — Minima der Hauptrichtung; und nennt man die in der Mitte zwischen diesen Minimis liegenden Punkte — die Maxima der Haupt-

richtung; so läfst sich die relative Intensität in diesen Punkten folgendermafsen aussprechen. Die Intensitätswerthe der Minima verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der geraden Zahlen, die der Maxima dagegen nahe umgekehrt wie die Quadrate der ungeraden Zahlen. Nimmt man nämlich die Lichtstärke der Mitte zur Einheit, so hat man für das $m$te Minimum den Ausdruck

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\pi}\right)^2\left(\frac{1}{2m}\right)^2,$$

und für das Maximum

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\pi(2m+1)}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\pi(2m+1)}\right)^4.$$

Es ist demnach

das 1te	Maximum	0,5695	das 1te	Minimum	0,1013
« 2te	«	0,04706	« 2te	«	0,02532
« 3te	«	0,01647	« 3te	«	0,01126
« 4te	«	0,00834	« 4te	«	0,00633
« 5te	«	0,00503	« 5te	«	0,00405
« 6te	«	0,00336	« 6te	«	0,00281
« 7te	«	0,00241	« 7te	«	0,00207

Was die Räume betrifft, welche zwischen den Armen des Sterns liegen, so befinden sich dort höchst lichtschwache, und daher mit blofsen Augen nur bei sehr intensivem Licht unterscheidbare Spektra, deren Grenzen durch dunkle Punkte angedeutet sind, welche da liegen, wo sich sie durch die Oerter der obenerwähnten Minima gehenden und den Hauptrichtungen parallelen Linien schneiden (siehe d. Figur), also in den Punkten, welche den Ecken der Parallelogramme im Beugungsbilde des Parallelogrammes entsprechen.

Je zwei Maxima, die auf verschiedenen Hauptrichtungen liegen, lassen sich als schiefwinklige Coordinaten der Mitte eines jener Zwischenspektra betrachten. Die Intensität dieser Mitte ist dem Produkt der Intensitäten jener beiden Maxima gleich. Ist daher die Lichtstärke in den Maximis, welche in der Figur durch 9, 25, 49, 81 etc. bezeichnet sind, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{49}$, $\frac{1}{81}$ etc., d. h. ist die Intensität der Mitte $(\frac{1}{2}\pi)^4$, so ist die Mitte der Spektra q, r, s, t, u, v beziehlich $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{225}$, $\frac{1}{441}$, $\frac{1}{729}$, $\frac{1}{625}$, $\frac{1}{1225}$.

Beu-

Beugung durch eine kreisrunde Oeffnung.

Das Beugungsbild einer Kreisöffnung ist ein heller Kreis, welcher von abwechselnd dunklen und hellen Ringen umgeben ist, siehe Figur 6. Für die Halbmesser der ersten 6 dunklen Ringe oder vielmehr für die Sinus derselben erhält man

$$\frac{1{,}220\,l}{d},\quad \frac{2{,}233\,l}{d},\quad \frac{3{,}238\,l}{d},\quad \frac{4{,}241\,l}{d},\quad \frac{5{,}243\,l}{d},\quad \frac{6{,}245\,l}{d},$$

wo l die Wellenlänge und d den Durchmesser der beugenden Oeffnung bedeutet. Man sieht aus diesen Werthen, dafs die Ringe sehr nahe gleich breit sind, dafs die vom ersten dunklen Ringe begrenzte erleuchtete Scheibe über die doppelte Ringbreite zum Durchmesser hat, dafs die Gröfse dieser Scheibe, wie überhaupt die Distanz der Ringe in demselben Verhältnifs wächst, in welchem der Durchmesser der beugenden Oeffnung abnimmt, und dafs sie sich endlich wie die Wellenlängen verhalten.

Vergleicht man die Erscheinung mit der eines Parallelogramms von gleichem Flächeninhalt mit der Kreisöffnung, so findet man die Intensität der Mitte in beiden gleich, aber bei jener Oeffnung die Lichtabnahme mit der Entfernung weit langsamer als beim Kreise, indem der erste Ring etwa 3 Mal, der zweite 4 Mal, der dritte 5 Mal und der vierte über 6 Mal schwächer als die entsprechenden Spektra der vierseitigen Oeffnung werden.

Die obigen von der Theorie gelieferten Ringhalbmesser stimmen sehr gut mit den Messungen, welche Fraunhofer für eine sehr grofse Zahl Oeffnungen von verschiedenen Durchmessern angestellt hat *). So giebt z. B. für eine Oeffnung, deren Durchmesser 0,03318 par. Zoll ist, die Rechnung für die Beugungswinkel der 5 ersten dunklen Ringe im weifsen Licht, wenn man dessen Wellenlänge mit Fraunhofer zu 0,0000211 par. Zoll annimmt,

2′ 40″, 4′ 53″, 7′ 5″, 9′ 16″, 11′ 28″,

*) Siehe Fraunhofer: Neue Modification des Lichtes p. 9 u. 10. und Schwerd: *Beugungserscheinungen* p. 71.

während Fraunhofer durch Messung fand:

2′ 42″, 4′ 52″, 7′ 6″, 9′ 19″, 11′ 32″.

Die gröfste Differenz zwischen Messung und Rechnung belief sich auf 15″.

Die betrachtete Erscheinung ist der Grund des Umstandes, dafs durch Fernröhre, welche 200 bis 400 Mal vergröfsern, die Fixsterne, welche als blofse Lichtpunkte erscheinen sollten, namentlich wenn dieselben sehr hell sind, sich als mehr oder weniger grofse runde Lichtscheibchen zeigen, welche von zwei, drei oder mehreren abwechselnd dunklen und hellen Ringen umgeben sind, die an ihren Rändern eine schwache Färbung wahrnehmen lassen *). Die kreisförmige Blendung tritt nämlich als beugende Oeffnung auf. Den scheinbaren Durchmesser des Lichtscheibchens, welcher dem doppelten Beugungswinkel des ersten Ringes gleich ist, im weifsen Licht, wenn man für dasselbe $l = 0{,}000571^{mm}$ nimmt, giebt die Rechnung, wie folgt:

Durchmesser der Oeffnung.	Durchmesser des Scheibchens.	Durchmesser der Oeffnung.	Durchmesser des Scheibchens.
1 par. Zoll	10″ 64	1 Centimeter	28″ 74
2 «	5″ 32	2 «	14″ 37
3 «	3″ 55	3 «	9″ 58
4 «	2″ 66	4 «	7″ 18
5 «	2″ 12	5 «	5″ 75
6 «	1″ 77	6 «	4″ 79
8 «	1″ 33	7 «	4″ 11
10 «	1″ 06	8 «	3″ 59
15 «	0″ 71	9 «	3″ 19
20 «	0″ 53	10 «	2″ 87

Dafs dunklere Sterne durch Fernröhre kleiner erscheinen, als die Rechnung angiebt, hat darin seinen Grund, dafs bei ihnen der Rand des Scheibchens wegen der geringen Lichtstärke dunkel erscheint. Dies wird noch da-

*) Die beschriebene Erscheinung wurde zuerst von dem älteren *Herschel* bemerkt.

durch bestätigt, dafs die Scheibe kleiner wird, wenn eine das Licht schwächende Wolke vorübergeht, die sie zuletzt auf einen blofsen Punkt zurückführt.

Dafs ferner sehr glänzende Sterne, besonders bei sehr grofsen Oeffnungen, einen gröfsern Durchmesser zeigen, als sie der Rechnung zufolge haben sollten, erklärt sich dadurch, dafs der erste Ring, welcher das Scheibchen umgiebt, dieses letztere vergröfsern hilft, indem der trennende schmale dunkle Ring bei der grofsen Lichtstärke nicht mehr wahrgenommen wird.

Beugung durch eine Reihe neben einander liegender, congruenter und gleich weit von einander entfernter Oeffnungen.

Sieht man durch eine Reihe congruenter äquidistanter Oeffnungen nach einem Lichtpunkt, so erblickt man dasselbe Bild, welches eine einzige dieser Oeffnungen geben würde, d. h. man erblickt Spektra von derselben Form und Ausdehnung. Die Helligkeit wächst aber mit der Zahl der Oeffnungen. Fraunhofer nannte diese Spektra »Spektra erster Klasse«. Innerhalb derselben ist jedoch die Lichtstärke periodisch mehr oder weniger vermindert, so dafs sich daselbst neue schmälere Spektra bilden, deren Form indessen von der Gestalt der Oeffnungen unabhängig ist, Sie sind nämlich geradlinig und durchziehen das ganze Bild in einer Richtung, die auf derjenigen Linie senkrecht steht, welche die correspondirenden Punkte der Oeffnungen mit einander verbindet. — Man unterscheidet zwei sich wesentlich von einander unterscheidende Arten dieser Zwischenspektra. Die einen sind breiter und heller, und ihre Lage und Zahl ist von der Anzahl der Oeffnungen unabhängig; es richtet sich nämlich dieselbe nur nach der Entfernung der correspondirenden Ränder der Oeffnungen und nach der Lage des Schirms gegen den Lichtpunkt, oder mit andern Worten: nach dem Gangunterschied der Lichtbündel, welche durch *zwei aufein*anderfolgende Oeffnungen eindrin-

gen. Die zweite Art ändert sich dagegen in Bezug auf Lage und Zahl, wenn die Zahl der Oeffnungen sich ändert. Jene nannte Fraunhofer Spektra zweiter Klasse, diese Spektra dritter Klasse.

Für n Oeffnungen ist der analytische Ausdruck der Intensität

$$(nI)^2 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}n\varkappa\varepsilon)}{n \sin(\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon)}\right)^2,$$

wo I^2 die Intensität ist, welche eine einzige der Oeffnungen geben würde, und ε den Gangunterschied der Strahlenbündel je zwei aufeinanderfolgender Oeffnungen bedeutet, während $\varkappa$ wiederum für $\frac{2\pi}{l}$ steht.

Da dieser Ausdruck verschwindet, wenn $I=0$ ist, so befinden sich da dunkle Stellen, wo sie bei einer einzigen Oeffnung sind. Die Spektra der ersten Klasse haben also dieselben Grenzen, wie die Spektra des Bildes einer einzigen Oeffnung.

Die hellsten Stellen des Bildes sind da, wo der zweite Faktor jenes Ausdrucks der Einheit gleich ist, und zwar tritt dies ein, wenn der Gangunterschied ε für zwei aufeinanderfolgende Oeffnungen eine ganze Zahl Wellenlängen ist. Sie bilden die Mittelpunkte der Spektra zweiter Klasse, und es ist die Lichtstärke derselben n^2I^2, also das n^2fache derjenigen, welche eine einzige Oeffnung an diesen Stellen geben würde. Da für die Mitte, d. h. für den Punkt derjenigen Richtung, welche den einfallenden Strahlen parallel ist, (nach p. 10) I^2 der Menge des auf eine der Oeffnungen fallenden direkten Lichtes gleich wird, so ist die Lichtstärke derselben bei n Oeffnungen das n^2fache desselben.

Zwischen jenen hellsten Stellen der Spektra zweiter Klasse befinden sich dunkle Stellen, welche die Grenzen der Spektra dritter Klasse bilden, und zwar liegen dieselben da, wo das $n$fache des Gangunterschiedes ε einer ganzen Zahl Wellenlängen gleich ist, ausgenommen in den Mittelpunkten der Spektra zweiter Klasse (insofern nämlich der zweite Faktor des obigen Ausdruckes verschwindet, wenn

$\varepsilon = \frac{m}{n} l$ wird und m jedwede ganze Zahl bedeutet, welche kein Vielfaches von n ist). Da zwischen den Mittelpunkten je zwei auf einander folgender Spektra zweiter Klasse demnach $n-1$ dunkle Stellen liegen, so ist die Zahl der dort liegenden Spektra dritter Klasse $n-2$. Diese letzten Spektra können daher nicht erscheinen, wenn nicht mindestens drei Oeffnungen vorhanden sind. Die Stellen, wo dieselben die gröfste Lichtstärke haben (die Mittelpunkte der Spektra dritter Klasse), entsprechen den Punkten, in denen das $n$fache des Gangunterschiedes ε_0 eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt (da in diesem Falle $\sin \frac{1}{2} n x \varepsilon$ sein Maximum, die Einheit, erreicht).

Ferner ergiebt sich, dafs die Spektra zweiter Klasse doppelt so breit sind, als die der dritten Klasse.

Der Grundrifs der beiden Arten von Spektra läfst sich ganz analog, wie der Grundrifs der Hauptspektra einer einzigen Oeffnung, ausführen. Ist nämlich Fig. 7. p wiederum der Mittelpunkt des Bildes, und ist ab der Linie parallel, welche die Mittelpunkte der Oeffnungen mit einander verbindet, und cd senkrecht auf ab, so ist die Entfernung jedes Punktes des Schirmes von cd, wie sich erweisen läfst, gleich $\frac{\varepsilon}{e}$, wo e der Abstand der correspondirenden Punkte je zwei auf einander folgender Oeffnungen bedeutet, und ε der Gangunterschied für die Punkte ist, deren Projektionen in jener Entfernung von cd liegen. Trägt man daher auf ab von p aus nach beiden Seiten hin Theile auf, deren Gröfse $\frac{l}{e}$ ist, und errichtet in den Theilpunkten p_1, p_2, p_3, p_4 etc. Perpendikel, so sind dies die Projektionen der für jede Oeffnungszahl ihre Lage behaltenden Mittellinien der Spektra zweiter Klasse, mit Ausnahme derjenigen, die etwa in die dunkle Grenzlinie eines Spektrums erster Klasser fallen sollten, weil dort sich kein Licht bilden kann. Jene Mittellinien sind ununterbrochen, wenn sie *nicht von dunklen* Linien der Spektra erster Klasse *durchschnitten werden.*

Ist die Zahl der Oeffnungen z. B. 6, so erhält man die dunklen Grenzlinien der Spektra dritter Klasse, wenn man die Linien pp_1, p_1p_2 etc. in 6 Theile theilt, und in den Theilpunkten (1, 2, 3, 4, 5, 6 etc.) Perpendikel errichtet. Die Breite der Spektra ist daher in dem Grundrifs für alle Spektra gleich, und zwar gleich $\frac{l}{ne} = \frac{l}{6e}$, während die Breite der Spektra zweiter Klasse (wie z. B. 5, 7) doppelt so grofs, nämlich $= \frac{l}{ne} = \frac{l}{3e}$ ist. Man sieht, dafs für jede neu hinzutretende Oeffnung ein Spektrum dritter Klasse mehr zwischen jeden zwei Spektren zweiter Klasse erscheint, dafs aber dadurch die Spektra beider Klassen schmäler werden, und sich bald auf blofse Lichtlinien reduciren. Da aber die Intensität der Spektra zweiter Klasse mit der Zahl der Oeffnungen wächst, so übertreffen diese die der dritten Klasse bald so an Glanz, dafs die letzteren gar nicht mehr wahrgenommen werden können, und die glänzenden Lichtlinien zweiter Klasse durch gröfsere dunkle Zwischenräume von einander getrennt scheinen.

Nach dem Vorhergehenden ist es leicht, den Grundrifs des ganzen Beugungsbildes für jeden möglichen Fall zu construiren.

Sind die Oeffnungen z. B. zwei Parallelogramme von der Lage, wie sie in Fig. 8. angegeben ist, so zieht man durch irgend einen beliebigen Punkt p, welchen man zum Mittelpunkt des Bildes nimmt, AA senkrecht auf die Seite a, und BB senkrecht auf die Seite b der Oeffnung, trägt von p aus auf AA Längen von der Gröfse $pa = \frac{l}{h'}$, und auf BB Längen von der Gröfse $pb = \frac{l}{h''}$ auf, unter h' und h'' die auf a und b senkrechten Höhen der Oeffnungsfigur verstanden. Die Linien, welche man durch die Theilpunkte von AA parallel mit BB, und durch die Theilpunkte von BB parallel mit AA zieht, sind die Grenzen der Spektra der ersten Klasse.

Alsdann zieht man EE' parallel CC', trägt darauf von p aus Theile ab, welche gleich $pi = \frac{l}{CC'} = \frac{l}{e}$ sind. Die auf EE in den Theilpunkten senkrecht errichteten Geraden würden die Mittellinien der Spektra zweiter Klasse sein. Die in der Mitte zwischen jeden zwei Theilpunkten errichteten Perpendikel sind die Grenzen dieser Spektra. Da nur 2 Oeffnungen sind, so existiren gar keine Spektra der dritten Klasse. Denkt man die Oeffnungen in solchem Maſsstabe gezeichnet, daſs der Inhalt des Parallelogramms gleich l ist, so wird $pa = \frac{l}{h'} = a$, $pb = \frac{l}{h''} = b$, und pi gleich der Grundlinie eines Parallelogramms, dessen Inhalt l, und dessen Höhe $CC' = e$ ist.

Befinden sich in dem Schirm 4 parallelogrammartige Oeffnungen, in einer solchen Lage (Fig. 9), daſs die Verbindungslinie CC''' der Seite a der Parallelogramme parallel ist, so kommt die Richtlinie EE senkrecht auf AA zu stehen, und die Spektra der zweiten und dritten Klasse werden dieser Linie AA parallel. Nimmt man überdies $e = b = 2a$, so wird $pi = pa$, und i oder die Mitte des ersten Spektrums zweiter Klasse fällt in die Mitte von pb. Die Mitte des zweiten Spektrums zweiter Klasse sollte in b fallen; da dort aber die Grenze eines Spektrums erster Klasse, also eine dunkle Linie liegt, so fällt jenes zweite Spektrum fort. Ebenso verhält es sich an allen Grenzen der Spektra erster Klasse, welche mit AA parallel sind, und die übrig bleibenden Spektra zweiter Klasse befinden sich in der Mitte derer der ersten Klasse. Um die Grenzen der Spektra dritter Klasse zu erhalten, hat man, da die Zahl der Oeffnungen vier ist, pi, ib, bi etc. in 4 Theile zu theilen und durch den Theilpunkt Linien mit AA parallel zu ziehen. Man erhält auf diese Weise zu jeder Seite eines Spektrums zweiter Klasse 2 Spektra dritter Klasse. An die Stelle der verschwundenen Spektra zweiter Klasse (in b, b_1, b_2, b_3 etc.) treten zwei neue Spektra, welche mit den *normalen Spektren* dritter Klasse gleiche Breite

haben, und welche dadurch entstanden sind, dafs die Spektra zweiter Klasse dort durch die dunklen Grenzlinien derer der ersten Klasse getheilt sind. Das Bild hat daher das Ansehen, als ob je zwei Spektra zweiter Klasse durch 6 Spektra dritter Klasse von einander getrennt sind. Nur die Centralspektra auf der Richtung *AA* bewahren ihren Charakter als Spektra zweiter Klasse, da dort keine dunkle Hauptgrenze sich befindet. Eine ähnliche Theilung würden die Spektra dritter Klasse erleiden, wenn die Grenze eines Spektrums erster Klasse in die Mitte eines derselben fiele.

Von selbst verständlich sind die in Fig. 10 und 11 dargestellten Bilder für zwei Quadrate. In dem ersten berühren sich die Quadrate in den Ecken, und es ist daher $a = b$ und $e = a\sqrt{2}$; in dem zweiten ist $a = b$ und $e = 2a\sqrt{2}$ vorausgesetzt.

Sind die beugenden Oeffnungen dreieckig, so zeichnet man zuerst den 6strahligen Stern mit den dunklen Punkten zwischen den Strahlen, und trägt alsdann auf einer Richtlinie, welche man der Verbindungslinie der Dreiecke parallel zieht, die Distanzen auf, welche den Grenzen der Spektra dritter Klasse entsprechen. Die durch die Theilpunkte senkrecht auf die Richtlinie gezogenen Geraden grenzen unmittelbar die Spektra der zweiten und dritten Klasse ab.

Trägt man bei der Construction des Sterns auf den Hauptrichtungen die Seiten des Dreiecks selbst als Einheiten auf, so ist die Einheit, welche man auftragen mufs, um die Grenzen der Spektra dritter Klasse zu erhalten, der $n$te Theil der Grundlinie eines Dreiecks, dessen Inhalt einem der gegebenen Dreiecke gleich ist, und welches e zur Höhe hat. Man sehe die Zeichnung für zwei regelmäfsige Dreiecke (Fig. 12).

Sind die beugenden Oeffnungen Kreise, so beschreibe man die dunklen Kreise mit den Radien 1,220; 2,223; 3,238; 4,241; 5,243; 6,245 in Bezug auf eine Einheit, welche dem Durchmesser einer Oeffnung gleich ist, und trage

alsdann auf einen Durchmesser des Bildes vom Centrum aus Theile ab, welche zur Länge die Länge der Grundlinien eines Rechtecks haben, das zur Höhe die Entfernung der Mittelpunkte zweier benachbarten Oeffnungen hat, und zum Inhalt das Quadrat des Durchmessers einer Oeffnung. Die in den Theilpunkten auf der getheilten Linie errichteten Perpendikel sind die Mittellinien der Spektra zweiter Klasse, und deren Distanzen in *n* Theile getheilt, geben die Durchgangspunkte der Grenzen der Spektra dritter Klasse. Fig. 13 stellt den Grundrifs für 2 Kreise dar, welcher dem von Fraunhofer beschriebenen Bilde entspricht, wenn der Durchmesser sich zur Centraldistanz, wie 2227 : 3831 verhält.

Die Fig. 14 ist ein Beispiel für drei Kreise, deren Mittelpunkte um zwei Durchmesser von einander entfernt sind.

Die Spektra dritter Klasse jenseits des zweiten Spektrums zweiter Klasse sind so lichtschwach, dafs sie selbst Fraunhofer entgingen. Schwerd, durch die Theorie auf deren Vorhandensein aufmerksam gemacht, entdeckte sie auch in den nächsten nachfolgenden Räumen an den durch die Rechnung bestimmten Stellen.

Einfache Gitter nennt man eine Reihe auf einander folgender gleich breiter und gleich weit von einander entfernter Spaltöffnungen. Um sehr feine Gitter von genauer Distanzgleichheit zu erhalten, befestigt man zwischen den Windungen zweier gleichen gegenüberstehenden engen und genau gearbeiteten Schrauben Metallfäden; oder man radirt feine Linien mit Diamant in eine ebene Glastafel mittelst eines Mikrometers neben einander, wo die Linien, welche durch das Radiren undurchsichtig werden, die Stelle der dunklen Zwischenräume vertreten. Fraunhofer bediente sich bei seinen feinsten Versuchen eines auf die letzte Art verfertigten Gitters von 3601 Linien, deren Entfernung von einander 0,0001223 par. Zoll betrug.

Es mögen hier einige der von Schwerd angestellten Messungen folgen, welche die Theorie genugsam bestätigen.

Sie beziehen sich auf die Entfernung der Mitte des zweiten Spektrums zweiter Klasse bei rechtwinkligen Gittern, also auf die Gröfse, die wir durch $\frac{l}{e}$ bezeichnet haben, und sind mit dem fast homogenen Lichte angestellt, welches das weifse Licht nach dem Durchgange durch das rothe mit Kupferoxydul gefärbte Glas liefert, und dessen Wellenlänge er auf $0{,}000640^{mm}$ bestimmte.

Der aus mehreren Messungen entnommene Mittelwerth der Entfernung bei einem Gitter mit 11 Oeffnungen, deren Entfernung $e = 1^{mm},7376$, und deren Breite $a = \frac{1}{2}e$ war, war 1′ 15″, während die Theorie $\frac{l}{e} = \sin 1' 16''$ lieferte.

Bei einem Gitter mit 18 Oeffnungen, in welchem $e = 0^{mm},8157$ und $a = \frac{2}{3}e$ war, fand sich als gemessener Werth 2′ 41″,5, als berechneter $\frac{l}{e} = \sin 2' 41',8$.

Bei einem Gitter mit 15 Oeffnungen, in welchem $e = 0^{mm},8124$, und $a = \frac{1}{3}e$ war, gab die Messung 2′ 39″,4, die Rechnung 2′ 42″,5.

Bei einem Gitter mit 6 Oeffnungen, in welchem $e = 2^{mm},6064$, und $a = \frac{1}{3}e$ war, gab die Messung 0′ 50″,8, und die Rechnung 0, 50″6.

Sind die Oeffnungen des Gitters nicht gleich breit und nicht gleich weit von einander entfernt, wiederholen sich aber diese Ungleichheiten periodisch, so dafs es aus genau gleichen Parthieen besteht (Parthiegitter), so zeigen sich die Seitenspektra periodisch dunkler und heller. In der That giebt die Theorie einen Ausdruck für die Intensität, welcher dem für ein einfaches Gitter gleich ist, multiplicirt mit einem Faktor, welcher periodisch ab- und zunimmt.

Fraunhofer stellte einen Versuch mit einem Gitter an, in welchem jede Parthie aus drei Oeffnungen bestand, von denen die erste von der zweiten 0,25.e, und die zweite von der dritten 0,33.e abstand, unter e die Entfernung der Parthieen unter sich verstanden. Berechnet man hiernach den periodischen Faktor für die hellsten Stellen der Spek-

tra zweiter Klasse, so findet man ihn am gröfsten im 1sten, 12ten und 24ten Spektrum, wo er beziehlich die Werthe 9,000; 8,874; 8,505 annimmt, und diese Spektra sind es gerade, deren Fraunhofer als auffallend deutliche erwähnte. Nimmt man als Entfernungen der Parthieöffnungen 0,25.*e* und 0,333.*e*, so liefert die Rechnung für die genannten drei Spektra den verstärkenden Faktor gleich grofs und zwar gleich 9,000. Man sehe Schwerd p. 99 und ibid. Tab. VI.

Beugung durch mehrere Reihen gleicher und gleich weit entfernter Oeffnungen.

Sind die Reihen gleich weit von einander entfernt und überdies unter sich congruent, so zeigen sich dieselben Modificationen in derjenigen Richtung, welche die correspondirenden Oeffnungen der verschiedenen Reihen mit einander verbindet, die sich bei einer einzigen Reihe in derjenigen Richtung zeigten, welche die correspondirenden Punkte der Oeffnungen der Reihe verbindet. So wird z. B. jedes Spektrum zweiter Klasse in der neuen Dimension in Spektra zweiter und dritter Klasse getheilt. Bei einer grofsen Zahl Reihen reduciren sich daher die Spektra zweiter Klasse in blofse Lichtpunkte, welche um so stärker glänzen, je gröfser die Reihenzahl ist, und die schwachen immer mehr zu Punkten werdenden Spektra dritter Klasse werden unwahrnehmbar. Der analytische Ausdruck für die Intensität ist, bei m Reihen:

$$(mA')^2\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}m\varkappa\varepsilon')}{m\sin(\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon')}\right)^2,$$

wo A' die Intensität einer einzigen Reihe, und ε' der Gangunterschied der Lichtbündel ist, welcher durch zwei unter einander befindliche Oeffnungen dringt. Die Intensität der Lichtpunkte zweiter Klasse wird demnach m^2 Mal gröfser, als in den entsprebenden Spektren bei einer einzigen Reihe. *Solche Verbindung* mehrerer Reihen von Oeffnungen ist da-

her sehr geeignet, die Intensitäten dieser Punkte mit einander zu vergleichen.

Die Figg. 15 u. 16 zeigen den Grundrifs für 4 Quadrate, welche so liegen, wie durch die danebenstehende Zeichnung angegeben ist.

Kreuzt man zwei gleiche einfache Gitter, deren jedes 4 Oeffnungen hat, und in denen die Zwischenräume zwischen den Oeffnungen der Breite derselben gleich sind, rechtwinklig, so erscheint ein ganz besonders schönes, nach dem Vorhergehenden leicht construirbares Bild, von welchem *yox* Fig. 17 ein Viertel vorstellt. Durch Vermehrung der Oeffnungen wird nur die Zahl der Spektra dritter Klasse vermehrt.

Die schönen Farben-Erscheinungen, welche man durch ein Fernrohr erblickt, wenn man vor dasselbe ein Stück Musselin oder Seidenband hält, sind keine anderen, als die eben beschriebenen; nur dafs sie weniger regelmäfsig sind, wegen der nicht genau gleichen Entfernung und der nicht genau gleichen Dicke der Fäden.

Die Fig. 18 stellt den Grundrifs für mehrere Reihen gleichseitiger Dreiecke dar, wo die kleinen Kreise die Orte der Spektra zweiter Klasse, und die Punkte die dunklen Stellen der ersten Klasse vorstellen.

Die Fig. 19 zeigt den Grundrifs des Bildes von 4 Kreisöffnungen, und Fig. 20 für mehrere Reihen sehr vieler kreisförmiger Oeffnungen, wo jeder der kleinen Kreise ein zum Lichtpunkt gewordenes Spektrum zweiter Klasse bedeutet.

Als interessante Beugungs-Erscheinungen merke man noch folgende:

1) die Erscheinung, welche durch gleiche dreieckige Oeffnungen erzeugt werden, die so angeordnet sind, wie sie die Fig. 21 darstellt. Die Intensität in jedem Punkte des Bildes ist das Produkt aus derjenigen Intensität, welche eine Oeffnung für sich liefert, und aus dem Intensitätsantheil, welcher durch die Vervielfältigung der Oeffnungen und durch die Anordnung derselben hervorgebracht wird. Da *sich das Dreieck*, in welchem die Oeffnungen vertheilt sind,

von der Mitte aus in 8 symmetrische Theile theilen läfst, so wird die Lichtvertheilung in dem Grundbilde, welches eine einzige Oeffnung geben würde, gleichfalls von der Mitte aus sich in 8 symmetrische Abtheilungen theilen lassen.

Die Oeffnungen liegen in geradlinigen Reihen *aa*, *bb*, *cc*, und in diesen sind die Entfernungen gleich.

Wäre nun blofs die Reihe *aa* vorhanden, so würde man dem Vorigen gemäfs die hellsten Stellen erhalten, wenn man eine Linie *AA* Fig. 22 parallel *aa* zieht, auf dieselbe von der Mitte aus Theile abträgt, deren Länge $\frac{l}{e}$ ist (unter *e* die Entfernung je zweier Oeffnungen verstanden), und in den Theilpunkten Senkrechten errichtet. Macht man es ebenso mit den beiden anderen Reihen *bb* und *cc*, so werden die hellsten Stellen da erscheinen, wo sich die senkrechten Linien (die Linien der gröfsten Intensität der einzelnen Reihen) schneiden. In der Fig. 22 sind sie durch kleine Kreise angedeutet, nur sind, da die Oeffnungen in dem vorliegenden Falle Dreiecke sind und daher diejenigen Maxima ausfallen müssen, welche auf die dunklen Stellen des Grundbildes fallen, diese letzteren durch dunkle Punkte ersetzt.

Der sich wiederholende Intensitätsgang zwischen 1 und 2 in dem Faktor, welcher von der Zahl und Ordnung der Dreiecke abhängt, ist in Fig. 23, der Gang zwischen 1 und 3 in Fig. 24 graphisch dargestellt.

Ganz ähnlich wird die Erscheinung, welche von J. Herschel (*Traité de la lumière*, §. 778) beschrieben wurde, und welche durch 19 gleichseitige Dreiecke erzeugt wird, die so angeordnet sind, wie es die Fig. 25 zeigt.

2) Die Erscheinung durch ein Quadrat, dessen mittlerer Theil durch einen Streif so verdeckt ist, dafs zwei gleichseitige congruente Dreiecke übrig bleiben. S. Fig. 26. Für den Fall, dafs die Breite des Streifs *ff'* dem vierten Theil der Diagonale *AA'* gleich ist, wird die Erscheinung von der Form Fig. 27. Die Construction ist folgende:

Man zieht durch einen Punkt *o* die Linien **AA**, **BB**,

CC beziehlich senkrecht auf die Dreiecksseiten a, b, c, trägt auf diesen Hauptrichtungen Einheiten ab, welche gleich $\frac{l}{h'}$, $\frac{l}{h''}$, $\frac{l}{h'''}$ sind (unter h', h'', h''' die Höhen des Dreiecks verstanden), und zieht durch die Theilpunkte Linien, welche den beiden andern Hauptrichtungen parallel sind. Die Durchschnittspunkte, welche nicht in die Hauptrichtungen selbst fallen, sind die dunklen Stellen zwischen den Strahlen des Sterns. Die Stellen, wo die Hauptrichtungen von dunklen Stellen durchschnitten werden, und wo daher die Grenzen der dort liegenden Spektra sich befinden, erhält man, wenn man auf AA, BB, CC Einheiten aufträgt, welche beziehlich gleich $\frac{l}{\frac{2}{3}h'}$, $\frac{l}{\frac{4}{3}h''}$, $\frac{l}{\frac{4}{3}h'''}$ sind. Ueberdies findet man auf AA noch den Punkt i, für welchen $oi = \frac{l}{\frac{1}{6}h'}$ ist, als Durchgangstelle einer dunklen Linie. Was endlich die Richtung dieser dunklen Linien betrifft, so gehen dieselben nach den dunklen Punkten der Linien FF und GG, welche senkrecht auf AB' und AC' zu ziehen sind, und auf welche man als Einheiten Längen aufzutragen hat, welche gleich $\frac{l}{AH}$ sind. AH ist senkrecht auf CH, und CH parallel $A'B$ zu ziehen.

Die Rechnung stimmt hierin überall sehr genau mit den Messungen überein.

3) Die Erscheinung durch den Zwischenraum zwischen zwei concentrischen Figuren.

Die Vibrations-Intensität in jedem Punkte des Bildes ist die Differenz derer, welche jede der Figuren als Oeffnung für sich geben würde. Man kann daher den Gang der Vibrations-Intensität und somit der Lichtstärke in jeder beliebigen Richtung des Bildes graphisch construiren, wenn man den Gang der Vibrations-Intensität in dem Bilde jeder der Figuren in jener Richtung als Curve durch Zeichnung darstellt, und zwar über derselben Abscissenlinie und *so, dafs die* Punkte der Abscissenlinie, welche in beiden

Curven der Mitte des Bildes entsprechen, zusammenfallen. Die Differenzen der Ordinaten geben alsdann die Ordinaten derjenigen Curve, welche den Gang der Vibrations-Intensität im Bilde des concentrischen Ringes darstellt. Bei der Ausführung findet man, dafs die Spektra in den Hauptrichtungen nicht gleich breit werden, aber symmetrisch in Bezug auf diejenigen Punkte, in denen die Ordinaten beider Curven zugleich verschwinden.

Die Figur für zwei concentrische Quadrate, deren Seiten sich wie 1:2 verhalten, ist die Fig. I. Die Fig. II. zeigt das Bild für zwei concentrische Ringe.

Fig. 28 ist der Grundrifs für zwei concentrische Kreise, deren Durchmesser sich wie 1:2 verhalten. Das helle Scheibchen in der Mitte ist von 2 starken Ringen umgeben, dann folgt ein sehr schwacher, dann drei stärkere, alsdann wiederum zwei schwache u. s. w. Verhalten sich die Durchmesser wie 3:4, so kommen zuerst 6 fast gleich breite immer schwächer werdende Lichtringe, dann ein sehr schwacher und schmaler, und diesem folgen wieder etwas hellere.

Bei zwei concentrischen Kreisringen, deren Durchmesser sich wie 1:2:3:4 verhalten, folgen auf das Scheibchen zwei schmale, dann zwei breite, alsdann wieder ein sehr schmaler ungemein schwacher etc.

Ueber die sehr sonderbaren Erscheinungen, welche zwei neben einander liegende ungleiche Oeffnungen geben, die jedoch gleichfalls genau der auf der Theorie gegründeten Rechnung entsprechen, siehe Schwerd a. a. O. p. 123.

Höchst interessant ist die von Fraunhofer zuerst beschriebene Erscheinung, welche man durch die Fahne einer Vogelfeder erblickt. Sie erklärt sich sehr leicht aus der Struktur der Feder. An dem Hauptkiele *AB* Fig. 29 befinden sich nämlich fast in gleichen Entfernungen von einander die Seitenkielchen *ab*, und an diesen zu beiden Seiten die mit *ac* und *ac'* parallelen Zasern, welche durch feine durchsichtige Häutchen mit einander verbunden sind. Die parallelogrammartigen Oeffnungen, welche durch die mit *ac* parallelen Zasern begrenzt sind, geben in der auf *ac*

senkrechten Richtung die Spektra *S* (Fig. 29); die mit *ac'* parallelen Zasern geben genau gleiche Spektra *T*, in der auf *ac'* senkrechten Richtung; die schmalen Seiten der Parallelogramme, welche durchgängig parallel sind, geben die schmalen Spektra in der Richtung *DD*. Wegen der grofsen Zahl der Oeffnungen an einem und demselben Kielchen *ab* reduciren sich alle 3 Reihen Spektra auf glänzende Lichtlinien, die auf *ab* senkrecht stehen; und wegen der Menge der Kielchen zerfallen diese Lichtlinien wiederum in Lichtpunkte, welche in weifsem Sonnenlichte sich zu farbigen Streifen ausdehnen, die nach der Mitte *C* gerichtet sind. Wenn sich die Zasern durchkreuzen, so bilden sich noch die Spektra *N*.

Schwerd bewies die Richtigkeit dieser Erklärung durch Messungen, die er für eine Schwungfeder des Corpus glandarius anstellte.

Er fand für die Entfernung der Zasern *ac*, $0^{mm},01954$; für die der Zasern *ac'*, $0^{mm},02104$; für den durchsichtigen Zwischenraum ungefähr $\frac{2}{3}$ dieser Entfernung; und für die Entfernung der Kielchen *ab*, $0^{mm},4574$. Hieraus findet sich durch die Rechnung für rothes Licht $CS = 1^0\ 52'\ 37''$, $CT = 1^0\ 44'\ 35''$, und die Entfernung der Lichtpunkte auf *DD*, 4′ 48″.

Die Messung lieferte oberhalb *DD*, $CS = 1^0\ 28'$ bis $1^0\ 42'$ und $CT = 1^0\ 41'$ bis $1^0\ 53'$; unterhalb *DD*, $CS =$ $1^0\ 32'$ bis $1^0\ 51'$ und $CT = 1^0\ 48'$; und für die Entfernung der Lichtpunkte auf *DD*, 4′ 45″. Bei der Ungleichheit der verschiedenen Theile einer Vogelfeder ist eine gröfsere Uebereinstimmung kaum denkbar.

Erscheinungen im weifsen Lichte.

Im Bisherigen ist stets vorausgesetzt worden, dafs das Licht, welches durch die beugenden Oeffnungen dringt, von einem homogenen Lichtpunkt ausgesendet wird. Ist aber das Licht, wie das Sonnenlicht, aus unzähligen homogenen Farben zusammengesetzt, so giebt der einer jeden Farbe

zu-

zugehörige direkte Lichtbündel ein eigenes Bild. Diese Bilder sind aber einander vollkommen ähnlich, und nur der Maſsstab ändert sich mit der ihnen zukommenden Wellenlänge. Die gleichnamigen Spektra der verschiedenen Farben befinden sich daher neben einander oder überdecken sich zum Theil, so daſs im letzteren Falle eine Mischungsfarbe entsteht. Da die Entfernungen der correspondirenden hellsten Punkte in den Spektren der verschiedenen Farben von der Mitte proportional der Wellenlänge sind, so liegen die violetten Seiten der farbig werdenden Spektra der Mitte zugekehrt, die rothen Seiten dagegen nach auſsen, und es treten nur da einige Modificationen ein, wo in gröſserer Entfernung von der Mitte die violetten und blauen Spektra wegen der kurzen Wellenlänge von dem vorhergehenden rothen Spektrum überragt werden.

Insofern die Mitte des Bildes für jede Farbe im Maximum der Intensität sich befindet, und diese der Intensität des direkten Lichtes gleich ist, so wird sie im weiſsen Licht durchgängig weiſs. Da die Spektra zweiter Klasse bei sehr vielen Oeffnungen sich auf Lichtlinien oder Lichtpunkte reduciren, und die zwischen ihnen liegenden Spektra dritter Klasse wegen ihrer Lichtschwäche unbemerkbar werden, so bestehen die farbigen Spektra zweiter Klasse aus fast ganz homogenen neben einander liegenden Lichtpunkten oder Lichtlinien, und aus diesem Grunde werden in ihnen die Fraunhoferschen dunklen Linien sichtbar, welche aber der Natur der Sache nach ein etwas anderes Distanzenverhältniſs als im prismatischen Spektrum haben. Fraunhofer nannte daher diese Spektra vollkommene Spektra zweiter Klasse. Unvollkommene Spektra dieser Klasse nannte er die bei wenigen Oeffnungen erscheinenden, weil jene Linien nicht darin bemerkt werden, und nicht bemerkt werden können, da einerseits diese Spektra breiter werden und sich mithin zum Theil überdecken, andrerseits weil die zwischen ihnen liegenden Spektra dritter Klasse nicht mehr so sehr überstrahlt werden, und die Reinheit der Farben stören.

Ist *C (Fig. 30) die Mitte* eines Bildes, und sind C, c'

v'', v''' die vier ersten (vollkommenen) violetten Spektra zweiter Klasse, so kommen die vier ersten rothen Spektra ungefähr in C, r', r'' und r''' zu liegen. Es fällt daher zwischen C und v' und zwischen r' und v'' gar kein Spektrum, und demnach liegt zwischen dem ersten und zweiten farbigen Spektrum ein grofser, und zwischen dem zweiten und dritten ein kleiner dunkler Zwischenraum, während die folgenden sich an einander schliefsen oder vielmehr mit den äufsersten Enden (wie zwischen r'' und v''') sich überdecken und die dortigen Fraunhoferschen Linien (zwischen r'' und v''' z. B. die Linien B und C) verschwinden machen.

Die Erscheinung durch ein einfaches Gitter mit sehr vielen, nicht zu hohen Oeffnungen, welche so breit wie die Zwischenräume sind, ist Fig. IV. abgebildet. Durch zwei solche sich rechtwinklig kreuzende Gitter erhält die Erscheinung das Aussehen der Fig. V.

Ein solches Gitter mit 4 Oeffnungen, durchkreuzt durch ein sehr feines Gitter, giebt die Erscheinung, von welcher Fig. VI. ein Quadrant abgebildet ist. Man bemerke dabei in der horizontalen Dimension die 2 schmalen Spektra dritter Klasse zwischen dem ersten und zweiten der zweiten Klasse, und die sich auf 6 vervielfältigenden in den andern Räumen (vergl. p. 24).

Fig. VII. stellt die Erscheinung durch 2 Reihen vieler Kreisöffnungen dar. Man bemerke in der vertikalen Dimension die einzelnen halb so breiten Spektra dritter Klasse zwischen je zweien der zweiten Klasse.

Die Erscheinung durch 4 in einem Quadrat liegende Kreisöffnungen siehe Fig. VIII.

Beugungs-Erscheinungen, wenn das Licht von einer leuchtenden Linie oder einer leuchtenden Fläche ausgeht.

Wird das Licht nicht von einem einzelnen Punkte, sondern von einer leuchtenden Fläche ausgesendet, so darf man die Bilder, welche von den einzelnen Lichtpunkten derselben erzeugt werden, als unabhängig von einander be-

trachten, oder mit andern Worten: es findet zwischen dem Licht der einzelnen leuchtenden Punkte, da ihre Vibrationen unabhängig von einander sind, keine merkliche Interferenz statt. Man erhält daher die Intensität in einem Punkte *m* des Gesammtbildes der Fläche, wenn man die Intensitäten addirt, welche die Bilder der einzelnen Lichtpunkte in diesem Punkte *m* haben.

Sind p und p_1 (Fig. 31) die Projektionen zweier gleich hellen Lichtpunkte der Fläche auf dem Schirm, und *m* ein Punkt des Bildes, dessen von diesen beiden Lichtpunkten herrührende Intensität man kennen lernen will, so kann man sich das Bild des ersten Punktes so verschoben denken, daſs p nach m, und m nach p' hinrückt, und ebenso das Bild des zweiten Punktes, so daſs p_1 nach m, und m nach p_1' rückt.

Verlegt man daher den Mittelpunkt des Bildes irgend eines der Lichtpunkte nach m, so hat dasselbe in p' und p_1' beziehlich die Intensitäten, welche der Punkt m in den beiden Bildern haben würde, deren Centra in p und p_1 liegen. Da ferner für jede Form der Beugungsöffnung p und p_1' dieselbe Intensität zeigen, wie die gleich weit vom Centrum m entfernten auf der entgegengesetzten Seite liegenden Punkte p und p_1, so gilt als Regel für die Intensität eines Punktes m, welcher von dem gebeugten Lichte zweier leuchtenden Punkte erhellt wird, Folgendes:

»Man verlege die Mittelpunkte ihrer Bilder nach m; alsdann ist die Summe des Lichtes in den Projektionen der beiden Lichtpunkte, der Intensität des Punktes m gleich«.

Man sieht, daſs sich dies unmittelbar auf den Fall anwenden läſst, daſs die Lichtquelle eine Lichtlinie oder eine Lichtfläche ist. Man hat nämlich nur alsdann die Lichtmenge des Raumes zu nehmen, welchen die Projektion der Linie oder der Fläche auf dem Schirme in dem Bilde einnimmt. Demnach läſst sich leicht die Intensität für jeden Punkt des Bildes berechnen. — Man gewinnt eine Vorstellung von dem resultirenden Bilde, wenn man die Zeichnung *der Projektion des* leuchtenden Objekts auf die

Zeichnung des einfachen Bildes legt, und auf dem letztern in denjenigen Richtungen verschiebt, in denen man den Gang der Intensität erforschen will. Die Lichtmasse auf dem bedeckten Raume ist jedesmal die Intensität desjenigen Punktes, welcher gegen die in der Wirklichkeit eine unveränderliche Lage behaltende Projektion der Lichtfläche (oder Lichtlinie) dieselbe Lage hat, wie das Centrum des gezeichneten einfachen Bildes. — Man sieht im Voraus, dafs bei einer nur mäfsig ausgedehnten Lichtfläche im homogenen Lichte das Gesammtbild weder von dunklen Linien durchschnitten, noch ganz dunkle Stellen in sich enthalten könne, dafs vielmehr in dem Gemälde nur ein Zu- und Abnehmen des Lichtes bemerkbar wird.

Betrachten wir beispielsweise das Beugungsbild eines einfachen Gitters, dessen Oeffnungen vertikal stehen mögen. Kommt das Licht von vertikal über einander liegenden Punkten, so findet in den Horizontalrichtungen sämmtlicher Einzelbilder ein gleiches Intensitätsverhältnifs statt; ist das leuchtende Objekt daher eine Vertikallinie, und sind dabei die Oeffnungen sehr hoch, so dafs die Einzelbilder sich auf schmale Streifen reduciren: so dehnt sich jeder Lichtpunkt in der Horizontalrichtung eines Einzelbildes zu einem Vertikalstreifen, einer Franse, aus, und das Totalbild erscheint als ein langgezogenes Einzelbild, mit welchem es in horizontaler Richtung genau gleiches Intensitätsverhältnifs hat.

Für zwei in einer horizontalen Linie liegende gleich helle Lichtpunkte läfst sich leicht die Erscheinung construiren. Man zeichne über die Projektion p (Fig. 32) des ersten Lichtpunktes auf der Horizontallinie MN eine Curve ABC so, dafs die Ordinaten den Intensitäten seines Bildes in der Horizontalrichtung proportional sind, und in p die Ordinate sich befindet, welche der Mitte des Bildes angehört. Alsdann zeichne man unter MN die nämliche Curve DEF, so dafs die zur Mitte des Bildes gehörige Ordinate unter p_1, der Projektion des zweiten Lichtpunktes, zu liegen kommt. Diese Curve stellt die Intensität im

Bilde dieses zweiten Lichtpunktes vor. Beschreibt man nun über *MN* eine dritte Curve, deren Ordinaten der Summe derer der beiden ersten gleich sind, so repräsentirt dieselbe den Intensitätsgang des Totalbildes in der Horizontalrichtung. Man sieht, dafs nur da dunkle Punkte sich befinden, wo *MN* von den beiden Grundcurven gleichzeitig berührt wird. Die Länge pp_1 ist die scheinbare Entfernung der beiden Lichtpunkte.

Es ist klar, dafs man ebenso verfahren mufs, wenn das Licht, statt von zwei Lichtpunkten, von zwei ebenso weit von einander entfernten Vertikallinien ausgeht, wenn nur von diesen keine die andere an einem Ende überragt. Die Intensitätscurve in der Horizontalrichtung ist dieselbe wie vorher, und nur die Ausdehnung zu vertikalen Lichtfransen unterscheidet beide Bilderarten.

Den Abstand pp_1 kann man dadurch finden, dafs man die eine Lichtlinie nach oben, die andere nach unten hin verlängert, und den Abstand der nun sichtbaren Mitten der beiden Bilder mit der Breite eines Seitenspektrums vergleicht. — Je näher die Lichtlinien einander sind, desto mehr fällt das Bild mit dem einer einzigen Lichtlinie zusammen.

Zwei sich schneidende Lichtlinien geben bei einer einzigen beugenden Oeffnung ein Bild, welches dem Fig. 33 dargestellten ähnlich ist.

Für eine horizontale Lichtlinie, deren Projektion op_1 (Fig. 32) ist, erhält man dem Vorigen gemäfs die Intensität, wenn man die Intensitätscurve *ABC* längs der Linie *MN* bei unverrückter Lage der Ordinaten verschiebt. Die Summe der Ordinaten zwischen *om* und p_1n (also die Fläche der Curve zwischen diesen Ordinaten) ist die jedesmalige Intensität desjenigen Punktes, welcher um po' von der Projektion *o* absteht.

Bei einer vertikalen rechteckigen Lichtfläche kann man ebenso verfahren, da sich dieselbe dadurch entstanden denken läfst, dafs jeder Punkt der horizontalen Lichtlinie in eine *Vertikallinie übergeht*. Verfolgt man die Construction

weiter, so findet sich, dafs bei einer solchen Lichtfläche die Stellen der geringsten Helligkeit den Rändern der Lichtfläche näher liegen, als bei einer Lichtlinie.

Ist die Lichtfläche nach der einen Seite unendlich breit, liegt also p_1 unendlich weit von o, so wird die Intensität des um po von o entfernten Punktes der Fläche $NomC$, also der halben Curvenfläche gleich, wenn $op = 0$ ist, d. h. am Rande der Lichtfläche. Für die Punkte, welche sich in die Projektion der Lichtfläche hineinbiegen (also wenn p sehr weit rechts von o liegt), wird die Intensität doppelt so grofs, nämlich der ganzen Curvenfläche gleich. Ferner übertrifft ein Punkt rechts vom Rande der Lichtfläche o die Helligkeit am Rande o um ebenso viel, als ein ebenso weit von o nach links stehender Punkt an Helligkeit vom Rande übertroffen wird. Bei einer grofsen Lichtfläche giebt es mithin keine Minima der Helligkeit, sondern das Licht nimmt in der Horizontalrichtung stufenweis ab, und zwar symmetrisch auf beiden Seiten der Ränder.

Ist die beugende Oeffnung nicht geradlinig vertikal, sondern kreisförmig, so sieht man sogleich, dafs nur dann Maxima und Minima entstehen können, wenn das leuchtende Objekt eine kurze Linie oder eine kleine Fläche ist, indem nur unter dieser Bedingung die Projektion des Objektes auf dem Kreisbilde Räume deckt, welche eines stärkeren Intensitätswechsels fähig sind. Bei einer Lichtlinie bezieht sich das Fehlen der Minima natürlich nur auf die Richtung dieser Linie.

Ist das Lichtobjekt eine horizontale Linie, sie mag kurz oder lang sein, so erscheinen noch, wie man leicht übersieht, in der Vertikalrichtung Minima und Maxima. Die Rechnung lehrt übereinstimmend mit der Erfahrung, dafs das erste Minimum 210° von der Axe entfernt liegt.

Analog wie bei einem beugenden Gitter, liegen die Minima bei einer schmalen Lichtfläche den Rändern der Lichtfläche näher als bei einer Lichtlinie.

Ist die Lichtfläche eine gröfsere Scheibe, wie die der Sonne oder des Mondes, so verhält sich die Lichtabnahme

in der Nähe des Randes fast ebenso wie am Rande einer ähnlich grofsen viereckigen Lichtfläche.

Wenn aufserhalb des Randes einer solchen Lichtscheibe die Erleuchtung sich bis auf 220° erstreckt, so ist die Vergröfserung der Lichtscheibe $arc\left(sin = \frac{220}{180}\cdot\frac{l}{d}\right)$, wenn d der Durchmesser der beugenden Kreisöffnung ist. Bei einer Oeffnung von 1 pariser Zoll ist diese Vergröfserung im weifsen Sonnenlicht 10″,6, bei einer Oeffnung von 10 pariser Zoll 1″,06.

Zur Darstellung der Beugungserscheinungen ist ein verfinstertes Zimmer nicht durchaus nöthig. Als leuchtendes Objekt gebraucht man, namentlich wenn man recht intensives direktes Licht haben will, um auch die lichtschwächeren Stellen noch deutlich zu erkennen, das durch einen feinen Nadelstich oder einen feinen Spalt eines Schirms dringende Licht der Sonne, je nachdem man einen Lichtpunkt oder eine Lichtlinie benutzen will.

Ein sehr bequemes Objekt, dessen sich Schwerd meist zu seinen Versuchen bediente, ist das kleine Bild der Sonne, welches man auf einem der Sonne ausgesetzten Taschenuhrglase bemerkt, dessen hohle Seite mit einer dicken Auflösung von Asphalt bestrichen ist — wenn ein Lichtpunkt erfordert wird; und eine innen geschwärzte dem Sonnenlicht ausgesetzte Glasröhre — wenn eine Lichtlinie erfordert wird. Bedarf man einer gröfsern Intensität, so kann man sich des Sonnenbildes eines kleinen erhabenen Metallspiegels bedienen.

Den mit den beugenden Oeffnungen versehenen Schirm hält man entweder unmittelbar dicht vor das Auge, und bringt das Lichtobjekt in die Entfernung des deutlichen Sehens; oder man sieht durch ein Fernrohr, befestigt den beugenden Schirm dicht vor das Objektiv (d. h. vor das Glas, welches dem Objekt zugekehrt ist), und stellt das Lichtobjekt in eine solche Entfernung, dafs man es deutlich durch das Fernrohr erkennt.

Die Anwendung des Fernrohrs hat 1) den Vortheil,

dafs man das Bild vergröfsert erblickt, die Entfernungen dadurch mefsbarer werden, und dafs das Instrument leicht mit einem Mefsapparat verbunden werden kann. 2) dafs die beugenden Oeffnungen um sehr Vieles gröfser genommen werden können, als bei unbewaffnetem Auge. Die gröfseren Oeffnungen lassen sich sowohl leichter darstellen, als sie weit mehr Licht gewähren.

Als beugender Schirm reicht meist ein Blättchen Stanniol hin, welches man auf ein Glasplättchen kleben kann. Für ein unbewaffnetes Auge giebt ein feiner Nadelstich eine Kreisöffnung, ein Schnitt mit der Spitze eines scharfen Federmessers einen Spalt; zwei über einander gelegte Stanniolblättchen, die mit Spaltöffnungen versehen sind, geben Parallelogramme. Zur Erzeugung einer dreieckigen Oeffnung legt man drei Stanniolblättchen so über einander, dafs ihre Ränder nur eine sehr kleine Oeffnung bilden. Will man die unsymmetrischen Spektra sehen, welche ein Spalt giebt, auf den das Licht schief auffällt, so schliefst man die beiden Seiten eines kurzen Rohrs oder eines Ringes zur Hälfte mit Stanniol, so dafs die Ränder der Blättchen parallel werden. Durch Neigung des Rohres kann man dem Spalt zugleich jede mögliche Breite geben. Die Mittel, sich feinere Gitter zu verschaffen, sind schon oben Seite 25 angegeben worden.

Wendet man ein gutes Fernrohr an, so kann man z. B. einen Spalt eine Linie, ja selbst einige Zolle breit nehmen. Durch einen einfachen Spalt sieht man 12—15 Spektra auf jeder Seite, wenn man homogenes Licht anwendet, wozu man am bequemsten das Licht erst durch ein rothes Glas gehen läfst. Mittelst eines Fernrohrs lassen sich durch ein Drahtgitter, welches 90 Oeffnungen auf einen Zoll enthält, schon einige der Fraunhoferschen dunklen Linien wahrnehmen; durch ein Gitter, welches 500—800 Oeffnungen auf einen Zoll enthält, läfst sich die zwischen *E* und *F* liegende Linie, welche Fraunhofer *b* nannte, in drei Linien aufgelöst erkennen. Schwerd sah selbst mit blofsen Augen durch ein Glasgitter, welches

1500 Linien auf einer Breite von 5 Millimeter zählte, mehrere jener Linien, namentlich die Linien *D* und *E*.

Modificationen der Beugungs-Erscheinungen durch das Hinzutreten anderer durchsichtigen Mittel.

Läfst man das Licht vor oder nach dem Eintritt in die Oeffnungen des beugenden Schirms durch eine einfach oder doppelt brechende Substanz, welche von parallelen Ebenen begrenzt ist, gehen, so hat dies auf die Beugungs-Erscheinungen gar keinen Einflufs, da sowohl alle gewöhnliche als ungewöhnliche Strahlen unter sich um gleich viel verzögert oder beschleunigt werden, indem diese Strahlen durch die Brechung ihre parallele Lage behalten, und mit gemeinsamer Geschwindigkeit gleiche Wegesstrecken durchlaufen. Die Gangverschiedenheiten zwischen den gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen haben auf die Interferenz keinen Einflufs, da sie wegen ihrer auf einander senkrechten Polarisation nicht auf einander wirken. Die gewöhnlichen und die ungewöhnlichen Strahlen geben zwar jede ihr eigenes Bild, allein beide Bilder decken sich, weil die relativen Gangverschiedenheiten in beiden Bildern unabhängig von dem Krystall, also dieselben sind.

Geht aber nur das durch einige der Oeffnungen dringende Licht durch ein fremdes Mittel, so werden die Gangverschiedenheiten des Lichtes dieser letzten Oeffnungen gegen das der freien Oeffnungen geändert, und es treten Modificationen ein. Aehnliches geschieht, wenn die verschiedenen Oeffnungen durch Plättchen verschiedener Substanzen, oder durch ungleich dicke Plättchen derselben Substanz, oder durch gleich dicke krystallinische Plättchen von verschiedener Axenlage bedeckt werden.

Betrachten wir den einfachsten Fall, nämlich den eines einfachen Gitters mit zwei Oeffnungen, welche wir vertikal stehend denken wollen.

1) Die eine Oeffnung werde durch ein unkrystallinisches Täfelchen *(z. B. Glas)* bedeckt.

Da das Licht sich in dem Glase langsamer als in der Luft fortpflanzt, so wird dasselbe beim Austritt aus demselben irgend eine gebrochene oder ganze Anzahl n Wellenlängen zurück sein in Bezug auf den Gang des Lichtes, wenn kein Glasplättchen vorhanden wäre. In der Mitte des Normalbildes (so mag das Beugungs-Bild heifsen, welches durch die unbedeckten Oeffnungen entstehen würde) sind nun die Wege der durch die beiden Oeffnungen dringenden Lichtbündel nicht mehr gleich, sondern sie weichen um n Wellenlängen von einander ab; es kann also dort nicht der Ort der gröfsten Helligkeit des wahren Bildes (d. h. die Mitte des letzteren) sein; es kann vielmehr dort völlige Dunkelheit herrschen, wenn n eine ungerade Anzahl Halbe ist. In jedem andern Punkte des Normalbildes, wo der Gangunterschied beider Strahlenbündel x Wellenlängen ist, wird jetzt derselbe nur noch $x-n$ Wellenlängen sein. Die gröfste Helligkeit, also die Mitte des neuen Bildes, wird da sein, wo $x=n$ ist. Ist das Glas nicht ungemein dünn, so ist n so grofs, dafs der Punkt des Normalbildes, wo $x=n$ ist, ganz aufserhalb des noch sichtbaren Bildtheils liegt, und es wird zwischen beiden Lichtbündeln gar keine bemerkbare Interferenz mehr stattfinden. Ist aber die Glastafel sehr dünn, oder bedeckt man beide Oeffnungen mit Glastäfelchen, die sich an Dicke sehr wenig unterscheiden, oder bedeckt man beide Oeffnungen mit gleich dicken Täfelchen, neigt aber das eine etwas, um den Weg des Lichtes in demselben etwas zu verlängern, so liegt der Mittelpunkt des wahren Bildes in der Nähe der Mitte des Normalbildes. Ist beispielsweise $n=3$, so liegt die Mitte in dem Mittelpunkt des dritten Spektrums des Normalbildes nach der rechten Seite hin, auf welcher wir die bedeckte Oeffnung denken wollen. Da die Gangunterschiede des wahren Bildes sich von denen des Normalbildes nur um die constante Zahl n der Wellenlängen unterscheiden, so haben beide Bilder dieselbe Form, und das erste ist nur um die Breite dreier Spektra nach rechts hin verschoben.

Dieser Umstand ist von Arago und Fresnel benutzt worden, das Brechungsverhältnifs, namentlich von Gasarten, und dessen Aenderung mit der Temperatur, dem Druck, dem Feuchtigkeitsgrade, zu messen. Mifst man nämlich die Verschiebung des Bildes, so weifs man die Zahl der Wellenlängen, um welche das Licht in dem Mittel, durch welches das Licht vor der ersten Oeffnung ging, gegen das Licht voraus oder zurück ist, welches durch das Mittel vor der zweiten Oeffnung ging. Mifst man nun die Dicke der Schicht beider Mittel, so weifs man die Länge der Wege des Lichtes in ihnen, und hieraus das Verhältnifs der Geschwindigkeiten, mithin das Verhältnifs der Brechungsexponenten. Die Gasarten werden hierbei in Röhrchen gefüllt, welche zu beiden Seiten mit parallelen Glasplatten von derselben Dicke geschlossen sind. Die Genauigkeit wird um so gröfser, je länger man die Röhrchen nimmt.

2) Die Oeffnungen seien durch gleich dicke krystallinische Blättchen bedeckt, z. B. durch Glimmerblättchen, die man, um eine genau gleiche Dicke zu erhalten, aus einem Blättchen schneidet, und zwar mögen diese so gelegt werden, dafs ihre Hauptschnitte sich senkrecht kreuzen. Nennt man nun die in dem rechts liegenden Blättchen gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahlen beziehlich *Ro* und *Re*, und die in dem links liegenden Blättchen gebrochenen *Lo* und *Le*, so interferiren die Bündel *Ro* und *Le* und die Bündel *Re* und *Lo* wegen des Parallelismus ihrer Polarisations-Ebenen. Da aber *Ro* und *Lo* die langsameren sind, so geben die ersten eine Fransengruppe die nach rechts hin, die zweiten eine Fransengruppe die nach links hin verschoben ist, und zwar sind beide Gruppen ungleich viel von der Mitte des Normalbildes verschoben, da *Ro* und *Lo*, so wie *Re* und *Le* durch den Krystall ungleich viel verzögert sind. Dreht man das eine Blättchen in seiner Ebene, so übersieht man sogleich, dafs die seitlichen Fransengruppen allmälig schwächer werden müssen, und dafs das normale Centralbild mit allmälig zunehmender Stärke wieder erscheinen mufs, bis nach einer

Drehung von 90°, wo die Hauptschnitte parallel werden, das Centralbild allein noch, und zwar im Maximum der Stärke vorhanden ist.

Bei sich senkrecht kreuzenden Hauptschnitten kann man nicht eine Interferenz dadurch hervorbringen, dafs man durch einen doppelbrechenden Krystall, dessen Hauptschnitt 45° gegen den Horizont geneigt ist (wenn der eine Hauptschnitt vertikal, der andere horizontal steht), die Strahlen in zwei Gruppen theilt, deren Polarisations-Ebenen um +45° und —45° gegen den Horizont geneigt sind. Denn jede der beiden Gruppen ist zwar parallel polarisirt, und enthält Licht von allen Bündeln *Ro*, *Re*, *Lo*, *Le*, so dafs Gangverschiedenheiten vorhanden sind; allein aus Abschnitt III. erhellt, dafs nur dann verschieden polarisirte Strahlen durch Zurückführung auf dieselbe Polarisations-Ebene zur Interferenz gebracht werden können, wenn das Licht ursprünglich nach derselben Ebene polarisirt war.

Wendet man aber im Azimuth 45° polarisirtes Licht an, so dafs *Ro*, *Re*, *Lo*, *Le* von gleicher Intensität sind, und läfst das Licht nach dem Austritt aus den Blättchen durch ein Stück Kalkspath gehen, welches hinreichend dick ist, um die Bilder merklich getrennt zu zeigen, und welches im Azimuth 45° gehalten wird: so erblickt man eine centrale Fransengruppe, und vier seitliche. Man bezeichne die durch den Kalkspath gewöhnlich gebrochenen Lichtbündel mit *Roo*, *Loo*, *Reo*, *Leo*, die ungewöhnlich gebrochenen mit *Roe*, *Loe*, *Ree*, *Lee*. Jedes der beiden Paare *Roo* und *Loo*, *Reo* und *Leo* hat bei gleicher Lage der Polarisations-Ebenen in den Krystallen gleiche Wege gleich schnell zurückgelegt; jedes Paar bildet mithin eine normale Centralfransengruppe, die sich wegen der Identität ihrer Lage dekken und verstärken. Dagegen *Reo* und *Leo*, welche gleichfalls parallel polarisirt sind, geben wegen ihrer ungleichen Geschwindigkeit in den Blättchen eine zur Rechten liegende Fransengruppe; und aus demselben Grunde geben *Reo* und *Loo* eine zur Linken liegende. Ganz ebenso liefern die ungewöhnlichen Strahlenbündel *Roe*, *Loe*, *Ree*, *Lee* zwei

sich deckende Centralbilder, welche ihrer Lage wegen auch mit den gewöhnlichen Centralbildern zusammenfallen, und zwei seitliche Bilder. Man hat sonach ein Centralbild und 4 Seitenbilder.

B. *Erscheinungen im reflektirten Lichte.*

Beugung des reflektirten Lichtes.

Wenn von einem Lichtpunkte S Strahlen auf eine reflektirende ebene Fläche gesendet werden, so haben die reflektirten Strahlen eine solche Lage, dafs sie rückwärts verlängert sich in einem einzigen Punkt schneiden würden. Sie haben also dieselbe Lage, wie die direkten Strahlen eines Lichtpunktes, welcher in dem Durchschnittspunkt jener Verlängerungen sich befindet. Denkt man die reflektirende Ebene horizontal, so liegt dieser Punkt, den man das Bild von S nennt, mit S in derselben Vertikallinie und zwar ebenso weit unterhalb jener Ebene, als S oberhalb derselben liegt *). Hält man daher einen mit Oeffnungen versehenen Schirm den reflektirten Strahlen entgegen, so werden dieselben gebeugt, und man sieht genau die im Vorigen beschriebenen Erscheinungen. An der Erscheinung wird nichts geändert, wenn man den Schirm, welcher natürlich nicht so beschaffen sein darf, dafs er selber Licht reflektirt, unmittelbar auf die reflektirende Fläche legt. Der Unterschied liegt blofs darin, dafs das Licht erst innerhalb der Oeffnungen reflektirt wird.

Zur Hervorbringung der durch ein reflektirendes Gitter erzeugten Erscheinungen kann man sich einer auf der Rückseite geschwärzten Glastafel bedienen, in welche auf der Vorderseite feine gleich weit abstehende Linien gezogen sind. Noch besser ist es, auf eine mit Gold belegte ebene Glastafel oder ein polirtes Stahlplättchen das Gitter zu radiren. Man nennt solche Gitter **Reflexionsgitter**.

---

*) *Man sehe hierüber* den nächsten Abschnitt.

Die schönsten Erscheinungen dieser Art zeigen die sogenannten Bartonschen Irisknöpfe. Es gelang nämlich Barton, auf polirtem Stahl mit einer Diamantspitze in dem Raume eines Zolles bis 10000 vollkommen gleiche und parallele Furchen zu ziehen (Fraunhofer brachte es sogar bis auf 30000), welche ein höchst feines Reflexionsgitter bilden. Barton wandte diese Stahlplatten, welche nach den verschiedensten Mustern facettirt waren, dazu an, diese Muster auf polirte bronzene Knöpfe und andere Schmucksachen abzudrücken, welche natürlich alsdann gleichfalls sich wie Reflexionsgitter verhielten.

Hierher gehören auch die Farben-Erscheinungen an der Perlmutter. Diese besteht nämlich, mikroskopischen Untersuchungen zufolge, aus sehr feinen über einander gelegten Lamellen, welche auf der Oberfläche polirter Flächen sich als wellenförmige höchst feine Furchen zeigen, die sich genau wie die künstlichen Furchen der Irisknöpfe verhalten. Anderen weichen Körpern, wie feinem Siegellack, arabischem Gummi, Hausenblase, Wachs, Leim, ja selbst Zinn und Blei läfst sich die Struktur der Oberfläche der Perlmutter, und mit ihr die lichtbeugende Eigenschaft durch Aufdrücken mittheilen.

Interferenz des reflektirten Lichtes mit dem direkten.

Die bisher betrachteten Phänomene haben in der gegenseitigen Einwirkung der Elementarwellen eines Wellensystems ihren Grund; die Interferenz des Lichtes wird aber nicht durch den beugenden Schirm oder das reflektirende Gitter hervorgebracht; sie ist schon im direkten und reflektirten Lichte vorhanden. Jedes schwingende Aethertheilchen ist in einer Bewegung, welche aus allen Bewegungen zusammengesetzt ist, die ihm von den vor ihm erschütterten Aethertheilchen mitgetheilt wird. Es gehen also nach jedem Punkt eines Wellensystems eine unzählige Menge Strahlen (Mittheilungsrichtungen) von den vorher erschütterten Punkten aus. Das Zusammensetzen der elementaren Einzelbe-

wegungen ist eben Interferenz. Aber die Wirkung ist in allen Punkten einer und derselben Wellenfläche dieselbe, sobald keine der Elementar-Bewegungen gehemmt wird. Werden durch Schirme einzelne Elementarstrahlen zurückgehalten, so hört die Gleichmäfsigkeit in den Wirkungen auf und die Intensität wird periodisch oder wenigstens ungleich in dem hierdurch entstehenden Beugungsbilde.

Umgekehrt läfst sich eine ähnliche Wirkung hervorbringen, wenn man die Zahl der nach einem Punkt hingehenden Elementarstrahlen vermehrt statt vermindert, oder mit andern Worten, wenn man in einem Wellensysteme die Bewegungen eines Theiles durch Reflexion oder Brechung lenkt, und sie einem andern (direkten oder reflektirten) Theile des Wellensystems zuwendet.

Der einfachste Fall, der sich zugleich am nächsten an das Vorhergehende anschliefst, ist die Interferenz des direkten Lichtes mit dem reflektirten. Man leitet hierzu das Licht eines Lichtpunktes oder einer Lichtlinie (S) auf eine reflektirende Fläche (einen Spiegel) unter einem Winkel von nahe 90^0, damit die reflektirten Strahlen mit den direkten nahe dieselbe Richtung haben. Das Bild des leuchtenden Objekts im Spiegel, S_1, läfst sich als das Centrum des reflektirten Wellensystems betrachten, und man hat daher nur die Interferenz zweier Wellensysteme zu betrachten, deren Mittelpunkte S und S_1 zwar dem Raume nach von einander geschieden sind, die aber einem und demselben (von S ausgehenden) Wellensystem ihren Ursprung verdanken.

Ist der Spiegel AB (Fig. 34), welcher eine auf der Rückseite geschwärzte Glastafel sein mag, horizontal, S eine horizontale, auf der Ebene der Figur senkrechte Linie, S_1 deren Bild, und PB ein Schirm, welcher das interferirte Licht auffängt, so zeigen sich auf dem letzteren Fransen, welche der Lichtlinie S parallel sind. Die Breite derselben findet man folgendermafsen:

Ist P irgend ein Punkt des Bildes, $PB = x$, $BC = a$, $SC = e$, so ist die Länge des direkten Strahls

$$SP^2 = a^2 + (e-x)^2,$$

oder genähert, insofern wegen der Schiefe der Incidenz *SC* sehr klein gegen *PB* ist,

$$SP = a\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{e-x}{a}\right)^2\right],$$

und die Länge des nach der Reflexion von *AB* nach *P* hingelangenden Strahls:

$$Sc + cP = S_1c + cP = \sqrt{a^2+(e+x)^2},$$

oder genähert

$$S_1P = a\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{e+x}{a}\right)^2\right].$$

Der Unterschied der Wege ist daher nahe, wenn man $SBC = \gamma$ setzt,

$$\frac{2e}{a}x = 2tg\gamma . x.$$

Aus der Lage der Fransen folgt ferner nach Lloyds Beobachtungen (wie es auch die Theorie erheischt), daſs die Reflexion an *AB* das Licht um eine halbe Undulation beschleunige (oder vielmehr, daſs die Schwingungsrichtung durch die Reflexion sich umkehre); der Phasenunterschied in *P* ist mithin, wenn wiederum die Wellenlänge durch l, und $\frac{2\pi}{l}$ durch $\varkappa$ bezeichnet wird,

$$\varkappa(2tg\gamma . x - \tfrac{1}{2}),$$

und man erhält für die Intensität des Punktes *P*, wenn man dieselbe durch I^2, die Intensität des direkten Strahls durch A^2 und die des reflektirten durch A'^2 bezeichnet, nach Abschn. I, XXIV.,

$$I^2 = A^2 + A'^2 + 2AA' \cos[\varkappa(2tg\gamma x - \tfrac{1}{2}l)].$$

Die Intensität erreicht daher ihr Maximum $(A+A')^2$, wenn $4tg\gamma.x - l$ einer geraden Anzahl halber Wellenlängen gleich ist, also für $x = \frac{1}{2}(m+1)l.cot\gamma$; ihr Minimum $(A-A')^2$, wenn $4tg\gamma - l$ einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen gleich ist, also für $x = \frac{1}{4}(2m+3)l.cot\gamma$.

Die Entfernungen der hellsten Punkte der Fransen von *B* sind daher den geraden Zahlen, die Entfernungen der *dunkelsten Linien* den ungeraden Zahlen proportional. Die Ent-

Entfernung der dunkelsten Streifen unter sich ist also $\frac{1}{2}l \cot\gamma$, und eben so grofs ist die Entfernung des ersten dunklen Streifens von der hellen Mitte *B*. Aus der Breite der Fransen läfst sich daher die Wellenlänge berechnen. Da bei so schiefen Incidenzen, wie sie nöthig sind, um die reflektirten Strahlen mit den direkten zur Interferenz zu bringen, die Intensitäten der einfallenden Strahlen denen der reflektirten fast gleich sind, so ist die Helligkeit der dunkelsten Streifen $(A-A')^2$ fast der Null gleich, wie es auch in der That durch die Erfahrung bestätigt wird.

Interferenz reflektirter Strahlen unter sich.

Ganz ähnlich ist die Erscheinung, welche entsteht, wenn man den vorigen Versuch so abändert, dafs man an die Stelle des direkten Lichtes das von einem zweiten Spiegel reflektirte Licht desselben Punktes (oder derselben Linie) *S* treten läfst. Die beiden Spiegel müssen unter sich einen Winkel von fast 180° bilden, damit die Strahlen der beiden reflektirten Systeme merklich parallel, und dadurch fähig werden, zu interferiren. Ferner müssen die Spiegel mit ihren Kanten genau an einander passen, weil ein geringes Hervortreten des Randes eines Spiegels vor den des andern schon einen bedeutenden Unterschied in dem Gange der beiden Strahlensysteme hervorbringt. Die beiden Bilder von *S* bilden hier, wie im vorigen Versuch die Punkte *S* und S_1, die Centra der beiden interferirenden Wellensysteme, und es mufs daher ein Fransensystem sich bilden. Fresnel, welcher diesen Versuch zuerst anstellte, benutzte denselben, um aus der Fransenbreite die Wellenlänge zu berechnen.

Es seien *AC* und *BC* (Fig. 35) die beiden Spiegel und *S'* und *S''* die beiden Bilder eines Lichtpunktes *S*. Ferner beschreibe man aus *S'* und *S''* zwei gleiche Systeme von Kreisen, in denen die Radien von Kreis zu Kreis um eine halbe Wellenlänge wachsen. Diese Kreise lassen sich als Durchschnitte von Wellenflächen der beiden Systeme

betrachten. Punktirt man, wie es in der Figur geschehen ist, die Kreisbögen abwechselnd, so befinden sich diejenigen Punkte, in denen sich die punktirten und in denen sich die ausgezogenen Bögen schneiden, in gleichen Phasen und sind daher hellste Punkte in den Fransen; in denjenigen Punkten dagegen, in denen die punktirten Bögen (wie in i) von den unpunktirten geschnitten werden, sind die Phasen entgegengesetzt, d. h. sie unterscheiden sich um eine ungerade Anzahl halber Undulationen; sie entsprechen daher dunklen Punkte der Fransen.

Betrachtet man das Dreieck oei wegen der kurzen flachen Bögen als geradlinig, so ist nahe $oi = \frac{oe}{\sin oie}$. Da oe die halbe Wellenlänge, oi die halbe Fransenbreite, und $\angle eio = \angle S'oS''$ (insofern ihre Schenkel auf einander senkrecht stehen), d. h. gleich der scheinbaren Entfernung der beiden Bilder von S' und S'' von o aus gesehen, ist, so ist die Wellenlänge gleich der Fransenbreite, dividirt durch den Sinus der scheinbaren Entfernung der beiden Bilder. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke eio und $S'oS''$ hat man auch $oe : oi = S'S'' : So$, also $2oe$ oder die Wellenlänge $= \frac{2oiS'S''}{So}$, d. h. gleich der Fransenbreite, multiplicirt mit dem wahren Abstand der Bilder und dividirt durch die Entfernung der Fransen von den Bildern.

Genau dieselbe Erscheinung erhält man, wenn man das Licht, statt es von zwei Spiegeln reflektiren zu lassen, von den zwei Seitenflächen eines sehr stumpfwinkligen gleichseitigen Prismas brechen läfst. Wegen der sehr stumpfen Neigung der Seitenflächen werden diese der Grundfläche des Prismas nahe parallel, und demnach treten auch die Lichtstrahlen aus der letztern nahe parallel den Einfallsstrahlen wieder heraus und sind daher fähig zu interferiren.

Interferenz zerstreuten Lichtes.

Hierher gehört auch der Newtonsche Versuch, in welchem das an der Hinterfläche eines sphärischen Spiegels reflektirte Licht, welches zum Theil vor, zum Theil nach der Reflexion durch die Brechung an der Vorderfläche zerstreut worden ist, zur Interferenz kommt. Läſst man nämlich durch eine in einem weiſsem Schirm befindliche kleine kreisförmige Oeffnung auf die Mitte eines sphärischen hohlen Glasspiegels, dessen erhabene Rückseite belegt ist, einen Lichtbündel fallen, so erblickt man auf dem Schirm rings um die Oeffnung Farbenringe, wenn dieselbe im Mittelpunkt der Spiegelkrümmung liegt. Die Farben werden schwächer mit der Entfernung des Schirms aus dieser Lage und verschwinden endlich ganz.

Die Herschelsche Erklärung, welche zu numerischen Resultaten führt, die mit den Messungen stimmen, ist folgende:

Da selbst der vollkommenste Spiegel nicht frei von kleinen Unebenheiten, d. h. nicht vollkommen glatt ist, so wird nicht alles Licht nach derselben Richtung reflektirt. Die kleinen nach allen Richtungen gewendeten Unebenheiten bewirken, daſs kleine Lichtportionen von einer und derselben (unebenen) Stelle aus nach unzählig vielen Richtungen hin reflektirt werden. Man nennt dieses Licht unregelmäſsig reflektirtes oder zerstreutes Licht. Je gröſser und zahlreicher die Unebenheiten sind, desto gröſser werden die zerstreuten Lichtportionen, die Durchsichtigkeit nimmt ab, und da die unebenen Stellen Licht nach fast allen Richtungen hin senden, so verhalten sie sich wie leuchtende Punkte, und werden mithin sichtbar. Ein vollkommen glatter und vollkommen durchsichtiger Körper würde vollkommen unsichtbar sein. — Eine gleiche Lichtzerstreuung findet im gebrochenen Lichte statt, und die nach allen Richtungen hin liegenden Seiten der unebenen Stellen bewirken daher eine Brechung nach ebenso vielen Richtungen. Von dem regelmäſsig gebrochenen Hauptstrahl trennen sich daher eine Menge schwacher Strahlen zerstreuten

Lichtes. Ist nun (Fig. 36) *Aa* die Vorderfläche, *Bb* die Hinterfläche des Spiegels, *CP* der auffangende Schirm und in *C* die Oeffnung, so wird der Strahl *CA* in *A* gebrochen und zwar zum Theil regelmäſsig (nach *B* hin), zum Theil unregelmäſsig nach allen Richtungen hin. Der erste Theil wird in *B* wiederum nach *A* hin reflektirt und in *A* regelmäſsig nach *C* hin, und unregelmäſsig nach allen Richtungen hin gebrochen. Dieses letzte zerstreute Licht ist es, welches mit demjenigen Lichtantheile interferirt, das nach der unregelmäſsigen Brechung in *A* von *Bb* regelmäſsig reflektirt und von *Aa* regelmäſsig gebrochen wird.

Der Punkt *A* verhält sich, da er nach allen Richtungen (unregelmäſsig gebrochene) Strahlen sendet, wie ein Lichtpunkt, und es entsteht daher in der spiegelnden Fläche *Bb* ein Bild desselben, etwa in *g*, so daſs derjenige Strahl, welcher die Richtung *Ad* hat, nach der Reflexion in *d* eine solche Richtung *dc* annimmt, daſs *g* in der Verlängerung von *dc* liegt. Nach der regelmäſsigen Brechung in *c* ändert der Strahl von Neuem seine Richtung, so daſs er etwa nach *P* geht, und seine Verlängerung die Axe *BC* des Spiegels etwa in *f* trifft. Eine Folge der sphärischen Krümmung des Spiegels ist, daſs die Verlängerungen sämmtlicher Strahlen, welche von *A* wie von einem Lichtpunkt ausgehen, an *Bb* reflektirt und in *Aa* gebrochen werden, sich in demselben Punkt *f* schneiden. Der Punkt *f* verhält sich daher wie ein leuchtender Punkt, und stellt ein Bild des Punktes *A* vor.

Dieses Bild *f* ist also der Mittelpunkt des einen der interferirenden Wellensysteme, und der Punkt *A*, in welchem das Licht beim Rücktritt nach allen Richtungen hin (unregelmäſsig) gebrochen wird, der Mittelpunkt des anderen.

Die Intensität irgend eines Punktes *P* würde daher die Folge der Interferenz der beiden Strahlen *fP* und *AP* sein, und von dem Gangunterschiede derselben, den wir δ nennen wollen, und welcher gleich $fA + AP - fP$ ist, abhängen. Da sämmtliche Strahlen rings um *C* dieselbe Lage haben, so müssen die Punkte, in denen die Gangunter-

schiede, also auch die Intensitäten einander gleich sind, in concentrischen Kreisen liegen, deren Mittelpunkt C ist. Der Ort der dunkelsten Kreise, welche einem Gangunterschiede von einer geraden Zahl halber Wellenlängen entspricht, ist daher bestimmt durch $\delta = \frac{2m+1}{2} l$; der Ort der hellsten Kreise durch $\delta = ml$. Bezeichnet man fA durch a, AC durch r, und CP durch y, so hat man

$$\delta = a + \sqrt{r^2 + y^2} - \sqrt{(a+r)^2 + y^2} = \frac{2m+1}{2} l,$$

mithin

$$y = \sqrt{2m+1} \sqrt{\frac{l}{a} . r(a+r)}.$$

Die Durchmesser der dunklen Ringe verhalten sich sonach wie die Quadratwurzeln aus den Wellenlängen.

Ist r sehr grofs gegen die Dicke des Spiegels, also auch gegen a, so wird nahe $y = r\sqrt{2a+1} \sqrt{\frac{l}{a}}$; die Durchmesser der Ringe wachsen daher alsdann der Entfernung der Oeffnung proportional.

Die Rechnung giebt $a = \frac{2dr}{2d - n(r+d)}$, wo d die Dicke des Spiegels und n dessen Brechungsverhältnifs bedeutet, oder für eine geringe Dicke: $a = \frac{2d}{n}$. Die Quadrate der Ringdurchmesser verhalten sich daher noch umgekehrt wie die Spiegeldicke. Wendet man dies auf den Versuch Newton's an, in welchem $r = 72$ Zoll und $d = \frac{1}{4}$ Zoll war, setzt $n = \frac{3}{2}$, $l = \frac{2}{90000}$ (ungefähr die Wellenlänge des gelben Lichtes), so liefert dies für die Mitte des zweiten Ringes 2,35, welches sehr nahe mit der Newtonschen Angabe, 2,375, stimmt.

Neigt man den Spiegel, so dafs die Strahlen schief auf denselben fallen, so tritt der Mittelpunkt der Ringe dahin, wo der durch den Einfallspunkt gehende Durchmesser des Spiegels den *Schirm trifft*, also in die Mitte zwischen der *Oeffnung (dem Ausgangspunkte* des Lichtes) und demjenigen

Punkte, nach welchem die regelmäfsig reflektirten Strahlen hingehen. Geschieht die Neigung allmälig, so dehnen sich die Ringe nach und nach aus; in der weifsen Centralscheibe bildet sich ein dunkler Fleck, der allmälig aus dem Violett und Indigo ins Blau, Blafsgrüne, Gelbe, Rothe etc. übergeht, also alle Stufen der Newtonschen Scale durchläuft. Ein gleiches Steigen der Farbe findet in den übrigen Ringen statt, so dafs die Zahl derselben immer mehr abnimmt, bis sie gänzlich verschwinden.

Brewster'scher Interferenz-Versuch.

Verwandten Ursprungs mit der eben behandelten Erscheinung ist die von **Brewster** beobachtete, welche man erblickt, wenn man durch zwei vollkommen gleich dicke Glasplatten, die unter einem sehr kleinen Winkel gegen einander geneigt sind, nach einem leuchtenden oder hellerleuchteten Gegenstande von etwa 1^0-2^0 Durchmesser sieht. Aufser dem direkten ungefärbten Bilde erscheinen zu jeder Seite, je nach der gröfsern oder geringern Lichtstärke des Objekts, ein oder mehrere Seitenbilder, von denen aber im letzten Falle die dem Hauptbilde am nächsten die deutlichsten sind; und zwar zeigen sich in denselben Farbenstreifen, welche der Durchschnittlinie der beiden Platten parallel sind.

Das ins Auge kommende Licht besteht bei diesem Versuche nicht nur aus den Strahlen, welche durch die 4 Flächen der beiden Platten gebrochen wurden, sondern auch aus solchen, die vor ihrem Austritt aus der 4ten Fläche eine mehr oder weniger grofse (aber natürlich allemal gerade) Anzahl Reflexionen zwischen den 4 Flächen erlitten haben. Aber nur die parallel austretenden Strahlen constituiren ein Bild; es entstehen daher so viel Bilder, als Gruppen paralleler Strahlen austreten.

Man bemerke hierbei, dafs ein Lichtstrahl, welcher durch eine parallelflächige Glasplatte nach einer geraden Zahl Reflexionen im Innern derselben hindurchgeht, demje-

nigen Strahl parallel ist, welcher in gleicher Richtung ohne Reflexion (also nach zwei Brechungen) herausgetreten ist. Unterscheiden sich daher in dem obigen Versuch austretende Strahlen nur durch innere Reflexionen zwischen den Flächen der ersten oder denen der zweiten Platte, so wirken sie zu einem und demselben Bilde mit, haben aber wegen der Lichtschwächung durch die Reflexionen um so weniger Einfluſs, je gröſser die Zahl der Reflexionen ist.

Die das mittlere Bild constituirenden Hauptstrahlen sind 1) diejenigen, welche an jeder der 4 Flächen nur eine Brechung erlitten haben, 2) diejenigen, welche überdies in der ersten oder in der zweiten Platte noch zweimal reflektirt sind. Da der Wegunterschied beider Gruppen mindestens die doppelte Dicke der Platten ist, so muſs die Wirkung der Interferenz unmerklich sein, das Bild also weiſs erscheinen. Das erste Paar Seitenbilder ist hauptsächlich zusammengesetzt aus den Strahlen, welche 2 Reflexionen erlitten haben, deren eine an einer Fläche der ersten Platte, die andere an einer Fläche der zweiten Platte stattgefunden hat, mithin aus 4 Gruppen, nämlich wo die Reflexionen erfolgten 1) an der dritten und ersten, 2) an der dritten und zweiten, 3) an der vierten und ersten, 4) an der vierten und zweiten Fläche. Die Gangverschiedenheit beträgt bei der zweiten Gruppe etwa die doppelte, bei der dritten Gruppe etwa die 4fache Glasdicke, verglichen mit der ersten und vierten Gruppe. Nur die letzten beiden unterscheiden sich im Gange durch die kleinen Verschiedenheiten im Wege zwischen den beiden Platten, und bringen demnach eine merkliche Interferenz hervor. Ein Blick auf die von selbst verständliche Fig. 37 wird das Gesagte klar machen. Diese Figur zeigt auch, daſs die Wegunterschiede um so gröſser werden, je schiefer die Strahlen auffallen und je gröſser der Winkel zwischen beiden Platten ist, so daſs die Farbenstreifen in diesen Fällen enger werden müssen. Ferner sieht man, daſs die Wegunterschiede zwischen beiden Platten am gröſsten werden für die Strahlen, welche in einer Ebene auffallen, die senkrecht steht auf der

Durchschnittslinie beider Platten; dafs gar kein Unterschied stattfindet, wenn jene Ebene dieser Durchschnittslinie parallel ist, und dafs demnach die Streifen dieser letzten Linie parallel sein müssen.

Die Newtonschen Ringe.

An die eben betrachtete Erscheinung schliefst sich die Erscheinung der Newtonschen Ringe. So nennt man nämlich die Ringe, welche man um die Berührungsstelle zweier sphärisch gekrümmten Flächen erblickt, durch die zwei Mittel, von denen wenigstens das eine durchsichtig sein mufs, von einem zwischen den Flächen befindlichen dritten durchsichtigen Mittel getrennt werden. Sollen die Ringe deutlich sein, so müssen die Krümmungen beider nahe einander gleich sein, in der Art, dafs in der Nähe der Berührungsstelle die Flächen nur sehr wenig von einander entfernt sind.

Gewöhnlich legt man zur Erzeugung der Ringe zwei Glaslinsen auf einander, die so beschaffen sind, dafs von den berührenden Glasflächen die eine eben ist, und die andere einen sehr grofsen Krümmungshalbmesser hat, oder so, dafs eine der berührenden Flächen convex und die andere concav ist, und dabei die beiden Krümmungshalbmesser nahe gleich grofs sind. Das zwischen den ringerzeugenden Flächen liegende Mittel ist dann Luft, und die getrennten Mittel Glas.

Diejenige Fläche, welche der Lichtquelle zugekehrt ist (d. h. die Unterfläche der oberen Linse, wenn das Licht von oben einfällt), wollen wir die obere, die andere (d. h. die obere Fläche der untern Linse) die untere nennen, und die drei Mittel, welche das Licht nach einander zu durchwandern hat, mögen beziehlich das erste, zweite und dritte Mittel heifsen.

Fällt nun ein Lichtstrahl auf die obere Fläche, so wird derselbe zum Theil reflektirt, zum Theil gebrochen; von dem gebrochenen Theil wird wiederum ein Theil an der unteren Fläche reflektirt, der andere gebrochen; der

erste dieser Theile leidet an der obern Fläche von Neuem eine Reflexion und eine Brechung u. s. w.

Befindet sich daher das Auge auf der Seite der Lichtquelle, so empfängt dasselbe nicht bloſs den von der oberen Fläche, sondern auch den von der unteren Fläche reflektirten Theil, so wie diejenigen Theile, welche zwischen beiden Flächen 3, 5, 7 .... partielle Reflexionen erlitten haben.

Diese Lichtportionen sind fähig zu interferiren, weil sie erstens nahe parallel austreten, insofern die reflektirenden Flächen nahe parallel sind, zweitens, weil die Gangunterschiede nur durch die 3, 5, 7 .... malige Durchwanderung der sehr geringen Strecke zwischen beiden Flächen veranlaſst werden. Da überdies das Licht durch wiederholte Reflexionen sehr geschwächt wird, so haben die 3- und mehrmal reflektirten Strahlen wenig Einfluſs, und man hat nur hauptsächlich auf den an der obern Fläche und auf den an der unteren Fläche reflektirten Strahlentheil Rücksicht zu nehmen.

Ist die Lichtquelle nicht sehr nahe, sind die Einfallsstrahlen also fast parallel, so haben alle diejenigen Strahlen, welche gleichweit vom Berührungspunkt auffallen, gleiche Wege zwischen den Flächen zu durchlaufen, und liefern daher reflektirte Strahlenpaare von gleichen Phasenunterschieden. Da nun die Helligkeit jedes Punktes nur von dem Phasenunterschiede abhängt, so müssen die gleich hellen Punkte in Kreisen liegen, deren gemeinsamer Mittelpunkt im Berührungspunkte liegt.

Ist das Licht homogen, so muſs man eine Reihe von dunklen und hellen Ringen erblicken, da die zwischen den Flächen zurückgelegten Strecken mit der Entfernung vom Berührungspunkt wachsen, also nach und nach durch Punkte hindurchgehen, wo dieselben 1, 2, 3 .... Wellenlängen betragen. Da ferner die Phasenunterschiede um so langsamer wachsen, je gröſser die Wellenlänge ist, so werden die Ringe im blauen Licht enger als im gelben, im gelben enger als *im rothen u. s. w.*

Hinge, der Phasenunterschied nur von dem Unterschied der Wege ab, welchen die interferirenden Strahlen durchlaufen haben, so müfste sich das Licht, welches von den im Berührungspunkt von beiden Flächen reflektirten Strahlen herrührt, verstärken, und die Mitte müfste daher für jede Farbe im Maximum der Helligkeit, im weifsen Licht also weifs sein; allein die Phasen werden durch die Reflexion geändert. Es folgt nämlich aus den Gesetzen der Reflexion, dafs, wenn α der Einfallswinkel und α' der Brechungswinkel ist, die Schwingungsrichtung zugleich von der Differenz $\alpha-\alpha'$ abhängt, also verschieden, und zwar entgegengesetzt ist, je nachdem α gröfser oder kleiner als α' ist, d. h. je nachdem das reflektirende Mittel das Licht stärker oder schwächer bricht, als das Mittel, in welchem die Reflexion geschieht. Ist das einfallende Licht nach der Reflexions-Ebene polarisirt, so ist die Oscillations-Geschwindigkeit im reflektirten Lichte (siehe Abschn. II.) proportional

$$-\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')},$$

sie wechselt also das Zeichen, und mithin ändert sich die Schwingungsrichtung, wenn $\alpha-\alpha'$ das Zeichen wechselt. Da ein solcher Wechsel der Schwingungsrichtung dieselbe Wirkung hat, als ob der eine Strahl gegen den andern um eine halbe Undulation verzögert wird, so sagt man auch wohl »die eine Reflexion verzögere den Strahl«.

Bestehen nun beide Linsen aus derselben Glassorte, so ist, da man die beiden Berührungsflächen in den Einfallspunkten als parallel betrachten kann, α' der Einfallswinkel, und α der Brechungswinkel an der zweiten Fläche, wenn es α und α' an der ersten waren; der obige Ausdruck bekommt daher an der zweiten das entgegengesetzte Zeichen, wie grofs auch α immer sein mag. Durchlaufen nun die beiden reflektirten Strahlen, wie es im Mittelpunkt der Ringe der Fall ist, gleiche Wege, so unterscheiden sie sich durch eine halbe Undulation, und die Mitte ist dunkel und zwar für jede Farbe, also auch im weifsen Lichte.

Ist das einfallende Licht senkrecht gegen die Reflexions-Ebene polarisirt, so ist die Oscillations-Geschwindigkeit proportional

$$\frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')},$$

es tritt also wiederum ein Zeichenwechsel mit der Aenderung des Zeichens von $\alpha-\alpha'$ ein, und die Mitte ist für diesen Fall daher gleichfalls dunkel. Da dieser Ausdruck aber für $\alpha+\alpha'=90^0$, d. h. bei der Reflexion unter dem Polarisationswinkel verschwindet, so verschwinden mit der Reflexion in diesem Fall zugleich die Ringe.

Ist das dritte Mittel von dem ersten Mittel verschieden, und bricht es z. B. das Licht stärker als dieses, so wird der obige Ausdruck für die Reflexion an der zweiten Fläche, wenn α'' der Brechungswinkel an dieser letzteren ist,

$$\frac{tg(\alpha'-\alpha'')}{tg(\alpha'+\alpha'')},$$

und da $tg(\alpha+\alpha')$ sein Zeichen wechselt, wenn $\alpha+\alpha'>90^0$, also der Reflexionswinkel gröfser als der Polarisationswinkel ist, so bekommen die beiden letzten Ausdrücke von $\alpha+\alpha'>90^0$ ab gleiche Zeichen, bis auch $tg(\alpha'+\alpha'')$ sein Zeichen wechselt, d. h. bis $\alpha'+\alpha''>90^0$ wird, d. h. bis die zweite Reflexion unter dem Polarisationswinkel des dritten Mittels geschieht. Die Mitte der Ringe mufs daher weifs sein für die Werthe von α', welche zwischen den Polarisationswinkeln des ersten und dritten Mittels liegen. An den Grenzen, d. h. bei den beiden Polarisationswinkeln, verschwinden die Ringe. Die Ringe mit der weifsen Mitte sind jedoch ungemein schwach, und daher nur unter günstigen Umständen bemerkbar.

Bei demjenigen Einfallswinkel nämlich, bei welchem der erste Ring schwarz erscheint, und welcher durch die Gleichung

$$nn'\cos^2\alpha' = \cos\alpha\cos\alpha''$$

gegeben ist (worin n und n' die Brechungsverhältnisse des ersten und dritten Mittels in Bezug auf das zweite sind), ist die Intensität *der Mitte*

$$\left(\frac{2R}{1-R^2}\right)^2,$$

in welchem Ausdruck R^2 für $\frac{tg^2(\alpha-\alpha')}{tg^2(\alpha+\alpha')}$ steht, und die Intensität des von der ersten Fläche reflektirten Lichtes bedeutet, wenn die des einfallenden zur Einheit genommen wird.

Sind nun die beiden Mittel z. B. Tafelglas und Diamant, für welche ungefähr $n=1{,}53$ und $n'=2{,}45$ ist, und für welche die Polarisationswinkel (α') beziehlich $56^0\ 49'\ 54''$ und $67^0\ 47'\ 48''$ sind, so ergiebt sich für den Fall, dafs der erste Ring schwarz erscheint,

$\alpha=35^0\ 43'\ 57''$, $\alpha'=63^0\ 19'\ 14''$, $\alpha''=21^0\ 23'\ 21''$,

und hieraus für die Intensität der Mitte: 0,02732, während bei demselben Einfallswinkel, wenn das Licht der Einfalls-Ebene parallel polarisirt ist, im ersten Ringe die Intensität 0,66487, also 24 Mal gröfser ist.

Will man daher die Ringe mit weifser Mitte sehen, so mufs alles Licht möglichst entfernt werden, welches nach der Einfalls-Ebene polarisirt ist, weil sonst die Ringe mit schwarzer Mitte vorherrschen würden.

Airy, welcher diese Versuche zuerst anstellte (Poggend. Annal. XXVIII, p. 80), betrachtete daher die Ringe durch einen Turmalin und ein doppelbrechendes Prisma (denn es ist einerlei, ob man das Licht vor oder nach der Reflexion polarisirt), damit das gewöhnlich-gebrochene Licht, welches noch der Absorption im Turmalin entging, durch die neue Doppelbrechung von dem ungewöhnlichen, welches allein benutzt wird, getrennt wurde. Um endlich die störende Reflexion an der oberen Fläche der ersten Linse zu vernichten, nahm er eine, die oben eben war, und stellte auf dieselbe ein unten mit Wasser benetztes stumpfwinkliges Glasprisma, so dafs wegen der nahe gleichen Brechbarkeit des Wassers und Glases der Reflexion möglichst vorgebeugt wurde.

Bei dieser Gelegenheit bemerkte Airy eine auffallende *Eigenthümlichkeit* des Diamanten. Während nämlich beim

Durchgang des Einfallswinkels durch den Polarisationswinkel des Glases die schwarze Mitte plötzlich nach dem Verschwinden unter dem letzteren Winkel in Weiſs übergeht, und die Ringe ihre Gröſse nicht ändern (oder vielmehr, während deren Farben sich in die complementaren umsetzen), geht beim Polarisationswinkel des Diamanten der Uebergang der weiſsen Mitte in die schwarze nur allmälig vor sich. Der erste schwarze Ring zieht sich nämlich zusammen bis er die weiſse Mitte verdrängt hat und dadurch die schwarze Mitte bildet. Er scheint sich demnach in Bezug auf die Reflexion in der Nähe des Polarisationswinkels ähnlich wie die Metalle zu verhalten.

Ein gleicher Vorgang in Bezug auf die allmälige Aenderung der Mitte findet statt, wenn man den Turmalin bei einer Incidenz, welche die weiſse Mitte zeigt, dreht bis die Polarisations-Ebene in der Reflexions-Ebene liegt, in welchem Fall, dem Obigen zufolge, die Ringmitte schwarz sein muſs.

Ist das dritte Mittel ein Metall, so bleibt die Erscheinung in unpolarisirtem Licht, so wie in dem Licht, welches nach der Einfalls-Ebene polarisirt ist, dieselbe wie bei durchsichtigen Mitteln, d. h. die Mitte ist dunkel, obgleich nicht so tief dunkel, weil, wie wir oben (Abschn. II. *D*) gesehen haben, der senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirte Theil des von Metallen reflektirten Lichtes gegen den in jener Ebene polarisirten Theil verzögert wird.

Ist aber das Einfallslicht senkrecht gegen die Reflexions-Ebene polarisirt, und läſst man den Einfallswinkel von 0° an wachsen, so geht die Mitte nach dem Verschwinden der Ringe unter dem Polarisationswinkel des Glases aus dem Dunklen ins Weiſse über, und bleibt alsdann weiſs bis $\alpha = 90°$ wird. Läſst man, während die Mitte weiſs ist, die Polarisations-Ebene sich drehen, so zieht sich der erste schwarze Ring zusammen und verdrängt das Weiſs mehr und mehr, bis nach einer Drehung von 90° die Concentration des daraus sich bildenden schwarzen Centralflecks sein Maximum *erreicht hat.*

Ganz ähnliche Ringe, wie die eben betrachteten im reflektirten Licht erscheinenden, zeigen sich im durchgelassenen Lichte.

Mit dem Strahlentheile, welcher nach der Brechung an der ersten und zweiten Fläche ins Auge gelangt, interferirt hierbei 1) derjenige, welcher, nach dem Durchgange durch die erste Fläche an der zweiten partiell reflektirt, zur ersten zurückkehrt, dort von Neuem reflektirt wird, um alsdann durch die zweite Fläche zum Auge zu gelangen; — 2) diejenigen Strahlentheile, welche vor dem Austritt 4, 6, 8.... Reflexionen zwischen den Flächen erlitten haben.

Die Wegunterschiede sind daher genau dieselben, wie bei den Ringen im reflektirten Lichte; die Phase erleidet hier aber nur dann eine Aenderung, da die interferirenden Strahlen beider Hauptstrahlen sich nur durch die doppelte Reflexion zwischen beiden Flächen unterscheiden, wenn beide Reflexionen entgegengesetzt auf die Schwingungsrichtung wirken. Sind nun das erste und dritte Mittel von gleicher Brechkraft, so sind die Reflexionen genau congruent; die Phasenunterschiede richten sich nur nach den Differenzen der Wege der interferirenden Strahlen, die Mitte wird weifs, und die Farbe der Ringe wird complementar zu den Farben der schwarzmittigen Ringe im reflektirten Lichte. Sind die gedachten beiden Mittel von ungleicher Brechkraft, so findet dasselbe statt, wenn das Licht nach der Einfalls-Ebene polarisirt war; ist dasselbe aber senkrecht darauf polarisirt, so sind die Coefficienten der Schwingungen in den Reflexionen

$$\frac{tg(\alpha'-\alpha)}{tg(\alpha'+\alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{tg(\alpha'-\alpha'')}{tg(\alpha'+\alpha'')}.$$

Diese Ausdrücke bekommen nur ungleiche Zeichen, wenn zugleich $\alpha'+\alpha > 90^0$ und $\alpha'+\alpha'' < 90^0$ ist, d. h. zwischen beiden Polarisationswinkeln, wenn nur α und α'' zugleich gröfser oder kleiner als α' sind, d. h. wenn das zweite Mittel nur das Licht stärker oder schwächer bricht als die beiden anderen.

Hieraus folgt die Regel: dafs die Ringe im durchge-

lassenen Licht unter jeden Umständen complementar gefärbt sind zu den Ringen im reflektirten Lichte.

Was die Durchmesser der Ringe betrifft, so seien Fig. 38 ***GCH*** und ***DCE*** die sich berührenden Flächen, ***AB*** die Tangente am Berührungspunkte beider, $CF = 2r$ der Durchmesser der kleinsten Krümmung, $Cs = \varrho$ der Halbmesser eines Ringes, pqs senkrecht auf ***CB***, also pq die Dicke des zweiten Mittels. Alsdann hat man, den Bogen Cp seiner Kleinheit wegen als geradlinig annehmend, $FC : Cp = Cp : ps$, oder da Cp nahe gleich Cs ist, $ps = \frac{\varrho^2}{2r}$. Ebenso findet man, wenn r_1 den Radius der Krümmung ***DCE*** bedeutet, $qs = \frac{\varrho^2}{2r_1}$, also

$$pq = ps - qs = \tfrac{1}{2}\varrho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Die Quadrate des hellen Ringdurchmessers (ϱ^2) verhalten sich daher wie die Dicke (pq) der Schicht des zweiten Mittels an der Stelle, wo sich die Ringe befinden. Fällt nun das Licht senkrecht ein, so ist diese Dicke zugleich die Hälfte des Weges, welchen der von der unteren Fläche reflektirte Strahl mehr zurückzulegen hat, als der von der oberen Fläche reflektirte; ist also die Mitte dunkel, so ist der nächste dunkle Ring da, wo diese Dicke zwei Viertel Wellenlängen, der zweite dunkle Ring, wo sie vier Viertel Wellenlängen beträgt u. s. w., und da diese Dicken sich wie die Quadrate der Ringdurchmesser verhalten, so nehmen die Ringdurchmesser wie die Quadratwurzeln aus den geraden Zahlen zu. Die Mitte des 1ten, 2ten, 3ten etc. hellsten Ringes dagegen ist da, wo die Dicke $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$ etc. Wellenlängen beträgt, mithin nehmen deren Durchmesser wie die Quadratwurzeln aus den ungeraden Zahlen ab — ein Gesetz, welches schon von Newton aufgefunden worden war.

Bei schiefer Incidenz werden die Ringe breiter, und zwar stellte Newton für diesen Fall das aus seinen Messungen *abgeleitete Gesetz* auf, dafs, wenn d die Dicke ist,

bei welcher unter senkrechter Incidenz eine bestimmte Farbe im weifsen Licht erscheint, dieselbe Farbe bei einer schiefen Incidenz α da erscheine, wo die Dicke d' gleich $d\,sec\,u$ ist, wenn $sin\,u = sin\,\alpha - \frac{1}{107}(sin\,\alpha - sin\,\alpha')$ genommen, und der Versuch mit einer zwischen Glas befindlichen Luftschicht angestellt wird. Und in der That lehrt die Rechnung, dafs z. B. bei schwarzer Mitte die Dicke an den Stellen der dunklen Ringe $\frac{1}{2}ml\,sec\,\alpha'$ ist, wo l die Wellenlänge und m die Stellenzahl des dunklen Ringes ist; es würde demnach $d' = d\,sec.\,\alpha'$ werden, ein Resultat, welches für kleinere Werthe von α' sehr nahe mit dem Newtonschen stimmt, indem dasselbe, wenn man die 4te Potenz von $sin\,\alpha'$ vernachlässigt, auf

$$sec\,u = sec\,\alpha'[1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{108}{107}(n-1)\,tg^2\,\alpha']$$

führt, wo n das Brechungsverhältnifs bedeutet.

Die Abweichung dieses Gesetzes von dem aus der Theorie folgenden, welche für gröfsere Einfallswinkel merklich wird, mit **Herschel** durch die Annahme zu erklären, dafs das Cartesische Gesetz für schiefe Incidenzen in dünnen Schichten nicht mehr gelte, scheint zu gewagt. Der Grund dürfte vielleicht darin liegen, dafs bei der theoretischen Rechnung vorausgesetzt wurde, dafs die Entfernung des Eintrittspunktes der Strahlen in die obere Fläche von ihrem Austrittspunkte so gering ist, dafs in beiden Punkten die Dicke der Zwischenschicht als gleich angenommen werden kann, und dafs die Abweichungen von dieser Gleichheit der Dicke bei schiefer Incidenz einen merklichen Einflufs auf das Resultat ausübt.

Aus dem Ausdruck $\frac{1}{2}ml\,sec\,\alpha'$ geht hervor, dafs die zu verschiedenen Wellenlängen gehörigen Dicken der Wellenlänge proportional sind, und dafs daher im weifsem Licht die Farbenfolge genau die der Newtonschen Scale *) ist.

Fer-

*) Die Farbenfolge in diesen Ringen ist es eben, welcher man den Namen „Newtonsche Scale" gegeben hat, insofern die Entdeckung dieser Ringerscheinungen, und die ihr entnommene Eintheilung der Farben in Farben verschiedener Ordnungen von **Newton** herrührt.

Ferner folgt, da jener Ausdruck der Wellenlänge proportional ist, dafs, wenn man für Luft ein anderes Mittel substituirt, bei einer und derselben Farbe die zu einem bestimmten Ringe gehörige Dicke dem Brechungsverhältnifs umgekehrt proportional ist, die Ringe also um so enger werden, je stärker das zwischenliegende Mittel das Licht bricht.

Nimmt man zu diesen Versuchen statt der oberen sphärischen Linse einen Cylinder, so erhält man, wie es sich von selbst versteht, statt der Farbenringe geradlinige Farbenstreifen, parallel der Berührungslinie, in denen die Farben genau in derselben Ordnung folgen.

Die Ringe zwischen zwei Linsen sind in Absicht auf ihren Ursprung genau dieselben, wie die Ringe oder das Farbenspiel der Seifenblasen. Das erste und dritte Mittel ist hier die Luft, und die Substanz der Blase das zwischen den sphärischen Flächen befindliche Mittel. Da die Blase oben am dünnsten ist, so befindet sich daselbst der Mittelpunkt der Ringe, dessen Farbe dem Schwarz der ersten Ordnung um so näher liegt, je gröfser dort die Dünnheit ist.

Ebendaher schreiben sich die durch eine dünne Oxydhaut bewirkten Farben des polirten Stahls.

Zweite Abtheilung.

Analytische Entwickelung der hauptsächlichsten Interferenz-Erscheinungen.

Zusammensetzung der Schwingungsbewegung mehrerer Wellensysteme.

Will man die Resultante aus den Schwingungsbewegungen einer gröfseren Anzahl Wellensysteme bestimmen, so zerlege man jedes Wellensystem in zwei andere, welche nach derselben Ebene polarisirt sind und im Gange um

$\frac{1}{4}$ Undulation von einander abweichen, und zwar so, dafs die Phasen in allen Paaren respective einander gleich sind. Ist für das $\mathfrak{c}$te der zu zerlegenden Systeme die Oscillationsgeschwindigkeit

$$1)\quad U_\mathfrak{c} = A_\mathfrak{c} \sin(\gamma - \delta_\mathfrak{c}),$$

und sind $u_\mathfrak{c}$ und $v_\mathfrak{c}$ dessen Componenten, so hat man

$$U_\mathfrak{c} = u_\mathfrak{c} + v_\mathfrak{c} = a_\mathfrak{c} \sin\gamma + b_\mathfrak{c} \sin(\gamma - \tfrac{1}{2}\pi),$$

während nach Absch. I. (XXIII, a) $a_\mathfrak{c} = A_\mathfrak{c} \cos\delta_\mathfrak{c}$, $b_\mathfrak{c} = A_\mathfrak{c} \sin\delta_\mathfrak{c}$ ist.

Die Resultante sämmtlicher Systeme wird daher

$$S(U) = S(u) + S(v) = S(a) \sin\gamma + S(b) \sin(\gamma - \tfrac{1}{2}\pi),$$

wo $S(a) = S(A_\mathfrak{c} \cos\delta_\mathfrak{c})$, $S(b) = S(A_\mathfrak{c} \sin\delta_\mathfrak{c})$ ist, und das Summenzeichen auf die verschiedenen Werthe von $\mathfrak{c}$ geht. Setzt man endlich die Systeme $S(u)$ und $S(v)$ zusammen, so erhält man nach Abschn. I. (XXIII—XXV.):

$$S(U) = I \sin(\gamma - \varepsilon),$$

$$2)\quad I^2 = S(a)^2 + S(b)^2, \qquad \operatorname{tang}\varepsilon = \frac{S(b)}{S(a)}.$$

Haben alle Systeme gleiche Intensität, ist also $A_\mathfrak{c}$ constant, und etwa gleich A, so ist überdies

$$3)\quad S(a) = AS(\cos\delta_\mathfrak{c}), \qquad S(b) = AS(\sin\delta_\mathfrak{c}).$$

Bilden zugleich die Phasen $\delta_\mathfrak{c}$ eine arithmetische Reihe, so dafs $\delta_\mathfrak{c} = \delta + (\mathfrak{c} - 1)i$ ist, unter δ einen constanten Werth gedacht, so läfst sich die Summation der Reihen $S(a)$ und $S(b)$ vollziehen nach den Formeln:

$$\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) \ldots + \cos(x+ny) = \frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}y}{\sin\frac{1}{2}y} \cos(x + \tfrac{1}{2}ny),$$

$$\sin x + \sin(x+y) + \sin(x+2y) \ldots + \sin(x+ny) = \frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}y}{\sin\frac{1}{2}y} \sin(x + \tfrac{1}{2}ny).$$

Man erhält nämlich alsdann

$$S(a) = A\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}i}{\sin\frac{1}{2}i} \cos(\delta + \tfrac{1}{2}ni),$$

$$S(b) = A\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}i}{\sin\frac{1}{2}i} \sin(\delta + \tfrac{1}{2}ni),$$

und sonach

$$\text{I.}\quad I = A\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}i}{\sin\frac{1}{2}i}, \qquad tg\,\varepsilon = tg(\delta+\tfrac{1}{2}ni)$$

$$4)\quad S(U) = A\frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}i}{\sin\frac{1}{2}i}\sin(\gamma-\delta-\tfrac{1}{2}ni).$$

Sind die Intensitäten nicht gleich, sondern ist U_c von der Form $U_c = A\sin d_c \sin(\gamma-\delta_c)$, und bilden d_c und δ_c arithmetische Reihen, deren erste Glieder beziehlich d und δ, und deren Differenzen e und i sind, so wird, insofern

$$2\sin d\cos\delta = \sin(\delta+d)-\sin(\delta-d)$$

und $$2\sin d\sin\delta = -\cos(\delta+d)+\cos(\delta-d) \text{ ist,}$$

$$S(a) = S[A\sin d_c\cos\delta_c] = \tfrac{1}{2}A[S(\sin\delta_c+d_c])-S(\sin[\delta_c-d_c])$$

$$S(b) = S[A\sin d_c\sin\delta_c] = \tfrac{1}{2}A[-S(\cos[\delta_c+d_c])+S(\cos[\gamma_c-d_c])].$$

Ist die Zahl der Systeme $m+1$, so erhält man durch die Summation, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{\sin(m+1)\frac{1}{2}(i+e)}{\sin\frac{1}{2}(i+e)} = M_{i+e}, \qquad \frac{\sin(m+1)\frac{1}{2}(i-e)}{\sin\frac{1}{2}(i-e)} = M_{i-e}$$

setzt,

$$5)\quad \begin{cases} S(a) = \tfrac{1}{2}A\{M_{i+e}\sin[\delta+d+\tfrac{1}{2}m(i+e)] \\ \qquad\qquad -M_{i-e}\sin[\delta-d+\tfrac{1}{2}m(i-e)]\} \\ S(b) = \tfrac{1}{2}A\{-M_{i+e}\cos[\delta+d+\tfrac{1}{2}m(i+e)] \\ \qquad\qquad +M_{i-e}\cos[\delta-d+\tfrac{1}{2}m(i-e)]\}. \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad I^2 = (\tfrac{1}{2}A)^2[M^2_{i+e}+M^2_{i-e}-2M_{i+e}M_{i-e}\cos(2d+me)].$$

A. *Die Beugungs-Erscheinungen.*

Beugung durch eine schmale geradlinige Oeffnung.

Es sei BB' (Fig. 39) der horizontale Durchschnitt eines vertikal stehenden Schirms, AA' der Durchschnitt eines in demselben angebrachten vertikalen Spalts, SA, $S'A'$ sei die Richtung der von einem entfernten Lichtpunkte kommenden parallel laufenden Strahlen, Aa der Durchschnitt ihrer Well-Ebene, und $aAA' = \alpha$ der Einfallswinkel. Von den zwischen A und A' befindlichen Punkten gehen Elementarwellen, also nach allen Richtungen hin laufende (Ele-

mentar-) Strahlen aus; As und $A's'$ möge die Richtung derjenigen aus der Oeffnung AA' tretenden (gebeugten) Strahlen sein, deren Intensität untersucht werden soll, und der Winkel zwischen den gebeugten Strahlen und der Normale des Schirms ($\angle AA'b$ oder $\angle A\grave{O}M$, wenn $A'b$ und OM senkrecht auf As stehen), welchen man **Beugungswinkel** nennt, sei gleich α'. Der Winkel zwischen den einfallenden und gebeugten Strahlen ($s'A's_1' = \alpha' - \alpha$) sei θ; ferner sei die Breite des Spaltes $AA' = c$, und $A'O = b$, und das Auge habe eine solche Stellung, daſs die von ihm nach dem Lichtpunkt gezogene gerade Linie den Schirm in O trifft. Der Punkt O heiſse der optische Mittelpunkt. Endlich sei x die Entfernung des Lichtpunktes von O, also $x - b\sin\alpha$ und $x - (b + c)\sin\alpha$ die Entfernungen desselben von A' und A. Um nun die Intensität des unter dem Winkel α' gebeugten Lichtes bei seiner Ankunft in AA zu bestimmen, denke man AA' in $n+1$ gleiche unendlich kleine Theile getheilt, deren Gröſse ∂c sei, so daſs die Entfernungen der Mitte derselben vom Lichtpunkt werden:

$$x - (b + \tfrac{1}{2}\partial c)\sin\alpha, \quad x - (b + \tfrac{1}{2}\partial c + \partial c)\sin\alpha, \ldots .$$
$$x - (b + \tfrac{1}{2}\partial c + n\partial c)\sin\alpha.$$

Bezeichnet man nun die Phase des direkten Lichtes in O durch o, die Oscillationsgeschwindigkeit des $\mathfrak{c}+1$ten Elementarstrahls durch $U_\mathfrak{c}$, $\frac{2\pi}{l}$ durch $\varkappa$, und die Vibrations-Intensität, welche bei allen wegen der fast gleichen Entfernung vom Lichtpunkt dieselbe ist, A_1, so hat man

$$U_\mathfrak{c} = A_1 \sin[o + \varkappa\sin\alpha(b + \tfrac{1}{2}\partial c + \mathfrak{c}\partial c)].$$

Da ferner die Entfernung des $\mathfrak{c}+1$ten Elementarstrahls von MO, $(b + \frac{1}{2}\partial c + \mathfrak{c}\partial c)\sin\alpha'$ ist, so ist die Oscillations-Geschwindigkeit in MO

$$U_\mathfrak{c} = A_1 \sin[o - \varkappa(b + \tfrac{1}{2}\partial c + \mathfrak{c}\partial c)(\sin\alpha' - \sin\alpha)].$$

Da nun die Intensitäten gleich sind, und die Phasen eine arithmetische Reihe bilden, deren erstes Glied, wenn man $\sin\alpha' - \sin\alpha = \varDelta$ setzt, $o - \varkappa b\varDelta$, und deren Differenz $\varkappa\partial c\varDelta$ ist, so erhält man aus (4)

$$S(U) = A_1 \frac{\sin[\frac{1}{2}\varkappa(n+1)\partial c\varDelta]}{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\partial c\varDelta)} \sin[o - \varkappa(b + \tfrac{1}{2}(n+1)\partial c.\varDelta],$$

oder wenn man wegen der Kleinheit des Bogens $\frac{1}{2}\varkappa\delta c\Delta$ diesen statt dessen Sinus setzt, und insofern $(n+1)dc = c$ ist,

$$S(U) = (n+1)A_1 \frac{\sin\frac{1}{2}\varkappa c\Delta}{\frac{1}{2}\varkappa c\Delta} \sin[o - \varkappa(b+\tfrac{1}{2}c)\Delta].$$

Denkt man sich nun die Höhe des Spaltes in $m+1$ sehr kleine Theile getheilt, so hat man für alles durch den Spalt gehende unter dem Winkel α' gebeugte Licht $SS(U) = (m+1)S(U)$, und wenn die Vibrations-Intensität desselben durch I, die Lichtstärke also durch I^2 bezeichnet wird, so hat man

$$I^2 = (m+1)^2(n+1)^2A_1^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\varkappa c\Delta}{\frac{1}{2}\varkappa c\Delta}\right)^2.$$

Das Produkt $(m+1)^2(n+1)^2A_1^2$, welches wir durch A^2 bezeichnen wollen, ist, da man $(m+1)(n+1)$ als den Flächeninhalt der Oeffnung ansehen kann, die Lichtmenge, welche auf die Oeffnung fällt, wenn der Schirm auf den einfallenden Strahlen senkrecht steht, mithin ist $A^2\cos^2\alpha$ die Lichtmenge, welche die Oeffnung empfängt, wenn das Licht unter dem Winkel α auf den Schirm fällt. Es läfst sich demnach die letzte Gleichung schreiben:

$$6)\quad I^2 = (A\cos\alpha)^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\varkappa c\Delta}{\frac{1}{2}\varkappa c\Delta}\right)^2.$$

1) Setzt man $\varkappa c\sin\alpha' = \gamma$ und $\varkappa b\sin\alpha' = \beta$, so hat man für den Fall, dafs der Schirm senkrecht auf die Einfallstrahlen steht,

$$7)\quad I^2 = A^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\frac{1}{2}\gamma}\right)^2.$$

Ist überdies $\alpha' = o$, so ergiebt sich hieraus, da $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\frac{1}{2}\gamma}$ für $\gamma = o$ der Einheit gleich ist, $I^2 = A^2$, d. h. in der Richtung der einfallenden Strahlen ist das gebeugte Licht dem direkten an Stärke gleich.

Will man die Richtungen des Auges, oder, was auf dasselbe heraus kommt, die Winkel α' bestimmen, in denen das Licht verschwindet, also die dunklen Stellen des Bildes der Oeffnung, *welches* man direkt oder auf einem

weifsen Schirm projicirt erblickt, so hat man nur $I = 0$ nach α' aufzulösen. Es wird aber $I = 0$, wenn,

$$\gamma = \varkappa c \sin \alpha' = \pm 2 a \pi$$

(unter a jedwede ganze Zahl verstanden), also

$$8) \quad \sin \alpha' = \pm \frac{al}{c}$$

wird, und hieraus lassen sich leicht die dunklen Stellen construiren (s. Seite 10).

Da $c \sin \alpha' = Ab$, also gleich dem Gangunterschiede der beiden Strahlen SA und SA' ist, so tritt da Dunkel ein, wo der Gangunterschied der Randstrahlen eine ganze Zahl Wellenlängen ist.

Die dunklen Stellen bilden die Grenzen der Spektra, welche das Bild enthält.

Da der Zähler in dem Ausdruck für I die Werthe von 0 bis A periodisch durchläuft, der Nenner aber, da stets $\alpha' < 90°$ ist, mit α' zugleich stetig wächst, so nimmt die Intensität der Oerter, in denen der Zähler sein Maximum A erreicht, mit der Entfernung von der Mitte ab, die Seitenspektra werden daher um so lichtschwächer, je weiter sie von dem mittleren abstehen.

Die dunklen Stellen, d. h. die Grenzen der Spektra, ergeben sich für schiefe Incidenzen aus: $\sin \frac{1}{2} \varkappa c \Delta = 0$. Die Bedingung ist daher $c\Delta = \pm al$, oder

$$9) \quad \sin \alpha' - \sin \alpha = \pm \frac{al}{c}.$$

Da $\Delta = Ab - Aa' = Ab - A'a =$ dem Gangunterschiede der Randstrahlen ist, so gilt das obige Gesetz auch für schiefe Incidenzen.

Sind α und α' nur klein, so ist $\sin \alpha' - \sin \alpha$ nahe $= \alpha' - \alpha = \theta$, so dafs bei geringer Neigung des Schirms gegen die dunklen und gebeugten Strahlen, die Intensität der Spektra nur von θ abhängt.

Ist der Spalt sehr breit, und α grofs, so führt man bequemer die Complemente von α und α' (sie mögen σ und σ' heifsen) ein. Man hat alsdann für die dunklen Stellen $\cos \sigma' = \cos \sigma \pm alc^{-1}$, also

$$1-\cos\sigma' = 1-\cos\sigma \mp \mathfrak{a}lc^{-1} = \sin.vers\,\sigma \mp \mathfrak{a}lc^{-1}.$$

Da σ sehr klein, und c sehr grofs gegen l vorausgesetzt ist, so kann $1-\cos\sigma'$ und somit auch σ' erst für sehr bedeutende Werthe von $\mathfrak{a}$ erheblich werden. Setzt man daher für $\cos\sigma'$ nur die ersten Glieder seiner Reihe, $1-\frac{1}{2}\sigma'^2$, so erhält man

$$\sigma'^2 = 2(\sin vers\,\sigma \mp \mathfrak{a}lc^{-1}).$$

Nimmt man z. B. $\sin vers\,\sigma = 2lc^{-1}$, so würde der erste reelle Werth von σ' für $\mathfrak{a} = +2$ eintreten, und man erhielte, wenn man für $\mathfrak{a}$ nach und nach $+2$, $+1$, 0, -1, -2 etc.... setzt, beziehlich: 0, $\sqrt{2lc^{-1}}.\sqrt{1}$, $\sqrt{2lc^{-1}}.\sqrt{2}$, $\sqrt{2lc^{-1}}.\sqrt{3}$, $\sqrt{2lc^{-1}}.\sqrt{4}$ etc.; σ würde also wie die Quadratwurzeln aus den ganzen Zahlen wachsen.

Beugung durch eine trapezförmige Oeffnung.

Es sei (Fig. 40) $ABCD$ die beugende Oeffnung, befindlich in dem vertikalen Schirm O_1OB'', O der optische Mittelpunkt, und O_1OB''' eine auf den einfallenden Strahlen senkrechte Ebene, also wenn $B''OB'''$ eine horizontale Ebene ist, $\angle B''OB'''$ dem Einfallswinkel α gleich. Ferner sei $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$, $DC = d$, und die orthogonalen Projektionen der Punkte A, B, C, D seien auf OO_1: A', B', C', D', auf OB: A'', B'', C'', D''; ferner mögen $A''A'''$, $B''B'''$, $C''C'''$, $D''D'''$, welche beziehlich gleich p_1, p_2, p_3, p_4 seien, auf OB senkrecht gezogen sein, und endlich bezeichne man die Winkel, welche a, b, c mit OO_1 bilden, beziehlich durch α_1, β_1, γ_1, und AH durch g.

Man hat alsdann

$$\begin{aligned}
p_1 &= AA'\sin\alpha = g\sin\alpha_1\sin\alpha,\\
p_2 &= BB'\sin\alpha = (g+a)\sin\alpha_1\sin\alpha,\\
p_3 &= CC'\sin\alpha = (g\sin\alpha_1 - b\sin\beta_1)\sin\alpha,\\
p_4 &= DD'\sin\alpha = [(g+a)\sin\alpha_1 - c\sin\gamma_1]\sin\alpha.
\end{aligned}$$

Legt man noch durch O eine Ebene senkrecht auf die gebeugten Strahlen (deren Durchschnitt mit dem Schirm OO_2 sei), und nennt in Bezug auf dieselbe q_1, q_2, q_3, q_4, g_2, α_2, β_2, γ_2, was in Bezug auf die Ebene O_1OB''' p_1, p_2,

p_3, p_4, g, α_1, β_1, γ_1 war, so erhält man Werthe für die q, welche sich von den Werthen der p nur darin unterscheiden, dafs an die Stelle der Indices (1) die Indices (2) treten, und α' für α erscheint. Setzt man $\angle O_1OO_2 = \nu$ und den Winkel zwischen den einfallenden und gebeugten Strahlen θ, so ist noch $\alpha_2 = \alpha_1 + \nu$, $\beta_2 = \beta_1 + \nu$, $\gamma_2 = \gamma_1 + \nu$,

$$g_2 = g - \frac{OH \sin\nu}{\sin(\alpha_1 + \nu)}, \quad \cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\nu.$$

Zur Bestimmung der Intensität des gebeugten Lichtes bei seiner Ankunft in $B'''O$, wo wir das Auge oder den auffangenden Schirm denken wollen, theile man das Trapez in Elementartheilchen. Auf a mögen $n+1$; auf b, $m+1$ Theile kommen. Die Entfernung des Lichtpunktes von O sei wiederum x, also die Abstände desselben von A und B: $x-p_1$ und $x-p_2$. Die Oscillationsgeschwindigkeit im $\mathfrak{c}+1$ten Element der Linie a ist sodann

$$U_{\mathfrak{c}+1} = A_1 \sin[o + \varkappa(p_1 + \tfrac{1}{2}\partial p + \mathfrak{c}\partial p)]$$

und die Oscillationsgeschwindigkeit des entsprechenden Theiles auf der Ebene O_1OB''' (bei einer Beugung unter dem Winkel α')

$$U_{\mathfrak{c}+1} = A_1 \sin[o + \varkappa(p_1 + \tfrac{1}{2}\partial p_1 + \mathfrak{c}\partial p_1) - \varkappa(q_1 + \tfrac{1}{2}\partial q_1 + \mathfrak{c}\partial q_1)].$$

Die Phasen bilden daher wiederum eine arithmetische Reihe, deren Differenz $\varkappa(\partial q_1 - \partial p_1)$ ist, und man erhält aus (4), wenn man $\partial q_1 - \partial p_1 = i$ setzt,

$$S(U_1) = A_1 \frac{\sin[\frac{1}{2}(n+1)\varkappa i]}{\sin\frac{1}{2}\varkappa i} \sin[o - (q_1 - p_1)\varkappa - \tfrac{1}{2}(n+1)i],$$

oder da $(n+1)\partial p = p_2 - p_1$ und $(n+1)\partial q = q_2 - q_1$ ist, wenn man noch $q_1 - p_1 = \Delta_1$, $q_2 - p_2 = \Delta_2$ setzt,

$$S(U_1) = A_1 \frac{\sin[\frac{1}{2}\varkappa(\Delta_2 - \Delta_1)]}{\sin\frac{1}{2}\varkappa i} \sin[o - \tfrac{1}{2}\varkappa(\Delta_2 + \Delta_1)].$$

Aehnlich werden die Resultanten der übrigen mit a parallelen Elementen-Reihen. Die äufserste an CD anliegende wird dabei

$$S(U_{m+1}) = A_1 \frac{\sin[\frac{1}{2}\varkappa(\Delta_4 - \Delta_3)]}{\sin\frac{1}{2}\varkappa i} \sin[o - \tfrac{1}{2}\varkappa(\Delta_4 + \Delta_3)].$$

Da $\sin\frac{1}{2}\varkappa i$ constant ist, und sowohl die Phasen, als

die Bögen der in den Zählern stehenden Sinus für sämmtliche zwischen $S(U_1)$ und $S(U_{m+1})$ liegenden Resultanten arithmetische Reihen bilden, so lassen sich die Formeln (I. u. II.) anwenden. Die zu machenden Substitutionen sind: $\gamma = o$, $A = A_1 \sin^{-1}(\frac{1}{2}\varkappa i)$, $d = \frac{1}{2}\varkappa(\Delta_2 - \Delta_1)$, $\delta = \frac{1}{2}\varkappa(\Delta_2 + \Delta_1)$

$$e = \frac{\Delta_4 - \Delta_3 - \Delta_2 + \Delta_1}{m+1}, \quad i = \frac{\Delta_4 - \Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1}{m+1}.$$

Setzt man der Kürze wegen $\Delta_2 - \Delta_1 = \Delta_{2-1}$, $\Delta_2 + \Delta_1 = \Delta_{2+1}$ etc., und nimmt statt der Sinus der kleinen Bögen $\frac{1}{2}\varkappa i$, $\frac{1}{2}(i+e)$ und $\frac{1}{2}(i-e)$ die Bögen selbst, so giebt die Summation:

$$10)\quad \begin{cases} S(a) = \dfrac{m+1}{\varkappa i} A_1 \left[\dfrac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{4-2})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{4-2}} \sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{4+2}) \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1}} \sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{3+1}) \right] \\ S(b) = \dfrac{m+1}{\varkappa i} A_1 \left[- \dfrac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{4-2})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{4-2}} \cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{4+2}) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1}} \cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{3+1}) \right]. \end{cases}$$

Ist wiederum A^2 die Intensität des ungebeugten Lichtes bei senkrechter Incidenz, so ist die Lichtmenge des in die Oeffnung eintretenden Lichtes, da die Zahl der Elemente des Trapezes $\frac{(m+1)(n+1)}{2} \cdot \frac{a+d}{a}$ ist,

$$A \cos\alpha = \frac{(m+1)(n+1)}{2} \frac{a+d}{a} A_1.$$

Man hat ferner: $a : d = p_2 - p_1 : p_4 - p_3$,
und $a : d = q_2 - q_1 : q_4 - q_3$, also

$a : d = \Delta_{2-1} : \Delta_{4-3}$ und $\frac{a+d}{d} = \frac{\Delta_{4-3+2-1}}{\Delta_{2-1}}$; folglich, insofern $p_2 - p_1 = (n+1)\partial p$ und $q_2 - q_1 = (n+1)\partial q$, mithin $\Delta_{2-1} = (n+1)i$ ist,

$$A \cos\alpha = \tfrac{1}{2}(m+1)\frac{\Delta_{4-3+2-1}}{i} A_1.$$

Daher wird $\frac{(m+1)A_1}{2i} = \frac{A\cos\alpha}{\Delta_{4-3+2-1}}$, und sonach

$$10a)\quad S(a) = \frac{2A\cos\alpha}{\varkappa\Delta_{4-3+2-1}} W, \qquad S(b) = \frac{2A\cos\alpha}{\varkappa\Delta_{4-3+2-1}} W'$$

wo W und W' die eingeklammerten Faktoren von A_1 in (10) bedeuten, und man erhält, wenn man

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{4-2})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{4-2}} \text{ und } \frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1}}$$

durch M_{4-2} und M_{3-1} abkürzend bezeichnet,

$$11)\quad I^2 = S(a)^2 + S(b)^2 = \left(\frac{2A\cos\alpha}{\varkappa\Delta_{4-3+2-1}}\right)^2\Big[M^2_{4-2} + M^2_{3-1} - 2M_{4-2}M_{3-1}\cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{4-3+2-1})\Big].$$

Fallen die Richtungen OO_1 und OO_2 zusammen, wird also $v = o$, so wird, wenn wiederum Δ für $\sin\alpha' - \sin\alpha$ gesetzt wird,

$$12)\quad \begin{cases} \Delta_1 = g\sin\alpha_1\Delta, \quad \Delta_2 = (g+a)\sin\alpha_1\Delta, \\ \Delta_3 = (g\sin\alpha_1 - b\sin\beta_1)\Delta\sin\alpha, \\ \Delta_4 = [(g+a)\sin\alpha_1 - c\sin\gamma_1]\Delta\sin\alpha. \end{cases}$$

Sind überdies α und α' nur klein, so wird $\Delta = \theta$ und $\cos\alpha' = 1$, also

$$\Delta_1 = g\sin\alpha_1\theta, \quad \Delta_2 = (g+a)\sin\alpha_1\theta$$
$$\Delta_3 = (g\sin\alpha_1 - b\sin\beta_1)\theta, \quad \Delta_4 = [(g+a)\sin\alpha_1 - c\sin\gamma_1]\theta.$$

Stehen die einfallenden Strahlen senkrecht auf dem Schirm, so hat man:

$$12a)\quad \begin{cases} \Delta_1 = g_2\sin\alpha_2\sin\alpha', \quad \Delta_2 = (g_2+a)\sin\alpha_2\sin\alpha', \\ \Delta_3 = (g_2\sin\alpha_2 - b\sin\beta_2)\sin\alpha', \\ \Delta_4 = [g_2+a)\sin\alpha_2 - c\sin\gamma_2]\sin\alpha'. \end{cases}$$

Beugung durch eine parallelogrammförmige Oeffnung.

Aus dem Trapez der Figur 40 wird ein Parallelogramm, wenn $\beta_1 = \gamma_1$ wird. Es wird alsdann auch $\beta_2 = \gamma_2$, $b = c$, $\Delta_{4-1} = \Delta_{3-1}$, $\Delta_{4-3} = \Delta_{2-1}$, $\Delta_{4-3+2-1} = 2\Delta_{2-1}$, und man erhält aus den für das Trapez gefundenen Formeln:

$$S(a) = \frac{A\cos\alpha}{\varkappa\Delta_{2-1}} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1}}\Big[\sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{4+2}) - \sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{3+1})\Big]$$

$$S(b) = \frac{A\cos\alpha}{\varkappa\Delta_{2-1}} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1}}\Big[-\cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{4+2}) + \cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{3+1})\Big],$$

oder, weil $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$
$\cos y - \cos x = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$

ist,

$$12b)\begin{cases} S(a) = A\cos\alpha\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{2-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{2-1}}\cdot\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1}}\cos(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta_{4+3+2+1}) \\ S(b) = A\cos\alpha\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{2-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{2-1}}\cdot\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1})}{\frac{1}{2}\varkappa\Delta_{3-1}}\sin(\tfrac{1}{4}\varkappa\Delta_{4+3+2+1}), \end{cases}$$

folglich für die Intensität:

$$13)\quad I^2 = (A\cos\alpha)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a_1}{\frac{1}{2}a_1}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\right)^2,$$

wo

$$14)\begin{cases} a_1 = \varkappa\Delta_{2-1} = \varkappa a(\sin\alpha_2\sin\alpha' - \sin\alpha_1\sin\alpha) \\ b_1 = -\varkappa\Delta_{3-1} = \varkappa b(\sin\beta_2\sin\alpha' - \sin\beta_1\sin\alpha) \end{cases}$$

ist.

Da I^2 nur für $a_1 = \pm(a+1)\pi$ und $b_1 = \pm(a+1)\pi$ verschwindet, so erscheinen nur da dunkle Stellen, wo die Werthe von α' eine dieser beiden Bedingungen erfüllen.

Die geometrische Bedeutung von a_1 und b_1, und somit die Lage der dunklen Stellen und die hiervon abhängende Form des Bildes ergiebt sich aus folgender Construction.

Man ziehe durch den Punkt O der Ebene des Schirmes $abHGa$ (Fig. 41) OS dem einfallenden, OS_1 einem gebeugten Strahl parallel, ziehe ferner Oa und Ob den Seiten a und b der Oeffnung beziehlich parallel, beschreibe aus O mit dem Halbmesser Eins eine Kugel, lege durch S und S_1 1) Ebenen, welche senkrecht auf Ob stehen, den Schirm in HH und hh, und Ob in o und o_1 schneiden, 2) Ebenen, welche senkrecht auf Oa stehen, den Schirm in GG und gg, Oa in i und i_1 schneiden.

Die Durchschnittslinien GG, gg, HH, hh schneiden ein Parallelogramm $ss_1s_2s_3$ heraus, dessen Seiten senkrecht auf den Seiten des Parallelogramms der Oeffnung stehen, und welches die Projektion des sphärischen Parallelogramms $SS_1S_2S_3$ ist, das von den vier perpendicularen Ebenen aus der Kugelfläche herausgeschnitten ist.

Die Ebenen GSG und HSH mögen Hauptkreise, die Linien GG und HH Hauptrichtungen heifsen.

Eine durch O auf OS senkrecht stehende Ebene schneidet den *Schirm in einer Linie*, welche der Linie OO_1 der *Fig. 49 entspricht*, mit Oa und Ob daher die Winkel α_1

und β_1 bildet und auf Os (der Projektion von OS) lothrecht steht. Es ist daher $sOi = \alpha_1 - 90$, $sOo = 90 - \beta_1$. Da ferner $SOs = 90 - \alpha$ ist, so hat man $Oi = \sin\alpha_1 \sin\alpha$, $Oo = \sin\beta_1 \sin\alpha$. Ebenso findet man $Oi_1 = \sin\alpha_2 \sin\alpha$, $Oo_1 = \sin\beta_2 \sin\alpha'$, also $ii_1 = \sin\alpha_2 \sin\alpha' - \sin\alpha_1 \sin\alpha$, $oo_1 = \sin\beta_2 \sin\alpha' - \sin\beta_1 \sin\alpha$ und mithin $a_1 = \varkappa a . ii_1$, $b_1 = \varkappa b . oo_1$.

Für die in dem Hauptkreis HSH liegenden gebeugten Strahlen (d. h. für den Fall, daſs S_1 in HSH liegt) wird

$oo_1 = 0$, also auch $b_1 = 0$ und $\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1} = 1$.

Die Intensität in jenem Hauptkreis wird daher, wenn wir die Intensität des Einfallslichtes $(A\cos\alpha)^2 = 1$ setzen,

$$I_0^2 = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}a_1}{\frac{1}{2}a_1}\right)^2.$$

Ebenso findet man für die Intensität des Hauptkreises GSG:

$$I_1^2 = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\right)^2.$$

Für $ii_1 = oo_1 = 0$, d. h. wenn der gebeugte Strahl mit dem einfallenden zusammenfällt, wird $I^2 = 1$. Die Intensität der Mitte ist daher der des ungebeugten Lichtes gleich.

Die Intensität für jeden beliebigen Strahl OS_1 ist folglich

$$I^2 = I_0^2 . I_1^2.$$

Da I_0 verschwindet, wenn $oo_1 = \pm\frac{al}{b}$ ist, so verschwindet das Licht in allen dem Hauptkreis I_0 parallelen Ebenen, welche in der Richtung Ob von der Mitte um $\pm\frac{l}{b}$, $\pm\frac{2l}{b}$, $\pm\frac{3l}{b}$ etc. entfernt sind.

Dasselbe findet sich, weil I_1^2 mit $\pm\frac{al}{a}$ zugleich verschwindet, für die mit dem andern Hauptkreis parallelen Ebenen, welche in der Richtung Oa um $\pm\frac{l}{a}$, $\pm\frac{2l}{a}$, $\pm\frac{3l}{a}$ etc. von der Mitte abstehen.

Fängt man das Licht daher mit einem weifsen Schirm auf, welcher dem beugenden Schirm parallel ist, so erscheint auf demselben eine Figur, welche von zwei Systemen paralleler dunkler (auf den Seiten des Parallelogramms der Oeffnung senkrechten) Linien durchschnitten ist, und dieselbe in parallelogrammförmige Spektra theilt. Siehe Figur 4.

Nennt man den Winkel des Parallelogramms (der zwischen a und b liegt) ω, so hat man $ii_1 = ss_2 \sin\omega$, $oo_1 = ss_3 \sin\omega$, und da $a \sin\omega$ und $b \sin\omega$ die auf b und a senkrechten Höhen der Oeffnung sind, so wird, wenn man diese Höhen mit h_2 und h_3 bezeichnet, $a_1 = \varkappa h_2 ss_2$ und $b_1 = \varkappa h_3 ss_3$, also

$$I_0^2 = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa h_2 ss_2)}{\frac{1}{2}\varkappa h_2 ss_2}\right)^2, \quad I_1^2 = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa h_3 ss_3)}{\frac{1}{2}\varkappa h_3 ss_3}\right)^2,$$

und die Distanzen der dunklen Parallel-Streifen in der Richtung der Hauptrichtungen (nämlich die Werthe von ss_2 und ss_3) werden beziehlich $\pm\frac{al}{h_2}$ und $\pm\frac{al}{h_3}$. Hierauf beruht die Construction der Seite 12.

Aus $I^2 = I_0^2 I_1^2$ folgt, dafs man die Intensität jedes beliebigen Punktes erhält, wenn man die Intensitäten der entsprechenden Punkte der Hauptrichtungen multiplicirt. Da diese mit der Entfernung von der Mitte abnehmen, so wird die Lichtstärke in den Winkelspektren ungemein schwach und bald ganz unmerklich.

Beugung durch eine dreieckige Oeffnung.

Um die Intensitätsausdrücke für das durch eine dreieckige Oeffnung gebeugte Licht aus denen abzuleiten, welche für ein Trapez gefunden sind, darf man nur die vierte Seite des Trapezes d gleich 0 setzen. Es wird alsdann $p_3 = p_4$, $q_3 = q_4$, also $\Delta_4 = \Delta_3$, d. h. $\Delta_{4-3} = 0$. Die Gleichung (11) geht daher über in:

$$I^2 = \left(\frac{2A\cos\alpha}{\varkappa\Delta_{2-1}}\right)^2 \left[M^2_{3-2} + M^2_{3-1} - 2M_{3-2}M_{3-1}\cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{2-1})\right],$$

wofür sich auch schreiben läfst:

15)

$$P = \left(\frac{2A\cos\alpha}{\varkappa\Delta_{3-2}}\right)^2\left[M^2_{2-1} + M^2_{3-1} - 2M_{2-1}M_{3-1}\cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\Delta_{2}\right.$$

oder

$$16)\quad P^2 = \left(\frac{2A\cos\alpha}{c_1}\right)^2\left[\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a_1}{\frac{1}{2}a_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\right)^2 \right.$$
$$\left. - 2\frac{\sin\frac{1}{2}a_1}{\frac{1}{2}a_1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\right.$$

wo

$$16a)\begin{cases} a_1 = \varkappa\Delta_{2-1} = \varkappa a(\sin\alpha_2\sin\alpha' - \sin\alpha_1\sin\alpha) \\ b_1 = -\varkappa\Delta_{3-1} = \varkappa b(\sin\beta_2\sin\alpha' - \sin\beta_1\sin\alpha \\ c_1 = -\varkappa\Delta_{3-2} = \varkappa c(\sin\gamma_2\sin\alpha' - \sin\gamma_1\sin\alpha) \end{cases}$$

ist. Ueberdies ist wegen $\Delta_{3-1} - \Delta_{2-1} = \Delta_{3-2}$, $a_1 + b_1 =$

Die Gröfsen Δ_{2-1}, Δ_{3-1}, Δ_{3-2} lassen sich ähnl wie die entsprechenden Gröfsen beim Parallelogramm struiren.

Es seien wiederum (Fig. 42) OS und OS_1 die Punkte O des Schirmes abc ausgehenden Richtungen des fallenden und gebeugten Strahls, und Oa, Ob, Oc den S ten des Dreiecks a, b, c parallel gezogen; ferner durch und S_1 senkrecht gegen diese drei Linien Ebenen geleg welche Oa in i und i_1, Ob in o und o_1, Oc in e und treffen. Die drei durch S gelegten Ebenen mögen Hau kreise, ihre Durchschnittslinien mit dem Schirm, HH, G HH, KK Hauptrichtungen heifsen. Endlich seien s un s_1 die Projektionen von S und S_1, und s_2, s_3 die Projektionen der Punkte, in welchen sich die beiden Paar durch S und S_1 senkrecht auf Oa und Ob gelegten Ebenen in der von O aus mit dem Halbmesser 1 beschrieber zu denkenden Kugelfläche schneiden (d. h. der beiden Eckpunkte des sphärischen Parallelogramms, dessen beide andere Eckpunkte S und S_1 sind).

Man findet alsdann:

$$Oi = \sin\alpha_1\sin\alpha,\quad Oo = \sin\beta_1\sin\alpha,\quad Oe = \sin\gamma_1\sin\alpha,$$
$$Oi_1 = \sin\alpha_2\sin\alpha',\quad Oo_1 = \sin\beta_2\sin\alpha',\quad Oe_1 = \sin\gamma_2\sin\alpha',$$

und mithin

$$17)\quad \begin{cases} ii_1 = \sin\alpha_2 \sin\alpha' - \sin\alpha_1 \sin\alpha, & a_1 = \varkappa a.ii, \\ oo_1 = \sin\beta_2 \sin\alpha' - \sin\beta_1 \sin\alpha, & b_1 = \varkappa b.oo_1 \\ ce_1 = \sin\gamma_2 \sin\alpha' - \sin\gamma_1 \sin\alpha, & c_1 = \varkappa c.ee_1. \end{cases}$$

Nennt man die auf b und a senkrechten Höhen h_2 und h_3, so hat man auch $a_1 = \varkappa h_2 ss_2$ und $b_1 = \varkappa h_3 ss_3$.

Was die Mitte betrifft, d. h. die Stelle, in welcher sich die drei Hauptkreise schneiden, so ist für dieselbe $ii_1 = oo_1 = ee_1 = 0$, d. h. $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, so dafs man aus (16) erhält:

$$I^2 = \left(\frac{2A\cos\alpha}{c_1}\right)^2 \cdot \left(2 - 2\cos\tfrac{1}{2}c_1\right),$$

und indem man für $\cos\frac{1}{2}c_1$ seinen Werth $1 - \frac{1}{8}c_1^2$ etc. substituirt, die Division durch c_1 vollzieht und dann $c_1 = 0$ setzt,

$$I_1^2 = (A\cos\alpha)^2.$$

Die Intensität ist also dort der des ungebeugten Lichtes gleich.

Die Lichtstärke in den Hauptkreisen erhält man, wenn man ii_1 oder oo_1 oder ee_1 allein $= 0$ setzt. Für $ii_1 = 0$ wird, da alsdann zugleich $c_1 = b$ ist,

$$18)\quad I^2 = \left(\frac{2A\cos\alpha}{b_1}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\right)^2 - \frac{2\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\cos\tfrac{1}{2}b_1\right].$$

Da der zweite Faktor nur für $b_1 = 0$ verschwindet, und selbst für diesen Fall $I = A\cos\alpha$ wird, so giebt es auf den Hauptkreisen keine dunkle Stelle; und da sich (18) schreiben läfst

$$I^2 = (A\cos\alpha)^2 \left(\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\right)^2 + \left(\frac{A\cos\alpha}{\frac{1}{2}b_1}\right)^2 \left[\cos\tfrac{1}{2}b_1 - \frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\right]^2,$$

und das erste Glied dieses Ausdrucks genau der Ausdruck ist, welcher für die Lichtstärke auf dem Hauptkreise bei einer parallelogrammartigen Oeffnung von gleicher Höhe gefunden wurde, so ist die Lichtmenge überall auf den Hauptkreisen gröfser als auf den correspondirenden Stellen der Hauptkreise des Parallelogramms.

Für die Oerter, welche den dunklen Punkten der Hauptkreise beim Parallelogramm entsprechen, d. h. für $oo_1 = \pm\frac{al}{b}$ oder $ss_2 = \pm\frac{al}{b}$ wird $I^2 = \left(\frac{A\cos\alpha}{2\mathfrak{a}.\frac{1}{2}\pi}\right)^2$,

und für die Oerter, für welche $oo_1 = \pm\frac{(2a+1)}{2b}l$ od[er]

$ss_2 = \pm\frac{(2a+1)l}{2h_2}$ ist, wird

$$I^2 = \left(\frac{A\cos\alpha}{(2a+1)\frac{1}{2}\pi}\right)^2 + \frac{(A\cos\alpha)^2}{((2a+1)\frac{1}{2}\pi)^4}.$$

Jene Stellen, in welchen die Lichtstärke sich umge-kehrt wie die Quadrate der geraden Zahlen verhalten, mö-gen **Minima**, diese Stellen **Maxima** des Hauptkr[eises] heifsen.

Die Lage der dunklen Stellen (welche also nie [in] einem Hauptkreise liegen) wird durch das Verschwin[den] des zweiten Faktors in (16) bestimmt. Da aus dess[en] Form folgt, dafs er das Quadrat der Seite eines Dreie[cks] repräsentirt, dessen andere beide Seiten M_{2-1} und M[...] sind, wenn diese einen Winkel $\frac{1}{2}c_1$ einschliefsen, so fo[lgt] zugleich, dafs ein Verschwinden nur möglich ist 1) we[nn] die beiden Seiten gleich Null sind, 2) wenn beide Sei[ten] einander gleich und der Zwischenwinkel Null ist. D[as] letztere führt auf $c_1 = 0$, also auf die Intensität ein[es] Hauptkreises, und liefert also keine dunkle Stellen.

Die beiden Seiten verschwinden, wenn zugleich

$$ss_2 = \pm\frac{al}{h_2} \quad \text{und} \quad ss_3 = \pm\frac{bl}{h_3}$$

ist, also in den Punkten, in welchen sich die durch die Oerter der Minima der Hauptkreise gelegten mit diesen Hauptkreisen parallelen Ebenen schneiden, d. h. in den Endpunkten der parallelogrammartigen Spektra, welche auftreten würden, wenn die Oeffnung ein Parallelogramm wäre, dessen Seiten a und b, und dessen Winkel dem von den Seiten a und b des Dreiecks eingeschlossenen gleich ist. Man vergleiche die Figur des hierher gehörigen Grundrisses (Fig. 5).

Für die Mitte der gedachten Parallelogramme wird

$$I^2 = \left(\frac{A\cos\alpha}{(\frac{1}{2}\pi)^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2a+1)^2(2b+1)^2};$$

die Lichtstärke nimmt also sehr stark mit der Entfernung

von

von den Hauptkreisen (d. h. wenn a und b zugleich wächst) ab, und die Figur erhält daher die Form eines 6seitigen Sterns, welcher regelmäſsig wird, wenn die Oeffnung gleichseitig ist.

Beugung durch eine Kreis-Oeffnung.

Da man sich den Kreis als ein Vieleck von recht vielen Seiten vorstellen kann, so kann man sich denselben durch parallele Sehnen in eine groſse Zahl gleichseitiger Trapeze getheilt denken, für welche sich nach Seite 74 die Intensität des gebeugten Lichtes bestimmen läſst. Der gröſsern Einfachheit wegen denke man sich den Schirm senkrecht gegen den einfallenden Strahl, und da in diesem Fall die Intensitätsvertheilung in allen diamentralen Richtungen der Beugungsfigur naturgemäſs dieselbe sein muſs, so ist es nur nöthig, die Lichtstärke für diejenigen gebeugten Strahlen zu bestimmen, welche einer beliebigen durch einen der Einfallsstrahlen gehenden Ebene parallel sind.

Dieser Ebene parallel wollen wir uns die Theilung in Trapeze denken, so daſs $\alpha_2 = 90^0$, also $\sin\alpha_2 = 1$ wird. Man hat alsdann, da $\beta_2 = -g_2$ und $b = c$ wird, aus (12): $\varDelta_1 = g \sin\alpha'$, $\varDelta_2 = (g+a)\sin\alpha'$, $\varDelta_3 = (g + c\sin\gamma_2)\sin\alpha'$, $\varDelta_4 = (g + a - c\sin\gamma_2)\sin\alpha'$, so daſs $\varDelta_{3-1} = \varDelta_{2-4}$ ist. Die Gleichung (11) geht daher über in:

$$19)\quad I^2 = 2\left(\frac{2A}{\varkappa\varDelta_{4-3+2-1}}\right)^2 M^2_{4-2}\left[1 - \cos\left(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{4-3+2-1}\right)\right]$$

$$= A^2 M^2_{4-2}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{4}\varkappa\varDelta_{4-3+2-1}\right)}{\frac{1}{4}\varkappa\varDelta_{4-3+2-1}}\right)^2,$$

während $\varDelta_{4-3+2-1} = (a - c\sin\gamma_2)\sin\alpha'$, $\frac{1}{4}\varDelta_{2-4} = c\sin\gamma_2\sin\alpha'$ ist.

Ist (Fig. 43) $ABCD$ eins der Trapeze der Kreisöffnung, dessen Centrum in E sei, OO_2 der Durchschnitt des Schirms mit der auf dem gebeugten Strahl senkrechten Ebene, $ES \mp BA$, EH senkrecht auf ES, $CEK = \frac{1}{2}CEA = o$; und KH senkrecht auf EK, so hat man, wenn man den *Winkel* CEK *durch* e und den Durchmesser durch d

bezeichnet, $KES = KHB = \gamma_2$, $AES = \gamma_2 - o$, $AB = a = d\cos(\gamma_2 - o)$, $BD = AC = c = d\sin o$, $FG = c\cos\gamma_2$, $CD = a - 2c\sin\gamma_2$, und daher

$$I = A\,\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa d\cos\gamma_2\cos o\sin\alpha')}{\frac{1}{2}\varkappa d\cos\gamma_2\cos o\sin\alpha'}\cdot\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa d\sin\gamma_2\sin o\sin\alpha')}{\frac{1}{2}\varkappa d\sin\gamma_2\sin o\sin\alpha'}.$$

Ist I_1^2 die Intensität des durch die ganze Oeffnung kommenden ungebeugten Lichtes, so ist

$$A = I_1\,\frac{\frac{1}{2}(AB + CD)FG}{\frac{1}{4}\pi d^2} = I_1\,\frac{(a - c\sin\gamma_2)c\cos\gamma_2}{\frac{1}{4}\pi d^2}$$

$$= I_1\,\frac{d^2\cos^2\gamma_2\cos o\sin o}{\frac{1}{4}\pi d^2}$$

und mithin, wenn man $\varkappa d\sin\alpha'$ durch d_1 bezeichnet,

$$I = I_1\,\frac{8\sin o}{\pi d_1}\cos\gamma_2\sin(\tfrac{1}{2}d_1\cos o\cos\gamma_2)\frac{\sin(\frac{1}{2}d_1\sin o\sin\gamma_2)}{\frac{1}{2}d_1\sin o\sin\gamma_2}$$

Die Vibrations-Intensität des durch die gesammten Trapeze kommenden Lichtes ist daher 20)

$$S(I) = I_1\,\frac{8\sin o}{\pi d_1}S\left[\cos\gamma_2\sin(\tfrac{1}{2}d_1\cos o\cos\gamma_2)\frac{\sin(\frac{1}{2}d_1\sin o\sin\gamma_2)}{\frac{1}{2}d_1\sin o\sin\gamma_2}\right]$$

Ist die Seitenzahl des dem Kreise zu substituirenden Vielecks 180, so wird $o = 1^0$, und γ_2 für die erste Zone (d. h. für das dem Mittelpunkt E zunächst liegende Trapez) 1^0, für die zweite 3^0, für die dritte 5^0 etc.

Hiernach finden sich als Werthe von d_1, für welche die Intensität verschwindet, und welche daher den dunklen Ringen angehören

1) $\frac{219{,}6}{180}\pi = 1{,}220\pi$ oder $219^0{,}6$
2) $\frac{401{,}9}{180}\pi = 2{,}233\pi$ oder $401^0{,}9$
3) $\frac{582{,}8}{180}\pi = 3{,}238\pi$ oder $582^0{,}8$
4) $\frac{763{,}3}{180}\pi = 4{,}241\pi$ oder $763^0{,}3$
5) $\frac{943{,}7}{180}\pi = 5{,}243\pi$ oder $943^0{,}7$
6) $\frac{1124{,}0}{180}\pi = 6{,}245\pi$ oder $1124^0{,}0$.

Die Sinus der Beugungswinkel, welche diesen Ringen entsprechen, sind daher:

$$\frac{1{,}220\,l}{d},\ \frac{2{,}233\,l}{d},\ \frac{3{,}238\,l}{d}\ \text{etc.},$$

und die Differenzen dieser Sinus der Reihe nach:

$$\frac{1{,}013\,l}{d},\ \frac{1{,}005\,l}{d},\ \frac{1{,}003\,l}{d},\ \frac{1{,}002\,l}{d},\ \frac{1{,}002\,l}{d}.$$

Die Breite der Ringe nimmt daher mit der Entfernung von der Mitte etwas ab, und nähert sich der Breite, welche die Spektra eines Spaltes von der Breite d haben.

Beugung durch eine Reihe gleicher und gleich weit von einander entfernter Oeffnungen.

Man bezeichne die Entfernung je zwei auf einander folgender Oeffnungen durch e, wie in der Figur 44 etwa die Gröfsen AA', $A'A''$, $A''A'''$; und durch μ den Winkel, unter welchem die Verbindungslinie correspondirender Punkte ($A'''B$) gegen den Durchschnitt des Schirms mit der Well-Ebene der einfallenden Strahlen (OO_1) geneigt ist, also in der Figur den Winkel ABO. Es ist alsdann die Entfernung des Punktes A der ersten Oeffnung von OO_1, $g \sin \alpha_1$, und die Entfernung des Punktes $A^{(c)}$ der $c+1$ten Oeffnung von OO_1, $g \sin \alpha + ce \sin \mu$. Ferner bezeichne man die Entfernungen der Punkte A, A', A'' etc. von der durch den Punkt O gelegten Well-Ebene der Einfallstrahlen resp. durch p', p'', p''' etc. und die Entfernungen derselben Punkte von der durch O gelegten Well-Ebene der gebeugten Strahlen durch q', q'', q''' etc. Es ist alsdann $p' = g \sin \alpha_1 \sin \alpha$, und für die $c+1$te Oeffnung

$$p^{(c+1)} = g \sin \alpha_1 \sin \alpha + ce \sin \mu \sin \alpha, \text{ und ebenso}$$

$$q' = g_2 \sin \alpha_2 \sin \alpha', \quad q^{(c+1)} = g' \sin \alpha_2 \sin \alpha' + ce \sin \mu' \sin \alpha',$$

wo g' und μ' in Bezug auf die Well-Ebene der gebeugten Strahlen vorstellen, was g und μ für die der einfallenden Strahlen bedeutet. Die Differenz der Entfernungen des leuchtenden Punktes von den Punkten $A^{(c)}$ und $A^{(c-1)}$ irgend zwei auf einander folgender Oeffnungen, oder was dasselbe ist, der Gangunterschied der auf diese Oeffnungen fallenden Strahlenbündel zur Zeit ihrer Ankunft am Schirm ist $p^{(c+1)} - p^{(c)} = e \sin \mu \sin \alpha$. Der Entfernungsunterschied derselben Punkte $A^{(c)}$ und $A^{(c-1)}$ von der durch O gehenden gebeugten Well-Ebene ist $q^{(c+1)} - q^{(c)} = e \sin \mu' \sin \alpha'$, mithin der Gangunterschied der beiden Strahlenbündel bei ihrer *Ankunft in der letztgenannten Ebene seit ihrem Ausgange am leuchtenden Punkt*:

$$(q^{(c+1)} - q^{(c)}) - (p^{(c+1)} - p^{(c)}) = e(\sin\mu' \sin\alpha' - \sin\mu \sin\alpha)$$
$$=$$

Da dieser Unterschied für jede zwei auf einander fol-gende Oeffnungen derselbe ist, so bilden die Phasenunter-schiede der unter demselben Beugungswinkel α' aus auf einander folgenden Oeffnungen tretenden Strahlen-del eine arithmetische Reihe, deren Differenz $\varkappa\varepsilon$ ist, und da die Intensität des aus jeder Oeffnung tretenden Lich-für ein constantes α und α' als gleich angesehen wer-kann, so ist die Intensität des aus allen Oeffnungen un-dem Winkel α' tretenden Lichtes, wenn man das einer e-zelnen Oeffnung zugehörige durch A_1^2 bezeichnet, und Zahl der Oeffnungen $n+1$ ist, nach (I.)

$$I^2 = A_1^2 \left(\frac{\sin[(n+1)\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon]}{\sin\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon}\right)^2$$

oder anders geschrieben:

$$21)\quad I^2 = [(n+1)A_1]^2 \cdot \left(\frac{\sin[(n+1)\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon]}{(n+1)\sin\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon}\right)^2.$$

Der erste Faktor dieses Ausdrucks ist die $(n+1)$fache Intensität des Lichtes einer einzigen Oeffnung; es entsteht also ein Bild, welches genau die Form des Bildes einer einzigen Oeffnung hat, insofern die dunklen Stellen, welche durch das periodische Verschwinden von A_1^2 erzeugt werden, genau dieselbe Lage haben. Die Zwischenräume, d. h. das Innere der Spektra (welches die Spektra der ersten Klasse sind) wird durch den zweiten Faktor modificirt, welcher durch sein periodisches Verschwinden das Licht in denselben schwächt (da er stets $\overline{\gtrless} 1$ ist), und an den Stellen vernichtet, wo er der Null gleich wird. Die hierdurch entstehenden dunklen Stellen bilden die Grenzen der Spektra zweiter und dritter Klasse.

Was diesen zweiten Faktor betrifft, welcher nicht von der Gestalt und Gröfse der Oeffnung, sondern nur von deren Zahl und Lage abhängt, und den wir der Kürze wegen durch P bezeichnen wollen, so wird derselbe $=1$, erreicht also seine absoluten Maxima, welche Maxima zweiter Klasse heifsen mögen, für $\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon = \pm m\pi$, d. h. für $\varepsilon =$

$\pm ml$, und zu beiden Seiten dieser Stellen ist die Intensitätsvertheilung, welche diesem Faktor entspricht, symmetrisch, da er für $\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon = m\pi + \frac{1}{2}\pi + x$ und für $\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon = m\pi + \frac{1}{2}\pi - x$ derselbe bleibt. Die Stellen, welchen $\varepsilon = \pm ml$ entspricht, sind also die einzigen, in denen die Intensität der Hauptspektra ungeändert bleibt, nämlich $((n+1)A_1)^2$.

Es verschwindet P für $(n+1)\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon = \pm m\pi$, d. h. für $(n+1)\varepsilon = \pm ml$, also wenn der $n+1$fache Gangunterschied je zwei auf einander folgender Strahlenbündel (ε) eine ganze Zahl Wellenlängen beträgt, ausgenommen da, wo m ein Vielfaches von $n+1$ ist, weil alsdann $P=1$ wird. Diese Minima mögen Minima zweiter Klasse heifsen. Sie sind durch kleinere Maxima von einander getrennt, nämlich dort, wo der Zähler von P, $=1$, d. h. wo $(n+1)\varepsilon = \pm\frac{1}{2}(2m+1)l$ wird. Diese Maxima verschwinden nur da, wo sie einem gröfsten Maximum unmittelbar vorausgehen oder folgen. Sie mögen Maxima dritter Klasse heifsen.

Zwischen je zwei Maximis zweiter Klasse befinden sich demnach $n-1$ Maxima dritter Klasse. Nur die letzteren ändern, wie man sieht, ihre Lage und Zahl mit der Oeffnungszahl.

Sind z. B. (Fig. 45) A und B zwei auf einander folgende Maxima zweiter Klasse, bei a, c, d, e, b die zwischen ihnen liegenden Minima, bei $\frac{1}{12}$ und $\frac{11}{12}$ die verschwindenden, bei $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{12}$ die 4 bleibenden Maxima dritter Klasse, so sind Aa und bB die Hälften zwei auf einander folgender Spektra zweiter Klasse, und ac, cd, de, eb die Spektra dritter Klasse. Die übergezeichnete Curve bezeichnet den Gang der Intensität. Je gröfser die Oeffnungszahl ist, desto enger werden die Spektra ac, cd, de, eb, so dafs sie schon bei mäfsigen Werthen von n wegen ihrer verhältnifsmäfsig geringen Lichtstärke unmerkbar werden, und die Spektra zweiter Klasse durch einen ausgedehnten dunklen Zwischenraum ab getrennt scheinen.

Die geometrische Bedeutung von ε ergiebt sich aus folgender *Construction:*

Es sei (Fig. 46) eGg die Ebene des Schirms, dur den optischen Mittelpunkt O die Gerade ee parallel der Li AA_1 gezogen, OS einer der einfallenden, OS_1 einer gebeugten Strahlen, und durch die Punkte S und S_1, welchem dieselben eine aus O mit dem Radius 1 besc bene Kugelfläche treffen, lege man die auf ee senkre Ebenen GSG und gS_1g, welche ee in den Punkten u u_1 schneiden mögen. Sind alsdann s und s_1 die Pro tionen von S und S_1, so sind die Linien, in welchen der Schirm von den Wellen-Ebenen des einfallenden gebeugten Strahls durchschnitten wird, senkrecht auf und Os_1, und es ist daher $sOu = 90 - \mu$, $s_1Ou_1 = 90 -$ Da ferner $SOs = 90 - \alpha$ und $S_1Os_1 = 90 - \alpha'$ ist, ist $Ou = \sin\mu \sin\alpha$ und $Ou_1 = \sin\mu' \sin\alpha'$, also

$$e.uu_1 = e(\sin\mu' \sin\alpha' - \sin\mu \sin\alpha) \doteq \varepsilon.$$

Für die Maxima und Minima der zweiten, und für d Maxima der dritten Klasse hat man daher beziehlich Bedingungen:

$$uu_1 = \pm\frac{ml}{e}, \quad uu_1 = \pm\frac{m}{n+1}\cdot\frac{l}{e}, \quad uu_1 = \pm\frac{m+\frac{1}{2}}{n+1}\cdot\frac{l}{e}.$$

Denkt man sich ein Parallelogramm, dessen Fläche l und dessen Höhe e ist, so lassen sich, wenn man dessen Grundlinie g nennt, dieselben Gröfsen schreiben:

$$\pm mg, \quad \pm\frac{m}{n+1}g, \quad \pm\frac{m+\frac{1}{2}}{n+1}g.$$

Haben die Oeffnungen die Form von Parallelogrammen, so geht (21) wegen (13), wenn man die Intensität des einfallenden Lichtes zur Einheit nimmt, über in:

$$22)\quad I^2 = \left(\frac{\sin\frac{1}{2}a_1}{\frac{1}{2}a_1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\cdot\frac{\sin\left[(n+1)\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon\right]}{\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon}\right)^2,$$

während für senkrechte Incidenz $a_1 = \varkappa a \sin\alpha_2 \sin\alpha'$, $b_1 = \varkappa b \sin\beta_2 \sin\alpha'$, $\varepsilon = e \sin\mu' \sin\alpha'$ ist.

Für ein rechtwinkliges Drahtgitter erhält man daher, wenn man die Drähte vertikal denkt, als Intensität des Lichtes in der horizontalen Ebene:

$$23)\quad I^2 = \left[(n+1)\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa a \sin\alpha')}{\frac{1}{2}\varkappa a \sin\alpha'}\right]^2 \cdot \left[\frac{\sin\left[(n+1)\frac{1}{2}\varkappa e \sin\alpha'\right]}{(n+1)\sin(\frac{1}{2}\varkappa e \sin\alpha')}\right]^2.$$

Fällt das Licht schief (unter dem Winkel α) auf den Schirm, so hat man für die resultirenden unsymmetrischen Spektra, in dem letzten Ausdruck nur $\sin\alpha' - \sin\alpha$ für $\sin\alpha'$ zu setzen, und das Ganze mit $\cos^2\alpha$ zu multipliciren. Die Oerter der gröfsten Maxima zweiter Klasse sind alsdann gegeben durch:

$$\sin\alpha' - \sin\alpha = \pm\frac{ml}{e}.$$

Aus dem Vorhergehenden läfst sich leicht die Intensität des durch ein Parthiegitter gebeugten Lichtes ableiten.

Denkt man sich nämlich die Oeffnungen des Gitters vertikal, und das Licht auf den Schirm senkrecht auffallend, so ergiebt sich für das durch eine einzelne der Oeffnungen in einer Horizontal-Ebene gebeugte Licht, d. h. für $\alpha_2 = 90$, $\beta_2 = \gamma_2 = o$, aus (12, a):

$$\Delta_{2-1} = a\sin\alpha', \; \Delta_{3-1} = o, \; \tfrac{1}{2}\Delta_{4+3+2+1} = (g_2 + \tfrac{1}{2}a)\sin\alpha',$$

und daher aus (13), da zugleich $b_1 = 0$ wird,

$$I^2 = A^2\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\varkappa a\sin\alpha')}{\frac{1}{2}\varkappa a\sin\alpha'}\right)^2.$$

Ist nun o die Phase des direkten, $o - i$ die des gebeugten Lichtes, so ist die Oscillations-Geschwindigkeit U des gebeugten Lichtes, $U = I\sin(o - i)$, während nach (2 u. 12, b) $tg = \frac{S(b)}{S(a)} = tg(\frac{1}{4}\varkappa\Delta_{4+3+2+1}) = tg[\frac{1}{2}\varkappa(g_2 + \frac{1}{2}a)\sin\alpha']$ ist. Bezeichnet man die Werthe von g_2 für die verschiedenen Oeffnungen derselben Parthie nach der Reihe durch g', g'', g''' etc. und die Werthe von i durch i', i'', i''' etc., so erhält man als Resultante des durch sämmtliche Oeffnungen einer Parthie gebeugten Lichtes, da die Intensität I^2 aller Componenten dieselbe ist, aus (2 u. 3), wenn man das dortige γ durch $o - i'$, also das dortige δ_c durch $i^{(c)} - i'$ ersetzt, und die resultirende Intensität I_1^2 nennt,

$$I_1^2 = I^2\{S[\cos(i^{(c)} - i')]^2 + S[\sin(i^{(c)} - i')]\} = I^2N^2,$$

während $i^{(c)} - i' = \frac{1}{2}\varkappa(g^{(c)} - g')\sin\alpha'$ ist.

Die Differenz $g^{(c)} - g'$ bezeichnet die Entfernung der ersten Oeffnung von der $c$ten Oeffnung der Parthie.

Besteht *das Gitter aus* $n + 1$ Parthieen, so ist die In-

tensität, wenn die Entfernung der Anfangspunkte je zwei auf einander folgender Parthieen e ist,

$$24)\quad I_1^2 = (n+1)^2 I^2 \left(\frac{\sin[(n+1)\frac{1}{2}\varkappa e \sin\alpha']}{(n+1)\sin(\frac{1}{2}\varkappa e \sin\alpha')}\right)^2 N^2.$$

Enthält z. B. jede Parthie zwei Oeffnungen, so h[illegible] man

$$N^2 = [1+\cos(i''-i')]^2 \sin^2(i''-i') = 2+2\cos(i''-[illegible]$$
$$= 4\cos^2\tfrac{1}{2}(i''-[illegible]$$

Ist die Zahl der Oeffnungen in jeder Parthie drei, so hat man

$$N^2 = [1+\cos(i''-i')+\cos(i'''-i')]^2 + [\sin(i''-i')$$
$$+\sin(i'''-i')]^2 = 3+2\cos(i''-i')+2\cos(i'''-[illegible]$$
$$+2\cos(i'''-i[illegible]$$

Die Intensität hängt folglich von der Entfernung e der Parthieen, von den Entfernungen $i^{(c)}-i'$ der Oeffnungen in den Parthieen, und von der Breite a der Oeffnungen ab.

Für das p. 26 erwähnte Fraunhofersche Parthiegitter hat man nur, um den Werth von N für die Spektra zweiter Klasse zu berechnen, $g''-g'=0{,}25.e$, $g'''-g'=0{,}58.e$, $g'''-g''=0{,}33.e$, und $\varkappa \sin\alpha' = \pm 2m\pi$ zu setzen, wodurch sich ergiebt: $i''-i' = \pm 0{,}25.m\pi$, $i'''-i' = \pm 0{,}58.m\pi$, $i'''-i'' = \pm 0{,}33.m\pi$. Indem man für m nach und nach 1, 2, 3, 4 etc. setzt, findet man aus der vorigen Gleichung die Werthe von N für die zugehörigen Spektra.

Beugung durch mehrere gleichweit von einander entfernte gleichgeordnete Reihen von Oeffnungen.

Wie aus der Intensität des durch eine einzelne Oeffnung gebeugten Lichtes der Ausdruck für das durch eine Reihe Oeffnungen von gleicher Gestalt, Gröfse und Entfernung gebeugte Licht abgeleitet wurde, so findet man aus dem Ausdruck für eine Reihe Oeffnungen den Ausdruck für mehrere Reihen Oeffnungen, welche einander gleich sind und gleich weit von einander abstehen.

Ist I^2 die Intensität für eine Reihe, so erhält man für $m+1$ solcher Reihen, wenn man die entsprechende *Intensität durch* I'^2 bezeichnet,

$$25)\quad I'^2 = (m+1) I^2 \left(\frac{\sin[(m+1)\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon']}{(m+1)\sin\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon'}\right)^2 = (m+1) I^2 . Q^2,$$

wo $\varepsilon' = e'(\sin\mu_1' \sin\alpha' - \sin\mu_1 \sin\alpha)$ ist. e' bedeutet die Entfernung je zwei auf einander folgender Reihen, μ_1 den Winkel zwischen der Linie, welche entsprechende Punkte der correspondirenden Oeffnungen verbindet, und derjenigen Linie, in welcher der Schirm von der einfallenden Well-Ebene geschnitten wird; endlich μ_1' denselben Winkel in Bezug auf die gebeugte Well-Ebene. Ist $u_1 u_1'$ die der Geraden uu' analoge Linie, so ist $\varepsilon' = e'.u'u_1'$.

Sind überdies die Oeffnungen derselben Reihe gleich grofs, von gleicher Gestalt und in gleicher Entfernung von einander, so hat man nach (21)

$$26)\quad I'^2 = [(n+1)(m+1)A_1]^2 . P^2 . Q^2.$$

Ebenso wie die Spektra einer einzelnen Oeffnung durch P^2 modificirt werden, und dadurch in der einen Dimension neue kleinere Spektra sich bilden, so wird das Bild von einer Reihe Oeffnungen durch den Faktor Q^2 in der andern Dimension modificirt.

Für senkrecht einfallendes Licht wird das in A_1 enthaltene a_1 und b_1 beziehlich $\varkappa a \sin\alpha_2 \sin\alpha'$ und $\varkappa b \sin\beta_2 \sin\alpha'$, das in P enthaltene $\varepsilon = e \sin\mu' \sin\alpha'$, und das in Q enthaltene $\varepsilon' = e' \sin\mu_1' \sin\alpha'$. Bei Kreuzgittern wird überdies $\mu' = \alpha_2$ und $\mu_1' = \beta_2$.

Beugung durch verschieden gruppirte Oeffnungen.

I. Die Oeffnungen mögen gleich sein und in drei sich in einem Punkte schneidenden Richtungen liegen, und zwar so, dafs die Entfernungen in diesen Richtungen gleich sind.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, mögen die Oeffnungen die in Fig. 47 angedeutete Lage haben, so dafs eine Oeffnung im Durchschnittspunkt A der drei Richtungen sich befindet und die äufsersten in dem Umfang eines Dreiecks liegen, mithin A der Schwerpunkt des Dreiecks ist.

Es sei $A \sin o$ die Resultante des durch die Oeffnung A

gebeugten Lichtes. Die Oscillations-Geschwindigkeiten aus den Oeffnungen m, m', m_1; n, n', n_1; r, r', r_1 ge tenen Strahlenbündel lassen sich alsdann beziehlich vor len durch:

$$A\sin(o-i_1),\quad A\sin(o-2i_1),\quad A\sin(o+i_1);$$
$$A\sin(o-i_2),\quad A\sin(o-2i_2),\quad A\sin(o+i_2);$$
$$A\sin(o-i_3),\quad A\sin(o-2i_3),\quad A\sin(o+i_3).$$

Die Intensität I^2 des durch alle 10 Oeffnungen geb ten Lichtes ist daher nach (2 u. 3)

27)
$$\begin{aligned} I^2 = {} & A^2[(1+\cos i_1+\cos 2i_1+\cos i_1+\cos i_2 \\ & +\cos 2i_2+\cos i_2+\cos i_3+\cos 2i_3+co \\ & +(\sin i_1+\sin 2i_1-\sin i_1+\sin i_2+si \\ & -\sin i_2+\sin i_3+\sin 2i_3-\sin \\ = {} & A^2[(1+2\cos i_1+\cos 2i_1+2\cos i_2+co \\ & +2\cos i_3+\cos 2i_3)^2+(\sin 2i_1+si \\ & +\sin 2 \end{aligned}$$

oder abgekürzt $I^2 = A^2.R^2$.

Da A im Schwerpunkt liegt, so verschwindet die Su der Gangunterschiede der drei Oeffnungen m, n, r, es wird $i_1+i_2+i_3=0$.

I^2 erreicht sein Maximum $10A^2$, wenn $i_1 = \pm$ und zugleich $i_2 = \pm 2n\pi$ ist. Durch geometrische struction findet man wiederum, dafs die diesen Bedin gen entsprechenden Oerter in Ebenen liegen, welche m_1m' und n_1n' senkrecht stehen und beziehlich um und $\pm\frac{nl}{e_2}$ von einander entfernt sind. Die Durchschn linien dieser Ebenen, oder im Grundrifs die Durchschn punkte der Projektionen derselben, sind die Oerter Maxima von R. Die durch die Variation von R^2 erze Intensitätsabnahme rings um diese Punkte ist dieselbe, um den Punkt A, da für die correspondirenden Punkte Gröfsen i_1, i_2, i_3 um eine gerade Zahl π gröfser oder ner sind. Das Fundamentalbild, welches durch den, der Gestalt und Gröfse der Oeffnungen abhängenden, tor A^2 bestimmt wird, und auf welches die Partialb

des Faktors R^2 aufgetragen erscheinen, bewirkt allein die Verschiedenheit der letzteren im Totalbilde.

Da R^2 ungeändert bleibt, wenn i_1 und i_2 zugleich ihr Zeichen wechseln, so ist der von diesem Faktor herrührende Theil der Intensität auf den entgegengesetzten Seiten eines Maximums derselbe; und da überdies R^2 nach i_1, i_2, i_3 symmetrisch ist, so reicht die Construction eines kleinen Sektors von R^2 hin, um dessen ganzes Bild zu haben.

Was die Intensität in den Hauptrichtungen betrifft, so hat man 1) in der auf $r_1 r'$ senkrechten Richtung, da $i_3 = 0$, und mithin $i_2 = -i_1$ daselbst ist,

$$28)\quad I^2 = A^2(1+4\cos i_1+2\cos 2i_1)^2;$$

2) in der auf nr senkrechten Richtung, wegen

$$i_2 = i_3 = -\tfrac{1}{2}i_1,$$

$$29)\quad I^2 = A^2[(1+4\cos i_1+\cos 2i_1+4\cos\tfrac{1}{2}i)^2 + (\sin 2i_1 - 2\sin i_1)^2].$$

Man vergleiche die Construction Seite 29. Der zweite Faktor in (28) ist der durch Fig. 23 dargestellte, der zweite Faktor in (29) ist der in Fig. 24 dargestellte.

Für das aus 19 Dreiecken bestehende Herschelsche Dreieckgitter (Fig. 25) erhält man, wenn die Phasenunterschiede der in den Richtungen 1, 1; 2, 2; 3, 3 liegenden Dreiecke durch i_1, i_2, i_3 bezeichnet werden, und i_4, i_5, i_6 dieselben für die Dreieckspaare 4, 4; 5, 5; 6, 6 bedeuten:

$$30)\quad \left\{\begin{aligned} I^2 = A^2\{(&1+2\cos i_1+2\cos i_2+2\cos i_3+2\cos i_4 \\ &+2\cos i_5+2\cos i_6+\cos 2i_1+\cos 2i_2+\cos 2i_3 \\ &+\cos 3i_1+\cos 3i_2+\cos 3i_3)^2+(\sin 2i_1+\sin 2i_2 \\ &+\sin 2i_3+\sin 3i_1+\sin 3i_2+\sin 3i_3)^2\}. \end{aligned}\right.$$

In der Richtung 1,2 hat man daher, wegen $i_3 = 0$, $i_2 = -i_1$, $i_4 = i_5 = -i_1$ und $i_6 = 2i_1$:

$$31)\quad I^2 = A^2(5+8\cos i_1+4\cos 2i_1+2\cos 3i_1)^2,$$

und in der auf 2,3 senkrechten Richtung, wegen $i_2 = i_3 = -\frac{1}{2}i_1$, $i_4 = 0$, $i_5 = -\frac{3}{2}i_1$, $i_6 = \frac{3}{2}i_1$:

$$32)\quad \left\{\begin{aligned} I^2 = A^2\{(&3+4\cos\tfrac{1}{2}i_1+4\cos i_1+6\cos\tfrac{3}{2}i_1 \\ &+\cos 2i_1+\cos 3i_1)^2+(2\sin i_1+2\sin\tfrac{3}{2}i_1-\sin 2i_1 \\ &-\sin 3i_1)^2\}. \end{aligned}\right.$$

Nach den beiden letzten Formeln läfst sich die Intensität berechnen und construiren.

II. Beugung durch zwei congruente Dreiecke von entgegengesetzter Lage.

Die Oeffnungen seien (Fig. 48) ABC und $A'B'C'$ und in ihnen $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$, und die Linie $AA' = d$. Ferner seien δ und δ' die Winkel, welche AA' mit denjenigen Linien bildet, in welchen der Schirm beziehlich von den Wellen-Ebenen der einfallenden und gebeugten Strahlen geschnitten wird.

Für das Dreieck ABC hat man nach (10, a), wenn man bedenkt, dafs für ein Dreieck $\varDelta_4 = \varDelta_3$ ist,

$$33)\quad \begin{cases} S(a) = \dfrac{2A\cos\alpha}{\varkappa\varDelta_{2-1}}\left[M_{3-2}\sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{3+2})\right. \\ \qquad\qquad \left.- M_{3-1}\sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{3+1})\right] \\ S(b) = \dfrac{2A\cos\alpha}{\varkappa\varDelta_{2-1}}\left[-M_{3-2}\cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{3+2})\right. \\ \qquad\qquad \left.+ M_{3-1}\cos(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{3+1})\right]. \end{cases}$$

Nimmt man den Schwerpunkt der Figur (O) zum optischen Mittelpunkt, so werden die Entfernungen der entsprechenden Dreiecksspitzen von den durch O gehenden Richtungen, in welchen der Schirm die direkten und gebeugten Wellen-Ebenen schneidet, einander gleich, liegen aber auf entgegengesetzten Seiten. Man erhält daher für das Dreieck $A'B'C'$ die Werthe von $S(a)$ und $S(b)$, welche wir durch $S(a')$ und $S(b')$ bezeichnen wollen, aus (33), wenn man den Differenzen $\varDelta_{2-1}$, $\varDelta_{3-1}$, $\varDelta_{3-2}$, $\varDelta_{3+1}$, $\varDelta_{3+2}$ das entgegengesetzte Zeichen giebt. Es wird demnach:

$$S(a)+S(a') = \frac{4A\cos\alpha}{\varkappa\varDelta_{2-1}}\left[M_{3-2}\sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{3+2}) - M_{3-1}\sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{3+1})\right]$$

und $S(b)+S(b') = 0$, und man erhält mithin für die Gesammtintensität:

$$34)\quad I^2 = \left(\frac{4A\cos\alpha}{\varkappa\varDelta_{2-1}}\right)^2\left[M_{3-2}\sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{3+2}) - M_{3-1}\sin(\tfrac{1}{2}\varkappa\varDelta_{3+1})\right]^2.$$

Die Werthe von $\varDelta_{2-1}$, $\varDelta_{3-1}$, $\varDelta_{3-2}$ sind durch die

Gleichungen (16, *a*) gegeben, während

$$-\varkappa\Delta_3 = \tfrac{1}{2}\varkappa d(\sin\delta'\sin\alpha' - \sin\delta\sin\alpha) = \tfrac{1}{2}d_1$$

sich findet, und hieraus sich ableiten läfst:

$$\varkappa\Delta_{3+2} = 2\varkappa\Delta_3 - \varkappa\Delta_{3-2} = c_1 - d_1$$

und

$$\varkappa\Delta_{3+1} = 2\varkappa\Delta_3 - \varkappa\Delta_{3-1} = b_1 - d_1.$$

Die Gleichung (34) geht daher über in:

$$(35)\quad I^2 = \left(\frac{4A\cos\alpha}{a_1}\right)^2\left[\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1}\sin\tfrac{1}{2}(d_1-b_1) - \frac{\sin\frac{1}{2}c_1}{\frac{1}{2}c_1}\sin\tfrac{1}{2}(d_1-c_1)\right]^2.$$

Für senkrecht auffallendes Licht hat man:

$$a_1 = \varkappa a\sin\alpha_2\sin\alpha', \qquad b_1 = \varkappa b\sin\beta_2\sin\alpha',$$
$$c_1 = \varkappa c\sin\gamma_2\sin\alpha', \qquad d_1 = \varkappa d\sin\delta''\sin\alpha'.$$

In der auf *BC* senkrechten Richtung wird überdies $\alpha_2 = 0$, also auch $\alpha_1 = 0$, und wegen $a_1 + b_1 = c_1$, wenn man die auf *a* senkrechte Höhe mit h' bezeichnet,

$$b_1 = c_1 = \varkappa h'\sin\alpha' = h_1, \qquad \text{folglich}$$

$$(a)\quad I^2 = \left(\frac{4A}{h_1}\right)^2\left[\sin(\tfrac{1}{2}d_1 - h_1) - \frac{\sin\frac{1}{2}h_1}{\frac{1}{2}h_1}\sin\tfrac{1}{2}(d_1-h_1)\right]^2.$$

In der auf *AC* senkrechten Richtung erhält man eben so, wenn man die auf *b* senkrechte Höhe h'' nennt, und $\varkappa h''\sin\alpha' = h_2$ setzt,

$$(b)\quad I^2 = \left(\frac{4A}{h_2}\right)^2\left[\sin\tfrac{1}{2}d_1 - \frac{\sin\frac{1}{2}h_2}{\frac{1}{2}h_2}\sin\tfrac{1}{2}(d_1-h_2)\right]^2;$$

und in den auf *AB* senkrechten Richtungen, wenn man die auf *c* senkrechte Höhe h''' nennt, und $\varkappa h'''\sin\alpha' = h_3$ setzt,

$$(c)\quad I^2 = \left(\frac{4A}{h_3}\right)^2\left[\sin\tfrac{1}{2}d_1 - \frac{\sin\frac{1}{2}h_3}{\frac{1}{2}h_3}\sin\tfrac{1}{2}(d_1+h_3)\right]^2.$$

Für die auf *A'C* senkrechte Richtung wird $d_1 = b_1$, und für die auf *A'B* senkrechte Richtung $d_1 = c_1$. Berücksichtigt man die Gleichung $a_1 + b_1 = c_1$, und setzt

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a_1}{\frac{1}{2}a_1} = A_1, \qquad \frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1} = B_1, \qquad \frac{\sin\frac{1}{2}c_1}{\frac{1}{2}c_1} = C_1,$$

so erhält man als entsprechende Werthe von I^2:

$$I^2 = 4A^2.A_1^2.C_1^2 \quad \text{und} \quad I^2 = 4A^2.A_1^2.B_1^2;$$

und ebenso für die Richtung, in welcher $d_1 = b_1 + c_1$ wird,

$$I^2 = 4A^2.B_1^2.C_1^2.$$

Man sieht, dafs diese Intensitätsausdrücke mit denen eines Parallelogramms zusammenfallen, dessen Seiten beziehlich a, c; a, b; b, c, und dessen Winkel B, C, A sind.

Haben die Dreiecke solche Form und Lage (Fig. 26), dafs man sie als ein Quadrat $AEA'D$ betrachten kann, welches durch einen der Diagonale DE parallelen Streif $B'CBC''$ bedeckt ist, so wird, wenn die Breite dieses Streifs dem vierten Theil der Diagonale gleich ist, $h' = Af$, $h'' = h''' = AB = b = c$, $d = \frac{8}{3}h' = \frac{4}{3}h''$, mithin $d_1 = \frac{8}{3}h_1$ $= \frac{4}{3}h_2$. Die Gleichung (a) geht daher wegen $\frac{1}{2}d_1 - h_1 = \frac{1}{3}h_1$, $\frac{1}{2}d_1 - \frac{1}{2}h_1 = \frac{5}{6}h_1$ über in:

$$I^2 = \left(\frac{4A}{h_1}\right)^2 \left(\sin\tfrac{1}{3}h_1 - \frac{\sin\frac{1}{2}h_1}{\frac{1}{2}h_1}\sin\tfrac{5}{6}h_1\right)^2,$$

und die Gleichungen (b u. c) wegen $d_1 - h_2 = \frac{1}{3}h_1$, in

$$I^2 = \left(\frac{4A}{h_2}\right)^2 \left(\sin\tfrac{2}{3}h_2 - \frac{\sin\frac{1}{2}h_2}{\frac{1}{2}h_2}\sin\tfrac{1}{6}h_2\right)^2.$$

In der auf $A'B$ senkrechten Richtung GH wird

$$a\sin\alpha_2 = GH = GA + AH = b\sqrt{\tfrac{16}{17}} + c\sqrt{\tfrac{1}{17}} = \frac{5b}{\sqrt{17}}$$

und

$$c\sin\gamma_2 = AH = \frac{b}{\sqrt{17}};$$

und ebenso in der auf AC'' senkrechten Richtung rs. In der Richtung DE wird endlich $b\sin\beta_2 = c\sin\gamma_2 = Bf = \frac{1}{2}a$, also $b_1 = c_1 = \frac{1}{2}a_1$ und $I^2 = 4A^2.A_1^2$, und die Intensität wird demnach die eines Quadrats, deren Diagonale a ist, in der Richtung dieser letzteren.

III. Beugung durch ungleiche Oeffnungen.

Sind die Oeffnungen ähnliche Figuren und concentrisch, so ist die resultirende Vibrations-Intensität wegen des in allen Punkten gleichen Ganges der Differenz derjenigen Vibrations-Intensitäten gleich, welche jede Oeffnung für sich geben würde.

Sind die Oeffnungen z. B. Parallelogramme, und für das gröfsere

$$I' = A'\cos\alpha\frac{\sin\frac{1}{2}a_1}{\frac{1}{2}a_1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}b_1}{\frac{1}{2}b_1} = A'\cos\alpha.A_1.B_1,$$

für das kleinere

$$I'' = A'' \cos\alpha \frac{\sin\frac{1}{2}a_2}{\frac{1}{2}a_2} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}b_2}{\frac{1}{2}b_2} = A'' \cos\alpha . A_2 . B_2,$$

so ist die resultirende Intensität:

$$I^2 = (I' - I'')^2 = (A'.A_1.B_1 - A''.A_2.B_2)^2 \cos^2\alpha,$$

während noch, da sich die Vibrations-Intensitäten des einfallenden Lichtes wie die Flächen verhalten müssen, $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ und $A' : A'' = a_1^2 : a_2^2 = b_1^2 : b_2^2$ ist.

Befinden sich die Oeffnungen neben einander, und sind die resultirenden Oscillations-Geschwindigkeiten des durch die einzelnen Oeffnungen gebeugten Lichtes $A' \sin o$ und $A'' \sin(o - i)$, so ist die Gesammt-Intensität

$$I^2 = A'^2 + A''^2 + 2A'A'' \cos i.$$

Sämmtliche von Schwerd angestellte Vergleichungen der hiernach berechneten Resultate mit den Beobachtungen haben auf das Ueberraschendste die Darstellbarkeit der Erscheinungen bis auf die kleinsten Einzelheiten durch die vorstehende Analyse bewährt.

B. *Die Newtonschen Ringe.*

Die Bildung der Newtonschen Ringe beruht auf der Interferenz zwischen den Partialstrahlen solcher Lichtbündel, welche von zwei sehr nahen sphärischen Flächen (durch die das zwischen ihnen liegende Mittel von den beiden angrenzenden getrennt wird) durch partielle Reflexionen und Brechungen getheilt worden sind.

Nennen wir die Fläche, welche der Lichtquelle zugekehrt ist, die obere, die zweite Fläche die untere, und betrachten in einem kleinen Umkreise um den Einfallspunkt eines Strahls die Entfernung der Flächen als constant und gleich d. Ist dann α der Einfallswinkel und α' der Brechungswinkel an der obern Fläche, so ist der Einfallswinkel an der untern Fläche gleichfalls α' und der Brechungswinkel *etwa* α''. *Ferner* seien die Vibrations-Intensitäten

des reflektirten und gebrochenen Lichtes beziehlich 1) R und R' für diejenigen Strahlen, welche im ersten Mittel auf die obere Fläche unter dem Winkel α einfallen, 2) R_2 und R_2' für diejenigen Strahlen, welche im zweiten Mittel auf dieselbe Fläche unter dem Winkel α' einfallen, 3) R_1 und R_1' für diejenigen Strahlen, welche im zweiten Mittel auf die untere Fläche unter dem Winkel α' einfallen: überall vorausgesetzt, dafs die Intensität des Einfallslichtes Eins ist.

Ringe im reflektirten Licht zwischen durchsichtigen Substanzen.

Vereinigen wir nun das an der obern Fläche reflektirte Lichte mit demjenigen Lichte, welches nach 2, 4, 6... Reflexionen zwischen den Flächen aus der oberen wieder heraustritt, und nehmen die Intensität des Einfallslichtes zur Einheit, so ist die Vibrations-Intensität des einmal reflektirten Lichtes R, die des dreimal reflektirten $R'R_1R_2'$, die des fünfmal reflektirten $R'R_1^2R_2R_2'$ etc., so dafs nach jeder neuen Doppel-Reflexion der Faktor R_1R_2 hinzutritt. Der Wegunterschied je zwei auf einander folgenden Strahlen ist der doppelte Weg zwischen beiden Flächen, nämlich $2d\cos\alpha'$, also der Phasenunterschied $\frac{4\pi}{l}d\cos\alpha'$. Bezeichnen wir den letzteren durch Δ und die Phase des einfallenden Lichtes durch ξ, so werden die gleichzeitigen Phasen der Strahlen nach der Reihe: ξ, $\xi-\Delta$, $\xi-2\Delta$, $\xi-3\Delta$ etc., also ist die Summe der Oscillationsgeschwindigkeiten aller dieser Partialstrahlen:

$$R\sin\xi + R'R_1R_2'\{\sin(\xi-\Delta) + R_1R_2\sin(\xi-2\Delta) + R_1^2R_2^2\sin(\xi-3\Delta) + \ldots\}.$$

Die in der Klammer enthaltene Reihe läfst sich summiren. Schreibt man nämlich dieselbe:

$$\sin\xi\{\cos\Delta + R_1R_2\cos2\Delta + (R_1R_2)^2\cos3\Delta + \ldots\ldots + (R_1R_2)^n\cos(n+1)\Delta\}$$
$$-\cos\xi\{\sin\Delta + R_1R_2\sin2\Delta + (R_1R_2)^2\sin3\Delta + \ldots\ldots + (R_1R_2)^n\sin(n\cdot\ \Delta\},$$

und

nd bezeichnet den Faktor von $sin\xi$ durch $A cos\psi$, den Faktor von $cos\xi$ durch $A sin\psi$, so wird die Reihe gleich
$$A sin(\xi - \psi).$$

Es ist aber, wenn man $cos\Delta + \sqrt{-1}\, sin\Delta = h$ setzt, da $cos\, m\Delta + \sqrt{-1}\, sin\, m\Delta = (cos\Delta + \sqrt{-1}\, sin\Delta)^m$ ist,
$$A(cos\psi + \sqrt{-1}\, sin\psi) = h + R_1 R_2 h^2 + (R_1 R_2)^2 h^3 + \ldots . (R_1 R_2)^n h^{n+1}.$$

Dies ist eine geometrische Reihe, deren Summation, da n sehr grofs und $R_1 R_2 < 1$ ist, giebt:
$$A(cos\psi + \sqrt{-1}\, sin\psi) = \frac{h}{1 - R_1 R_2 h}.$$

Restituirt man für h seinen Werth, so ergiebt die Gleichsetzung der reelen und imaginären Theile der Gleichung, $1 - R_1 R_2 cos\Delta = m$ und $(R_1 R_2) sin\Delta = n$ setzend,
$$A(m\, cos\psi + n\, sin\psi) = cos\Delta$$
$$A(m\, sin\psi - n\, cos\psi) = sin\Delta.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:
$$A = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad sin\psi = \frac{n\, cos\Delta + m\, sin\Delta}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$
$$cos\psi = \frac{m\, cos\Delta - n\, sin\Delta}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$
mithin
$$A sin(\xi - \psi) = \frac{sin\xi(cos\Delta - R_1 R_2) - cos\xi\, sin\Delta}{m^2 + n^2}$$
$$= \frac{sin(\xi - \Delta) - R_1 R_2 sin\xi}{m^2 + n^2}.$$

Der obige Ausdruck für die Oscillationsgeschwindigkeit wird demnach, da $m^2 + n^2 = 1 - 2R_1 R_2 cos\Delta + R_1^2 R_2^2$ ist,
$$36) \quad R sin\xi + R' R_1 R_2' \left[\frac{sin(\xi - \Delta) - R_1 R_2 sin\xi}{1 - 2R_1 R_2 cos\Delta + R_1^2 R_2^2} \right].$$

Nun ist nach Abschn. II. *A*, IV. u. III., wenn das einfallende Licht senkrecht gegen die Reflexions-Ebene polarisirt ist,
$$R' sin\alpha' cos\alpha' = (1 - R) sin\alpha\, cos\alpha,$$
$$R_2' sin\alpha\, cos\alpha = (1 - R_2) sin\alpha' cos\alpha',$$
$$R_1' sin\alpha'' cos\alpha'' = (1 - R_1) sin\alpha' cos\alpha',$$

und wenn das einfallende Licht nach der Reflexions-Ebene polarisirt ist,

$$R' \cos\alpha' = (1-R)\cos\alpha \qquad R_2' \cos\alpha = (1-R_2)\cos\alpha',$$
$$R_1' \cos\alpha'' = (1-R_1)\cos\alpha'.$$

Ferner ist nach Abschn. II. *A*, 1 u. 3 für den ersten Fall

$$R = \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')}, \quad R_1 = \frac{tg(\alpha'-\alpha'')}{tg(\alpha'+\alpha'')}, \quad R_2 = \frac{tg(\alpha'-\alpha)}{tg(\alpha'+\alpha)},$$

und für den zweiten Fall

$$R = -\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}, \quad R_1 = -\frac{\sin(\alpha'-\alpha'')}{\sin(\alpha'+\alpha'')},$$
$$R_2 = -\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{\sin(\alpha'+\alpha)}.$$

Es ist daher stets $R_2 = -R$ und $R'R_2' = 1-R^2$, und der Ausdruck (36) geht über in:

$$R\sin\xi + R_1(1-R^2)\left(\frac{\sin(\xi-\Delta)+RR_1\sin\xi}{1+2RR_1\cos\Delta+R^2R_1^2}\right).$$

Bringt man denselben auf die Form $P\sin\xi + Q\cos\xi$, so erhält man, wenn man $1+2RR_1\cos\Delta+R^2R_1^2$ durch W bezeichnet,

$$WP = WR + R_1(1-R^2)(\cos\Delta + RR_1),$$
$$WQ = -R_1(1-R^2)\sin\Delta,$$

und die Intensität des interferirten Lichtes ist daher

$$37)\quad P^2+Q^2 = \frac{R^2+R_1^2+2RR_1\cos\Delta}{1+2RR_1\cos\Delta+R^2R_1^2}.$$

Im Mittelpunkt der Ringe, d. h. an der Stelle, wo beide Flächen sich berühren, ist $d=0$, also auch $\Delta=0$, und die Intensität daher

$$38)\quad \left(\frac{R_1+R}{1+RR_1}\right)^2.$$

Denselben Ausdruck erhält man für die Intensität derjenigen Kreise, in welchen $d = \frac{2al}{4\cos\alpha'}$ ist, unter a die ganzen Zahlen 1, 2, 3.... verstanden.

In denjenigen zwischen diesen liegenden Kreise gegen, in welchen $d = \frac{(2a+1)l}{4\cos\alpha'}$ ist, wird $\cos\Delta = -$ und daher die Intensität:

$$39)\quad \left(\frac{R_1 - R}{1 - RR_1}\right)^2.$$

Von den beiden Werthen (38 u. 39) entspricht einer dem Maximum, der andere dem Minimum der Intensität.

Ist folglich die Differenz beider, nämlich

$$-\frac{4RR_1(1-R^2)(1-R_1^2)}{(1-R^2R_1^2)^2},$$

positiv, so ist die Mitte dunkel, und die zu ihm gehörigen Kreise (38) entsprechen den Ringen der geringsten Helligkeit, die andern Kreise (39) den hellsten Ringen; ist die Differenz negativ, so werden die Mitte und die zugehörigen Kreise die gröfste, und die andern Kreise die geringste Helligkeit haben.

Ist das einfallende Licht nach der Einfalls-Ebene polarisirt, so ist, da stets $sin^2(\alpha+\alpha') > sin^2(\alpha-\alpha')$ und $sin^2(\alpha'+\alpha'') > sin^2(\alpha'-\alpha'')$ bleibt, $1-R^2$ und $1-R_1^2$ immer positiv, und da auch R und R_1 stets verschiedene Zeichen haben, so lange das zweite Mittel das Licht schwächer oder stärker bricht, als die beiden andern, so ist die Mitte in diesen Fällen immer dunkel.

Ist das einfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt, so ist wiederum $1-R^2$ und $1-R_1^2$ positiv, da stets $tg^2(\alpha+\alpha') > tg^2(\alpha-\alpha')$ und $tg^2(\alpha'+\alpha'') > tg^2(\alpha'-\alpha'')$ bleibt, und die Mitte wird hell oder dunkel, je nachdem R und R_1 gleiche oder verschiedene Zeichen haben. Bricht nun das zweite Mittel das Licht schwächer oder stärker als die beiden umgebenden, so haben R und R_1 verschiedene Zeichen, wenn $\alpha+\alpha'$ und $\alpha'+\alpha''$ zugleich gröfser oder zugleich kleiner als 90° sind; sie haben gleiche Zeichen, wenn nur eine dieser Summen gröfser als 90° ist. Die Mitte ist also nur dann hell, wenn α' zwischen den Polarisationswinkeln des ersten und dritten Mittels liegt. An den beiden Grenzen, wo $\alpha+\alpha' = 90°$ und $\alpha'+\alpha'' = 90°$ ist, hören die Reflexionen im ersten Fall an der ersten, im zweiten Fall an der zweiten Fläche auf, und es verschwinden daher die Ringe.

Bei den *Zwischenwerthen* von α', für welche die Mitte

weifs wird, mufs, wenn der erste Ring völlig dunkel ist, $\frac{R_1 - R}{1 - RR_1} = 0$, also $R_1 = R$ sein, mithin die Intensität der Mitte $\left(\frac{2R}{1+R^2}\right)^2$. Der Einfallswinkel, unter welchem dieses eintritt, ergiebt sich aus der Gleichung $R = R_1$, welche, wenn man für R und R_1 ihre Werthe setzt, nach einigen Reductionen $\sin^2 2\alpha' = \sin 2\alpha \sin 2\alpha''$ oder

$$\cos^2\alpha' = \frac{1}{nn'} \cos\alpha \cos\alpha''$$

giebt, wo n und n' die Brechungsverhältnisse des ersten und dritten Mittels in Bezug auf das zweite Mittel bedeuten.

Ringe im durchgelassenen Lichte.

Vereinigen wir das von beiden Flächen ohne vorgängige Reflexion durchgelassene Licht mit demjenigen, welches nach einer ungeraden Zahl Reflexionen zwischen den Flächen aus der unteren heraustritt, und nehmen die Intensität des Einfallslichtes zur Einheit, so ist die Vibrations-Intensität des blofs gebrochenen Lichtes $R'R_1'$, die des einmal reflektirten $R'R_1R_2R_1'$, die des dreimal reflektirten $R'R_1^2R_2^2R_1'$ etc., so dafs diese Gröfsen wiederum eine geometrische Reihe bilden, deren Exponent R_1R_2 ist. Bedeutet ξ die Phase des Strahls $R'R_1'$ bei der Ankunft an der zweiten Fläche, und behalten wir im übrigen die obige Bezeichnung bei, so wird die Summe der Oscillationsgeschwindigkeiten der interferirenden Strahlen:

$$R'R_1'\left(\sin\xi + R_1R_2\frac{\sin(\xi - \Delta) - R_1R_2\sin\xi}{1 - 2R_1R_2\cos\Delta + R_1^2R_2^2}\right),$$

oder wegen $R_2 = -R_1$

$$R'R_1'\left(\sin\xi - RR_1\frac{\sin(\xi - \Delta) + RR_1\sin\xi}{W}\right).$$

Bringt man den eingeklammerten Ausdruck auf die Form $P\sin\xi + Q\cos\xi$, so erhält man

$$WP = W - RR_1(\cos\Delta + RR_1), \quad WQ = RR_1\sin\Delta,$$

also $$P^2 + Q^2 = \frac{1}{W},$$

so dafs die Intensität des interferirenden Lichtes ist:

$$40)\quad \frac{R'^2 R_1'^2}{1 + 2RR_1 \cos\Delta + R^2 R_1^2}.$$

Die Maxima und Minima sind dann

$$\left(\frac{R'R_1'}{1+RR_1}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{R'R_1'}{1-RR_1}\right)^2,$$

von denen der erste Ausdruck zugleich der Intensität der Mitte angehört.

Bricht das zweite Mittel das Licht stärker als das erste und dritte, so wird die Differenz beider Ausdrücke, nämlich

$$4R'^2 R_1'^2 \frac{RR_1}{(1-R^2R_1^2)^2},$$

nur dann positiv, wenn das Einfallslicht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist, und α' zwischen den Polarisationswinkeln des ersten und dritten Mittels liegt, da nur in diesem Falle R und R_1 gleiche Zeichen haben. Die Mitte ist also durchgängig hell, wenn sie in den reflektirten Ringen dunkel ist, und umgekehrt.

Ist das erste und dritte Mittel von gleicher Brechbarkeit, so dafs $\alpha'' = \alpha$ ist, so wird $R'R_1' = (1-R)(1-R_1)$.

Airy hat ferner in den *Cambridge Transactions IV.* (Pogg. Ann. XXVI, p. 128) die Modificationen der Ringe, welche eintreten, wenn das dritte Mittel ein Metall ist, aus den beiden Voraussetzungen analytisch abgeleitet, dafs L_1 für jede Incidenz dasselbe Vorzeichen habe, und dafs die Undulationstheile, um welche das vom Metall reflektirte Licht gegen das Einfallslicht verzögert wird, für alle Incidenzen nur klein seien, das letztere mag nach der Reflexions-Ebene oder senkrecht darauf polarisirt sein. Die zweite Annahme streitet indefs gegen die in Abschn. II, D aufgestellten Principien, da denselben zufolge die Verzögerungsunterschiede der nach der Einfalls-Ebene und senkrecht darauf zerlegten Vibrationen von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen, wenn α von 0^0 bis 90^0 wächst.

Behielte man die Annahme der Unveränderlichkeit des

Vorzeichens von R_1 bei, und nähme die Verzögerung des nach der Reflexions-Ebene polarisirten Theils des reflektirten Lichtes als gering an (welches letztere sehr wahrscheinlich ist), so würde bei der Incidenz von 90° und in deren Nähe die Mitte der Ringe sich als dunkel, und nicht als hell ergeben, wenn das einfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist. Es scheint daher nothwendig, einen Zeichenwechsel in R_1 zu statuiren.

Fünfter Abschnitt.

Erscheinungen, welche auf der Aenderung der Strahlenrichtung durch Reflexion und Refraction beruhen.

Erste Abtheilung.

Uebersicht über die Erscheinungen und ihre Gesetze.

Die Reflexions- und Refractions-Erscheinungen, welche von der Richtung der Strahlen abhängen, beziehen sich: 1) auf die Vertheilung des Lichtes in dem von den reflektirten und gebrochenen Strahlen durchlaufenen Raum, 2) auf die Entstehung der katoptrischen (durch Reflexion entstandenen) und dioptrischen (durch Refraction entstandenen) Bilder derjenigen Punkte, von denen das Licht ausgeht.

Von den Strahlen, welche ein leuchtender Punkt nach allen Richtungen hin aussendet, kommt nur ein dünner Strahlenkegel ins Auge, dessen Gipfel in diesem Punkte liegt, wenn der Raum zwischen dem Auge und dem Lichtpunkt ununterbrochen mit einem und demselben homogenen (durchsichtigen) Mittel erfüllt ist. Den Ort des Lichtpunktes, der uns durch das Eindringen der Strahlen ins Auge sichtbar wird, versetzen wir beiläufig in die Richtung der Axe jenes Kegels. Wird nun durch irgend ein dazwischentretendes Mittel *die Richtung* der Strahlen so geändert, dass

sie so divergiren, dafs ihre Verlängerungen in einem Punkte zusammentreffen, so verhält sich der durch die Verlängerungen ergänzte Konus wie ein Strahlenkegel, welcher von dem Lichtpunkt ausgehend direkt das Auge trifft, und wir sehen in seiner Axe ein Bild desjenigen Punktes, von welchem ursprünglich das Licht ausging. Ein solches Bild heifst ein virtuelles Bild, und zwar ein katoptrisches oder dioptrisches, je nachdem es durch Reflexion oder Refraction entstanden ist. Fängt man die Strahlen mit einem Schirm auf, so erscheint, wenn alles fremde Licht abgehalten wird, auf demselben ein in allen Punkten gleicherhellter Fleck, welcher den Durchschnitt des Strahlenkegels darstellt.

Convergiren die von einem Punkt ausgesendeten Strahlen dagegen nach der Reflexion oder Refraction gegen einen einzigen Punkt hin, so divergiren sie wiederum nach dem Durchgang durch diesen Durchschnittspunkt, und der sich von da ab ausbreitende Strahlenkegel verhält sich gleichfalls wie ein direkter. Trifft derselbe das Auge, so sehen wir daher in jenem Durchschnittspunkt ein Bild des Lichtpunktes. Ein solches Bild heifst ein wahres Bild. Fängt man das Licht mit einem Schirm auf, so erscheint auf demselben das Bild des strahlenden Punktes, wenn man ihn in den Durchschnittspunkt der Strahlen, einen in allen Punkten gleicherhellten Fleck, welcher den Durchschnitt des Kegels darstellt, wenn man den Schirm vor oder hinter jenen Durchschnittspunkt hält. Derjenige Punkt, in welchem sich die Verlängerungen der Strahlen im ersten Falle schneiden, heifst virtueller Brennpunkt des reflektirenden oder brechenden Körpers; derjenige, in welchem sich (im zweiten Falle) die Strahlen selbst schneiden, der wahre Brennpunkt desselben.

Schneiden sich endlich weder die Strahlen, noch ihre Verlängerungen in einem einzigen Punkt (oder wenigstens nahe in demselben Punkt), so wird kein Bild sichtbar, und hält man ihnen einen Schirm entgegen, so kann der auf demselben erscheinende erleuchtete Fleck in den verschie-

denen Punkten nicht mehr gleich erhellt sein, da nicht jeder Punkt desselben von einer gleichen Menge Strahlen getroffen wird; ja es wird sich diese Lichtvertheilung auch mit der Entfernung des Schirms ändern.

Ebenso wie leuchtende Punkte verhalten sich auch die Punkte eines erleuchteten Körpers, dessen Oberfläche nicht vollkommen glatt ist. Fällt nämlich ein Lichtstrahl auf eine gekrümmte Fläche, so verhält sich die letztere in Bezug auf Reflexion und Refraction wie eine durch den Einfallspunkt gelegte Tangential-Ebene. Die Richtung des Einfallslichtes ist daher fast in jedem Punkte eines nicht vollkommen glatten Körpers eine andere. Innerhalb eines sehr kleinen Raums wird daher selbst parallel auffallendes Licht nach allen möglichen Richtungen reflektirt, und von dem Licht, welches von jeder wahrnehmbaren Stelle divergirend ausfährt, mufs ein Strahlenkegel in das auf ihn gerichtete Auge kommen. Die Punkte rauher Oberflächen sind deswegen, wie leuchtende Punkte, sichtbar, und geben unter denselben Bedingungen Bildern ihre Entstehung, unter welchen Lichtpunkte solche liefern.

Die unregelmäfsige Reflexion an der Oberfläche rauher Körper heifst Lichtzerstreuung.

A. *Katoptrik.*

Denken wir uns einen Körper, dessen (hohle oder erhabene) Oberfläche vollkommen glatt und nach irgend einem beliebigen Gesetz gekrümmt ist, und auf einen Punkt *P* derselben einen Lichtstrahl fallen, so liegt der reflektirte Strahl in der Ebene, welche durch den Einfallsstrahl und die, in diesem Punkt auf der Oberfläche errichtet gedachte, Normale geht, und bildet mit dieser Normale nach dem Grundgesetz der Reflexion denselben Winkel, welchen der Einfallsstrahl mit derselben einschliefst. Die Einfalls-Ebenen derjenigen Strahlen, welche von demselben Lichtpunkt

ausgehend, auf die rings um P liegenden nächst benachbarte Punkte fallen, sind im Allgemeinen sämmtlich verschieden gegen einander geneigt. Es werden daher nur einzelne der ihnen zugehörigen reflektirten Strahlen mit dem in P reflektirten Strahl in einer Ebene liegen, so dafs sich ihre Richtungen schneiden können. — Eine Curve, welche von Punkten P, P_1, P_2, P_3... der reflektirenden Fläche gebildet wird und so liegt, dafs die Richtung des in P reflektirten Strahls von der Richtung des in P_1 reflektirten, die letztere von der Richtung des in P_2 reflektirten Strahls etc. geschnitten wird, heifst reflektirende Curve. Solcher Curven giebt es für jede Fläche und für jede Lage des Lichtpunktes durch jeden Punkt P zwei, und zwar schneiden sich dieselben in P unter rechten Winkeln. Die Durchschnittspunkte der zu einer solchen reflektirenden Curve gehörigen reflektirten Strahlen bilden selber eine Curve, welche die Brennlinie des betreffenden Strahlensystems heifst. Fallen die Durchschnittspunkte zusammen, reducirt sich also die Brennlinie auf einen Punkt, so heifst dieser der Brennpunkt der reflektirenden Curve.

Ebene Spiegel.

Ist die reflektirende Fläche eine Ebene, so ist die eine reflektirende Curve eine Gerade (nämlich die Durchschnittslinie der Spiegel-Ebene mit der Einfalls-Ebene), und die zweite ein durch P gehender Kreis, dessen Mittelpunkt im Fufspunkt des Lothes liegt, welches vom leuchtenden Punkt auf den Spiegel sich ziehen läfst.

Es bezeichne in Fig 49 AB den Durchschnitt des Spiegels mit der Einfalls-Ebene, und SP, SP_1, SP_2 seien von S ausgehende, nach den Punkten P, P_1, P_2 dieses Durchschnitts gerichtete Einfallsstrahlen, PQ, P_1Q_1, P_2Q_2 die zugehörigen reflektirten Strahlen. Dafs die Verlängerung der letzteren sich schneiden müssen, folgt aus dem Zusammenfallen ihrer Reflexions-Ebenen; sie schneiden sich sämmtlich in einem einzigen Punkte s, welcher in der

auf AB senkrechten Richtung SMs sich befindet, und zwar liegt der Punkt s so, dafs $sM = SM$ ist. Da nämlich die Winkel SPM, SP_1M, SP_2M als Complemente der Einfallswinkel beziehlich den Winkeln MPs, MP_1s, MP_2s als Complementen der Reflexionswinkel gleich sind, so ist $\Delta SPM \cong \Delta sPM$, $\Delta SP_1M \cong \Delta sP_1M$, $\Delta SP_2M \cong \Delta sP_2M$, und mithin $SM = sM$. Die Brennlinie reducirt sich also auf einen einzigen Punkt.

Die zweite reflektirende Curve ist der aus M mit MP als Radius beschriebene Kreis. Da nämlich die reflektirten Strahlen sämmtlich, also auch diejenigen, welche den Punkten der Peripherie entsprechen, durch s gehen, so reducirt sich die Brennlinie dieser zweiten reflektirenden Curve gleichfalls auf den Punkt s.

Ebene Spiegel haben also einen allgemeinen Brennpunkt, d. h. einen Brennpunkt, welcher allen reflektirenden Curven gemeinsam ist, und zwar für jede Entfernung SM des Lichtpunktes S vom Spiegel.

Die von dem Punkt s scheinbar ausgehenden reflektirten Strahlen erzeugen daher in s ein virtuelles Bild des Punktes S, welches so weit hinter dem Spiegel liegt, als der strahlende Punkt S selbst vor dem Spiegel.

Denkt man sich in S statt eines Punktes irgend einen erleuchteten Gegenstand, so giebt jeder Punkt der Oberfläche desselben ein Bild, und man erblickt ein Bild des ganzen Gegenstandes, welches wegen der gleichen Entfernung jedes strahlenden Punktes und seines Bildes vom Spiegel, genau so gegen die Hinterseite der Spiegel-Ebene liegt, wie der beleuchtete (oder leuchtende) Gegenstand gegen deren Vorderseite liegt. Bei vertikaler Stellung des Spiegels bleibt daher das Bild aufrecht, und nur das Rechts und Links wechselt sich um.

Stellt man einen Gegenstand zwischen zwei parallele Spiegel (welche man sich vertikal denken möge), so wird das Bild des einen Spiegels wiederum vom andern abgespiegelt, so dafs in jedem Spiegel zwei Bilder sichtbar werden; jedes dieser beiden hinzugetretenen Bilder verhält sich

gleichfalls wie ein neuer Gegenstand, giebt im gegenüberstehenden Spiegel noch ein Bild u. s. w., so dafs eine unendliche Zahl von Bildern entsteht, welche aber alle in einer geraden Linie liegen, da die Linie *SM* (vorige Figur), in deren Richtung das erste Bild von *S*, also auch alle übrigen Bilder liegen müssen, bei unveränderter Lage des Gegenstandes dieselbe bleibt. Durch die wiederholten Reflexionen wird aber das Licht so geschwächt, dafs die entfernteren Bilder bald so schwach werden, dafs sie nicht mehr gesehen werden können. Neigt man die beiden Spiegel so gegen einander, dafs sie sich in einer vertikalen Kante berühren, so müssen die Bilder aus ihrer gemeinsamen Richtung heraustreten und sich um die Kante herum lagern. Sämmtliche Bilder befinden sich dabei in gleicher Entfernung von der Kante, und sie sind unter sich gleich weit von einander entfernt, wenn der Lichtpunkt in der Ebene liegt, welche den Winkel zwischen beiden Spiegeln halbirt. Läfst man die Neigung der Spiegel allmälig vor sich gehen, so wird in einer bestimmten Stellung sich ein Bild des einen Spiegels dem correspondirenden des andern so genähert haben, dafs sie zusammenfallen; von da ab können sich alsdann die Bilder nicht mehr vervielfältigen, und die Bilderzahl wird endlich. Dies tritt ein, wenn der Winkel zwischen den Spiegeln (n) ein genauer Theil von 360^0 ist, und zwar ist die Zahl der übrigbleibenden Bilder $\frac{360}{n} - 1$.

Die vorstehenden Behauptungen lassen sich folgendermafsen beweisen. Es seien *ab* und *ac* Fig. 50 die auf der Kante senkrechten Durchschnitte der beiden Spiegel, *S* der leuchtende Punkt, $\angle bac = n$, $\angle caS = u$, $\angle baS = v$. Man erhält alsdann den Ort des ersten Bildes S_1 von S im Spiegel *ac*, wenn man SS_1 senkrecht auf *ac* zieht und $Se = eS_1$ macht. Das Bild S_2 von S_1 im Spiegel *ab* erhält man ferner, wenn man $S_1 S_2$ senkrecht auf *ab* zieht und $dS_2 = dS_1$ macht. Ebenso findet man den Ort S_3 des Bildes von S_2 im Spiegel *ac* u. s. w. Auf dieselbe Weise bestimmt sich der Ort s_1

des Bildes von S in ab, und s_2, s_3 etc. als Ort der von s_1 fernerhin entstehenden Bilder.

Dafs $aS = aS_1 = aS_2 = aS_3$ etc. und $aS = as_1 = as_2 = as_3$ etc. ist, d. h. dafs alle Bilder gleiche Entfernung von c haben, folgt aus den Congruenzen der Dreiecke. Was die Entfernung der Bilder unter sich betrifft, so hat man als Entfernungen der Bilder S_1, S_2, S_3, S_4 etc. von ac:

$caS_1 = u$, $caS_2 = 2S_1ab - S_1ac = 2n + u$, und ebenso
$caS_3 = 4n + u$, $caS_4 = 4n + u$ etc.,

und als Entfernungen der Bilder s_1, s_2, s_3, s_4 etc. von ac:

$cas_1 = n + v$, $cas_2 = n + v$,
$cas_3 = 3n + v$, $cas_4 = 3n + v$ etc.

Hieraus ergeben sich als Entfernungen der Bilder unter sich

$SaS_1 = 2u$	$Sas_1 = 2v$
$S_1as_2 = 2v$	$s_1aS_2 = 2u$
$s_2aS_3 = 2u$	$S_2as_3 = 2v$
etc.	etc.

Es sind dieselben also abwechselnd einander gleich, und sie werden sämmtlich einander gleich, wenn $u = v$ ist, d. h. wenn S in der Halbirungslinie des Winkels bac liegt.

Was die Entfernungen der Bilder von aS betrifft, so hat man

$S_1aS = 2u$	$s_1aS = 2v$
$s_2aS = 2n$	$S_2aS = 2n$
$S_3aS = 2n + 2u$	$s_3aS = 2n + 2v$
$s_4aS = 4n$	$S_4aS = 4n$
$S_5aS = 4n + 2u$	$s_5aS = 4n + 4v$
etc.	etc.,

und allgemein hat man für das 2αte Bild hinter dem Spiegel ac $2\alpha n$, und für das $(2\alpha+1)$te Bild $2\alpha n + 2u$; so wie für das 2αte Bild hinter dem Spiegel ab, $2\alpha n$, und für das $(2\alpha + 1)$te Bild $2\alpha n + 2v$.

Ist nun n ein genauer Theil von 360^0, etwa der $m$te, so dafs $nm = 2\pi$ ist, so ist, wenn m eine gerade Zahl ist, die Entfernung des $m$ten Bildes hinter ac, so wie hinter ab, gleich $nm = 2\pi$; dies Bild würde also mit dem Lichtpunkt S *zusammenfallen*, und es giebt daher nur $m - 1$

Bilder. Ist ferner m eine ungerade Zahl, so ist die Entfernung des $m-1$ten Bildes hinter ac, gleich $(m-2)n+2u$, während die des ersten Bildes hinter ab, gleich $2v$ ist; die Summe beider ist also wegen $u+v=n$, mn oder 2π, d. h. das $m-1$te Bild der einen Seite fällt mit dem ersten der andern Seite zusammen. Es giebt folglich auch für diesen Fall nur $m-1$ Bilder.

Krummflächige Spiegel.

Von den gekrümmten Spiegeln sind nur diejenigen in der Anwendung wichtig, deren Krümmung eine durch Umdrehung eines Kegelschnittes um eine seiner Hauptaxen entstandene Fläche ist.

Von den beiden reflektirenden Curven, welche einen Punkt P irgend einer beliebigen Umdrehungsfläche angehören, ist, wenn der leuchtende Punkt in der Umdrehungsaxe liegt, die eine: der Durchschnitt der durch diese Axe und P gehenden Ebene mit der reflektirenden Fläche, also diejenige Curve, durch deren Umdrehung die letztgenannte Fläche gebildet wird (die Erzeugungscurve); die zweite: der Kreis, in welchem die Umdrehungsfläche von einer durch P gehenden und auf der Umdrehungsaxe senkrechten Ebene geschnitten wird.

Es sei ACB (Fig. 51) die Erzeugungscurve der Spiegelkrümmung, S der in der Umdrehungsaxe SC liegende Lichtpunkt.

Dafs ACB selbst eine reflektirende Curve ist, d. h. dafs sich die in P, P_1, P_2 ... reflektirten Strahlen schneiden müssen, folgt daraus, dafs sie die Ebene SAC zur gemeinsamen Reflexions-Ebene haben. Die durch die Durchschnittspunkte der reflektirten Strahlen gebildete Curve ist die Brennlinie der Linie ACB. Dafs die zu P gehörige zweite reflektirende Curve der durch P gehende Kreis dessen Ebene senkrecht auf SC steht, sieht man sogle wenn man bedenkt, dafs bei der Umdrehung der Linie um SC, der Punkt P sich in diesem Kreise bev

der sich mitbewegende reflektirte Strahl *Pf* bleibend durch den Punkt *f* geht. Daraus folgt zugleich, dafs die zugehörige Brennlinie sich auf den Punkt *f* (den Brennpunkt des reflektirenden Kreises) reducirt. Man sieht ferner, da die zu *P*, P_1, P_2 gehörenden reflektirten Strahlen die Axe in verschiedenen Punkten schneiden, jeder der entsprechenden reflektirenden Kreise im Allgemeinen seinen eigenen Brennpunkt haben wird. Durch die Umdrehung der Curve *ACB* und des ihr angehörenden Strahlensystems beschreibt die Brennlinie eine Umdrehungsfläche, welche man die kaustische Fläche oder die Brennfläche nennt.

Ist nun die Erzeugungscurve ein Kegelschnitt, so giebt es allemal eine Entfernung *SC*, für welche die Brennpunkte sämmtlicher Vertikalkreise zusammenfallen, und die Brennfläche zu einem Punkte wird. Der Spiegel hat alsdann einen allgemeinen Brennpunkt, aber nicht, wie die ebenen Spiegel für jede Entfernung des Lichtpunktes, sondern nur für eine bestimmte Stellung desselben.

Der Grund der Existenz eines allgemeinen Brennpunktes liegt in der bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte, dafs die im Berührungspunkte *P* jeglicher Tangente auf dieselbe senkrecht gezogene Linie den Winkel halbirt, welchen die Gerade *PF* mit der Geraden *Pf* (bei der Ellipse) oder mit der Verlängerung von *Pf* (bei der Hyperbel) bildet, wenn *F* und *f* die beiden geometrischen Brennpunkte sind, und wenn man bei der Parabel sich als zweiten Brennpunkt *F* einen in der Axe diesseit oder jenseit *f* in unendlicher Entfernung liegenden Punkt denkt. Da die Normale bei der Reflexion dem Einfallsloth entspricht, so werden deswegen alle von *F* ausgehenden Strahlen in einem Umdrehungs-Ellipsoid nach der Reflexion sich in *f* vereinigen und dort ein wahres Bild entstehen lassen; in einem Umdrehungs-Hyperboloid so divergiren, dafs die Verlängerungen der reflektirten Strahlen sich in *f* vereinigen und dort ein virtuelles Bild entstehen lassen. Im Umdrehungs-Paraboloid werden sich die reflektirten Strahlen in *f* zu einem wahren *Bilde vereinigen*, wenn die (parallel der Axe)

auffallenden Strahlen auf die concave Seite fallen; dag ihre Verlängerungen zu einem virtuellen, wenn sie auf convexe Seite fallen.

Ist der Kegelschnitt ein Kreis, der Spiegel also s risch, so fallen *F* und *f* zusammen, und die vom Mi punkt ausgehenden Strahlen werden daher in ihrer eig Richtung zurückgeworfen.

Sphärische Spiegel.

Befindet sich der leuchtende Punkt in der Umdreh axe, ohne im Centrum zu liegen, so hat jeder der Kre in welchem der Spiegel von einer auf der Axe senkr ten Ebene geschnitten wird, und welche wir reflektire Kreise nennen wollen, einen eigenen Brennpunkt. D Brennpunkte liegen aber sehr nahe für diejenigen refl renden Kreise, welche dem Ende der Axe (d. h. dem gen Punkt, in welchem die Axe den Spiegel trifft, welcher die Mitte des Spiegels heifst) sehr nahe lie so dafs man die in der Nähe dieser Mitte des Spiegels fallenden Strahlen, welche man Centralstrahlen ne als solche angesehen werden können, welche einen meinsamen Brennpunkt haben. Man nennt denselben Brennpunkt der Centralstrahlen. Sein Ort parallel auffallende Strahlen, also für gröfsere Entfer gen des leuchtenden Punktes, heifst der Haupt-Bre punkt. Dieser letztere liegt stets in der Mitte Halbmessers.

Es sei (Fig. 52) *ADB* der Durchschnitt eines sp schen Hohlspiegels, und *D* die Mitte desselben, *C* Krümmungsmittelpunkt und S_1P der Repräsentant sol Centralstrahlen, welche parallel *SD* auffallen. Ist $\angle S$ $= \angle CPf$, so ist *Pf* der reflektirte Strahl, $Cf = \frac{1}{2}CD$ *f* der Hauptbrennpunkt. Es ist nämlich, da $CPf = S_1$ $= PCD$ ist, $Cf = fP$, und wegen der Kleinheit des gens *PD* sehr nahe $fP = fD$, also auch nahe $fD =$ $= \frac{1}{2}CD$. Befindet sich der leuchtende Punkt in endli

Entfernung, etwa in S, doch so, dafs $SD > DC$ ist, so ist der Einfallswinkel (SPC) kleiner als vorher, und der reflektirte Strahl Ps liegt deswegen zwischen f und C. Nähert sich S dem Mittelpunkt C, so nehmen die Einfallswinkel ab, und der Brennpunkt s, oder was dasselbe ist, das Bild von S, rückt nach C hin. In C selbst fallen Lichtpunkt und Bild zusammen. Bewegt sich S über C hinaus nach f hin, so wenden sich die reflektirten Strahlen nach der andern Seite des Einfallslothes PC, und der Brennpunkt langt in S an, wenn der leuchtende nach s hin gerückt ist; während sich also der Lichtpunkt dem Spiegel nähert, entfernt sich das Bild von demselben. Langt derselbe in f an, so ist PS_1 die Richtung des reflektirten Strahls, und die Strahlen werden sämmtlich der Axe parallel zurückgeworfen Rückt endlich der Punkt S, von welchem die {Lichtstrahlen / Strahlen} ausgehen, noch weiter nach D hin, so divergiren die reflektirten Strahlen, und das Bild wird virtuel und rückt dem Punkt D um so näher, je mehr jener sich dem Spiegel nähert.

Durch eine gleiche Betrachtung findet man für convexe Spiegel ADB (Fig. 53), dafs jedem in endlicher Entfernung DS befindlichen Lichtpunkt S ein virtuelles zwischen dem Hauptbrennpunkt f und dem Spiegel befindliches Bild entspricht, und dafs sich dieses Bild gleichzeitig dem Spiegel (dem Punkt D) nähert, wenn sich der Lichtpunkt nach dem Spiegel hin bewegt.

Die Entfernung des Haupt-Brennpunktes vom Spiegel Df heifst die B r e n n w e i t e, und je zwei zusammengehörige Punkte S und s, c o n j u g i r t e B r e n n p u n k t e.

Bezeichnet man die Brennweite mit $+p$ oder $-p$, je nachdem der Spiegel concav oder convex ist, und die Entfernung je zweier conjugirten Brennpunkte S und s vom Spiegel mit a und α, so ist:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha},$$

wenn man α positiv *oder* negativ nimmt, je nachdem s vor *oder hinter dem Spiegel* liegt.

Betrachten wir jetzt den Fall, in welchem das Lic
von den Punkten der Oberfläche eines leuchtenden od
erleuchteten Gegenstandes ausgesendet wird.

Ist *ADB* (Fig. 54) ein Hohlspiegel, *D* dessen Mi
C der Mittelpunkt der Krümmung, *f* der Haupt-Brennp
und *aSb* ein nicht zu grofser Gegenstand, so liegt das
des Punktes *S* zwischen *f* und *C*, etwa in *s*. Für
äufsersten Punkt *a* kann man *aCe* als Axe betrachten,
Bild wird also in *ae* und zwar unterhalb *s*, etwa in
fallen; ebenso das Bild von *b* etwa in b_1. Die Bilde
Punkte zwischen *a* und *b* werden endlich in umgeke
Folge zwischen b_1 und a_1 zu liegen kommen. Es ersche
demnach in $b_1 a_1$ ein umgekehrtes (wahres) Bild von
Da $ab : a_1 b_1 = CS : Cs$ ist, so verhält sich die Gröfse d
Gegenstandes zur Gröfse des Bildes wie die respecti
Entfernungen vom Centrum *C*. Dasselbe gilt noch, wen
der Gegenstand zwischen *C* und *f* liegt. Das Bild
$b_1 a_1$ bildet sich verkehrt in *ab*, und seine Gröfse steht
Verhältnifs der Entfernung vom Centrum.

Befindet sich dagegen der Gegenstand *ab* innerhalb de
Brennweite, wie in Fig. 55, so kommen, wenn das Bil
von *S* in *s* erscheint, die Bilder von *a* und *b* respectiv
in a_1 und b_1 zu liegen. Das virtuelle Bild von *ab* steht
also aufrecht, und das Verhältnifs seiner Gröfse zu der des
Objektes steht wiederum im Verhältnifs der Entfernungen
von *C*.

Denkt man sich in der letzten Figur $a_1 b_1$ als Objekt, so wird, wenn der Spiegel auf der Convexseite polirt ist, *ab* das Bild desselben; es steht daher bei convexen Spiegeln das stets virtuelle Bild gleichfalls aufrecht, und das Gröfsenverhältnifs ist dem Verhältnifs der Entfernungen vom Spiegel gleich.

Aus dem Gesagten folgt also 1) dafs alle virtuelle Bilder aufrecht, alle wahre Bilder, welche sich noch darin von den virtuellen unterscheiden, dafs sie sich mit einem Schirm auffangen lassen, verkehrt sind; 2) dafs, wenn sich das Objekt längs der Axe bewegt, das Bild eine Bewegung

nach der entgegengesetzten Richtung annimmt; 3) dafs bei convexen Spiegeln das Bild stets virtuel ist, innerhalb der Brennweite liegt, und kleiner als das Objekt ist; 4) dafs bei concaven Spiegeln das Bild nur dann virtuell ist, aber in jeglicher Entfernung hinter dem Spiegel liegen kann, wenn das Objekt innerhalb der Brennweite sich befindet, und dafs in diesem Fall das Bild stets gröfser als das Objekt ist; dafs das Bild ein wahres ist, und aufserhalb der Brennweite liegt, wenn das Objekt aufserhalb derselben sich befindet, dafs aber alsdann Objekt und Bild zu verschiedenen Seiten des Krümmungsmittelpunktes liegen.

Die Bilder haben indefs nicht, namentlich bei etwas bedeutenderer Gröfse, genau die Form des Objekts, es nimmt vielmehr jede gerade Linie des letztern im Bilde eine Kegelschnitts-Krümmung an.

Das im Vorhergehenden Erörterte gilt jedoch nur, so lange blofs von Centralstrahlen die Rede ist, also nur für Spiegel, in denen *AB* (in den Figuren 52—55), welches die Sehne vorstellt, die auf der Axe *CD* senkrecht stehend die Ränder des Spiegels mit einander verbindet, und die Oeffnung des Spiegels heifst, nur unbedeutend gegen die Länge des Radius ist.

Bei bedeutenderer Oeffnung trennen sich die Brennpunkte der aufeinanderfolgenden reflektirenden Kreise um so rascher, je mehr sie sich von der Mitte entfernen (je gröfser also ihre Durchmesser werden), und zwar nähern sie sich dem Spiegel und treten bei hinreichender Gröfse der Oeffnung von einem bestimmten Punkt ab selbst hinter den Spiegel, wobei alsdann die Strahlen zwei und mehr Reflexionen erleiden.

Die von den Durchschnittspunkten der aufeinanderfolgenden reflektirten Strahlen gebildete Brennlinie ist für parallel auffallende Strahlen eine Epicycloïde, d. h. eine Curve, welche ein Punkt *r* eines Kreises *Ppr* (Fig. 56) beschreibt, der sich auf der Peripherie eines zweiten Kreises $afbf_1$ wälzend fortbewegt. Für den gegenwärtigen Fall ist der Durchmesser *pP* gleich dem Radius *Cp*, gleich $\frac{1}{2}$CD, wenn CD

der Halbmesser des sphärischen Spiegels ist. Die Linie $Ar f B$ ist in der Figur die Brennlinie des Hohlspiegels AD, die Linie $A f_1 B$ die des erhabenen Spiegels AD_1B. Fig. zeigt die Brennlinie für den Fall, daſs der leuchtende Punkt S in endlicher Entfernung aber auſserhalb der Kugel liegt, welche dem Spiegel angehört. Die Fig. 58 zeigt selbe, wenn S innerhalb der Kugel, aber weiter als Hälfte des Radius vom Centrum liegt. Befindet sich S der Mitte des Radius, so hat die Brennlinie die Form Fig. 59; befindet sich S jenseits dieser Mitte, so hat die Form Figur 60.

Sphärische Abweichung.

Es sei ADB (Fig. 61) ein sphärischer Spiegel (dessen Oeffnung AB ist), $a\beta f a b$ die Brennlinie für eine bestimmte Entfernung des Lichtpunktes, f der Brennpunkt der Centralstrahlen, und s der des äuſsersten Ringes, also Asg vom äuſsersten Rande A reflektirte Strahl, so daſs alle zwischen A und D reflektirten Strahlen die Axe zwischen und f treffen; endlich sei fg senkrecht auf fD. Alsdann heiſst fs, d. h. die Entfernung des Brennpunktes der Centralstrahlen von dem der Randstrahlen, die sphärische Längen-Abweichung, fg die Breiten-Abweichung des Spiegels. Nennt man a die Entfernung des Lichtpunktes vom Spiegel, r den Halbmesser der Krümmung, η die halbe Oeffnung (AE), b die Breiten-Abweichung und l die Längen-Abweichung, so ist für geringe Werthe von $\frac{\eta}{r}$, d. h. für eine kleinere Oeffnung des Spiegels,

$$l = \frac{(a-r)^2\eta^2}{r(2a-r)^2}, \quad b = \frac{(a-r)^2\eta^3}{ar^2(2a-r)},$$

und für solche Strahlen, welche parallel der Axe auffallen, oder was dasselbe ist, welche von einem sehr entfernten Punkte kommen:

$$l = \frac{\eta^2}{4r}, \quad b = \frac{\eta^3}{2r^2}.$$

Die Linie $\alpha\beta$, welche die Durchschnittspunkte der Randstrahlen mit der Brennlinie verbindet, wird von sämmtlichen vom Kreisbogen AB reflektirten Strahlen durchschnitten. Der Kreis, dessen Durchmesser diese Linie ist, und welcher senkrecht auf fD steht, umfaſst also alle vom Spiegel zurückgeworfenen Strahlen. Es heiſst derselbe der Abweichungskreis. Für ihn ist si dem vierten Theil der Längen-Abweichung, $i\alpha$ dem vierten Theil der Seiten-Abweichung gleich.

Vertheilung des Lichtes im Brennraum.

Fängt man die von einem Spiegel reflektirten Strahlen mit einem Schirm auf, so wird derselbe an verschiedenen Stellen verschieden erhellt. Wollte man die Helligkeit mit derjenigen vergleichen, welche das einfallende Licht geben würde, so hätte man 1) die Schiefe der Incidenz zu berücksichtigen, unter welcher die jede Stelle erhellenden Strahlen reflektirt werden, 2) die Menge der Strahlen, welche auf eine solche Stelle fallen in Vergleich zu der Menge der auf eine gleich groſse Stelle treffenden Einfallsstrahlen (d. h. auf die Dichtigkeit der Strahlen).

Nimmt man als Maaſsstab die Lichtmenge am Spiegel unmittelbar nach der Reflexion, um den Verlust durch die brechende Kraft des Spiegelmaterials übergehen zu können, und läſst auch den Einfluſs der Schiefe der Incidenz auſser Acht, so kommt man zur Bestimmung der Helligkeit jedweder Stelle des Brennraums auf folgende Art.

Sind in der vorigen Figur p und p' irgend zwei einander sehr nahe, vom Spiegel gleichweit entfernte, in der Ebene der Figur liegende Punkte des erleuchteten Raums, und zieht man durch p und p' an die kaustische Curve Tangenten (welche den Spiegel in P und P', und die Axe in r und r' schneiden, und die kaustische Curve in zwei unendlich nahen Punkten, etwa in dem Orte v, treffen mögen), so gehen alle zwischen P und P' reflektirten Strahlen *durch den Raum zwischen* p und p'. Dreht man die

Figur um fD als Axe, so beschreibt die Linie pp' eine Ringfläche, deren Radien pp_1 und $p'p_1$ sind. Nun erhält man die Dichtigkeit der Strahlen in dem Elemente pp' dieser Ringfläche, herrührend von den reflektirten Strahlen des Spiegelelementes PP', wenn man dieselbe durch x, und die Dichtigkeit in PP' durch 1 bezeichnet, aus der Proportion $vP : vp = 1 : x$. Da sich überdies die durch die Umdrehung von pp' und PP' um die Axe fD gebildeten Ringflächen sich wie pp_1 zu PP_1, oder wie rp zu rP verhalten, so verhält sich die Helligkeit in der Ringfläche von pp' zu der Helligkeit in der Ringfläche von PP', wie

$$\frac{Pv}{pv} \cdot \frac{Pr}{pr} : 1,$$

vorausgesetzt, dafs die Erhellung nur von dem Ring von PP' herrührt.

Sie erlangt also einmal ein Maximum für $pv = 0$, d. h. wenn p in der kaustischen Curve liegt, ein zweites Mal für $pr = 0$, d. h. wenn p in der Axe liegt. Die absolut gröfste Helligkeit wird daher da sein, wo zugleich $pv = 0$ und $pr = 0$ ist, d. h. im Brennpunkt der Centralstrahlen, und überhaupt wird die Helligkeit in der kaustischen Curve um so gröfser, je mehr sie sich der Axe nähert.

Was die Erhellung im Besonderen betrifft, so bemerke man, dafs die durch einen Punkt p gehenden reflektirten Strahlen von Punkten des Spiegels zwischen A und B ausgehen, und die kaustische Curve berühren müssen.

Am dunkelsten erscheinen daher die Räume $g'\beta a$ und $g\alpha b$, da in sie keiner der reflektirten Strahlen gelangt. Für die in dem Raum $AsBD$ liegenden Punkte p nimmt das Licht gleichförmig (nach dem Verhältnifs $\frac{Pv}{pv} \cdot \frac{Pr}{pr} : 1$) mit der Entfernung vom Spiegel zu, da durch ihn nur der von P reflektirte Strahl geht. Durch die Punkte (p) in den Räumen $as\beta$ und $bs\alpha$ gehen zwei reflektirte Strahlen, von denen der eine den einen, der andere den andern Zweig der kaustischen Curve berührt; die Dichtigkeit der Strahlen in diesen Räumen läfst sich daher ausdrücken durch

$$\frac{Pv \cdot Pr}{pv \cdot pr} + \frac{Pv_1 \cdot Pr_1}{pv_1 \cdot pr_1},$$

wo v und r der einen, v_1 und r_1 der andern Tangente zugehören.

Durch die Punkte p in dem Raume $\alpha\alpha f\beta$ gehen im Allgemeinen drei reflektirte Strahlen, da sich durch sie zwei Tangenten an den einen, und eine an den andern Zweig der kaustischen Curve ziehen lassen, welche den Spiegel zwischen A und B treffen. Die Dichtigkeit läfst sich daher ausdrücken durch:

$$\frac{Pv \cdot Pr}{pv \cdot pr} + \frac{Pv_1 \cdot Pr_1}{pv_1 \cdot pr_1} + \frac{Pv_2 \cdot Pr_2}{pv_2 \cdot pr_2},$$

wo sich v, r; v_1, r_1; v_2, r_2 auf die drei Tangenten beziehen.

B. Dioptrik.

I. Brechung des homogenen Lichtes.

Brechung durch Prismen.

Läfst man auf ein Prisma Lichtstrahlen so fallen, dafs die Einfalls-Ebene senkrecht auf der Kante desselben steht, und besteht dasselbe aus einer einfachbrechenden Substanz, oder besteht es aus einer doppelbrechenden und ist dabei so geschnitten, dafs die Kante mit einer der Elasticitätsaxen zusammenfällt; so liegen die eintretenden und austretenden Strahlen in derselben Ebene, weil alsdann die gebrochenen Strahlen in die Einfalls-Ebene fallen und die letztere der Vorder- und Hinterfläche des Primas gemeinschaftlich ist.

Die auf der Kante des Prismas senkrechte Ebene nennt man Hauptschnitt desselben, und den Winkel, welchen die eintretenden Strahlen mit den austretenden bilden, den Ablenkungswinkel.

Dafs der Ablenkungswinkel bei unverändertem Einfallswinkel *wachsen mufs*, wenn der brechende Winkel

(d. h. der Winkel, welchen die Ein- und Austrittsfläche des Prismas mit einander bilden) gröfser wird, übersieht man sogleich. Mit der Aenderung des Einfallswinkels ändert sich auch der Ablenkungswinkel, und zwar so, dafs derselbe ein Kleinstes wird, wenn der Einfallswinkel dem Austrittswinkes gleich ist. Ist das Prisma stärker brechend als das umgebende Mittel, so sind in dem letzten Fall die eintretenden und austretenden Strahlen von der Kante des Prismas abgewendet; ist es schwächer brechend, so sind sie ihr zugewendet.

Der Werth des Ablenkungswinkels für jeden beliebigen Einfallswinkel α ist bestimmt durch

$$\sin(D+i+\alpha) = \sin\alpha + 2n \sin\tfrac{1}{2}i \cos(\alpha' + \tfrac{1}{2}i),$$

wo D den Ablenkungswinkel, i den brechenden Winkel des Prismas, n das Brechungsverhältnifs, und α' den Brechungswinkel an der Vorderfläche bedeutet.

Die kleinste Ablenkung, d. h. die Ablenkung für den Fall, dafs der Eintrittswinkel dem Austrittswinkel gleich ist, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}(D+i) = n \sin\tfrac{1}{2}i.$$

Durch eine geringe Aenderung des Einfallswinkels ändert sich die Ablenkung am wenigsten in demjenigen Fall, in welchem die letztere ihren kleinsten Werth hat. Man wendet daher, um den Einflufs zu beschränken, welchen ein Fehler bei der Messung des Einfallswinkels ausübt, die aus der letzten Formel gezogene Gleichung

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(D+i)}{\sin\frac{1}{2}i}$$

dazu an, aus der Gröfse der Ablenkung und dem brechenden Winkel eines Prismas das Brechungsverhältnifs einer Substanz zu bestimmen.

Brechung an gekrümmten Flächen.

Wie bei der Reflexion, so bilden auch bei der Brechung die Durchschnittspunkte der gebrochenen Strahlen *eine krumme* Fläche, welche man die Brennfläche oder

die kaustische Fläche nennt. Wenn es die gebrochenen Strahlen nicht ihre Verlängerungen sind, welche sich schneiden, so lassen sich Durchschnitte der Brennfläche dadurch sichtbar machen, dafs man in den von den gebrochenen Strahlen erhellten Raum einen weifsen undurchsichtigen Schirm hält. Es zeichnen sich nämlich die Durchschnittspunkte der Strahlen wegen des Zusammenwirkens der letzteren durch Helligkeit aus, und begrenzen den erhellten Raum mehr oder minder scharf. Dies ist auch der Grund der Lichtzeichnungen, welche man auf dem Tische hinter einem mit gekrümmten Wandungen versehenen Glasgefäfs bemerkt, welches mit einer durchsichtigen Flüssigkeit gefüllt ist, wenn dasselbe den Sonnenstrahlen ausgesetzt wird.

Ist die brechende Fläche eine Umdrehungsfläche, so ist von selbst klar, dafs auch die Brennfläche eine solche sein mufs.

Die Brennfläche kann sich in besonderen Fällen auf einen Punkt reduciren, d. h. es können sich die von einem Punkt der Umdrehungsaxe ausgehenden Strahlen nach der Brechung in einem einzigen Punkt (einem Brennpunkt) schneiden; und zwar läfst sich durch eine einfache geometrische Construction die Form der Curve finden, durch deren Umdrehung eine mit dieser Eigenschaft begabte Fläche entsteht, wenn der Ort des Lichtpunktes und der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen gegeben ist. Diese Eigenschaft hat die Fläche aber alsdann nur für eine einzige Lage des Lichtpunktes.

Ist S (Fig. 62) der Ausgangspunkt der Strahlen, f ihr Vereinigungspunkt nach der Brechung, so findet man jeden Punkt P der brechenden Fläche, wenn man $fP : SP - r = 1 : n$ macht. Unter r ist ein beliebiger, aber für jede besondere brechende Fläche constanter Werth und unter n das Brechungsverhältnifs zu verstehen. Da man r beliebig wählen kann, so lassen sich unendlich viel solcher Flächen construiren.

Nimmt man $r = 0$, so wird die Curve ein Kreis, die

brechende Fläche also sphärisch. Sollen sich daher die durch eine sphärische Fläche gebrochenen Strahlen in einem einzigen Punkte schneiden, so darf man die Fläche nur in eine solche Entfernung vom Lichtpunkt *S* stellen, dafs *SC* dem *n*fachen Radius gleich wird, und der Vereinigungspunkt (Brennpunkt) steht alsdann um den *n*ten Theil von *SA* vom Scheitel ab.

Sind die einfallenden Strahlen parallel (oder kommen sie von einem sehr entfernten Lichtpunkt, so wird die Curve *AP* eine Hyperbel, wenn $n < 1$ ist, also wenn das Licht in ein schwächer brechendes Mittel übergeht; sie wird eine Ellipse, wenn es in ein stärker brechendes übergeht.

In beiden Fällen ist der geometrische Brennpunkt der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen, und die Hyperbel, oder die Ellipse ist so zu construiren, dafs die Entfernung jedes Punktes *P* derselben von einer auf *Of* senkrecht zu errichtenden Richtlinie *OH* dem *n*fachen Radius Vektor *Pf* gleich ist.

Für die Praxis sind die sphärisch gekrümmten Flächen die wichtigsten; sie mögen daher allein fernerhin betrachtet werden.

Ist (Fig. 62) *AP* derjenige Kreisbogen, durch dessen Umdrehung um seinen Halbmesser *CA* als Axe die sphärische brechende Fläche entstanden ist, und *S* der Licht aussendende Punkt, so schneiden, wie erwähnt worden, alle durch *AB* gebrochenen Strahlen nur dann die Axe *Af* in einem einzigen Punkt, wenn *SC* dem *n*fachen Radius gleich ist. Für jede andere Entfernung *AS* schneidet jeder gebrochene Strahl die Axe in einem anderen Punkt. Wird z. B. der Strahl *SP* nach *f* hin gebrochen, und denkt man sich den Bogen *AB* zugleich mit dem Einfallsstrahl *SP* um *Sf* herumgedreht, so beschreibt nicht nur der Einfallsstrahl *SP*, sondern auch der zu ihm gehörige gebrochene Strahl *Pf* eine Kegelfläche, und *P* beschreibt auf der brechenden Fläche einen Kreis. Es werden daher alle diejenigen Strahlen sich in einem einzigen Punkt *f* der Axe schneiden, welche in den Punkten des von *P*

beschriebenen Kreises einfallen. Man nennt diesen Kreis einen Ring der brechenden Fläche, und f den Brennpunkt dieses Ringes. Nun läfst sich die brechende Fläche aus lauter solchen Ringen bestehend denken, deren jeder seinen eigenen Brennpunkt hat. Die Brennpunkte der sehr nahe am Scheitel A liegenden Ringe sind einander so nahe, dafs man sie als zusammenfallend betrachten kann. Man nennt den gemeinsamen Brennpunkt dieser Ringe den Brennpunkt der Centralstrahlen, und seine Entfernung vom Scheitel A die Brennweite der Centralstrahlen. Für den Fall, dafs die einfallenden Strahlen der Axe parallel sind, heifst jener Brennpunkt der Haupt-Brennpunkt, und die Brennweite die Haupt-Brennweite oder Focallänge der Fläche.

Man bezeichne durch $\frac{1}{\mu}$, $-\frac{1}{e}$, $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{F}$, $\frac{1}{R}$ beziehlich das Brechungsverhältnifs des brechenden Mittels in Bezug auf dasjenige, aus welchem das Licht kommt; die Entfernung des Lichtpunktes vom Scheitel der brechenden Fläche; die zu diesem e gehörige Brennweite der Centralstrahlen; die Haupt-Brennweite; den Krümmungs-Halbmesser der brechenden Fläche. Versteht man ferner, für den Fall, dafs die einfallenden Strahlen convergiren, unter $+\frac{1}{e}$ die Entfernung des Convergenzpunktes derselben vom Scheitel der Fläche; nimmt man überdies f und F positiv, wenn die entsprechenden Brennpunkte hinter der Fläche liegen, die Brennpunkte also wahre sind, dagegen negativ, wenn sie vor der Fläche liegen, also virtuell sind; und nimmt man endlich R positiv oder negativ, je nachdem die Fläche der Lichtquelle ihre convexe oder ihre concave Seite zuwendet, so heifsen die Gleichungen welche die Brennweiten bestimmen, die Strahlen mögen divergirend oder convergirend einfallen,

$$F = (1-\mu)R$$
$$f = F+\mu e.$$

Man *sieht hieraus, dafs*, wenn das brechende Mittel das

Licht stärker bricht, als das Mittel, in welchem sich die Einfallsstrahlen befinden, die Haupt-Brennweite stets gröfser als der Radius, und dafs der Haupt-Brennpunkt bei convexen Flächen ein wahrer, bei concaven ein virtueller ist; ferner, dafs bei convexen Flächen die Brennweite divergirender Strahlen gröfser, die Brennweite convergirender Strahlen kleiner als die Haupt-Brennweite ist; dafs das Umgekehrte bei convexen Flächen gilt; und dafs für $e = R$ auch $f = e$ wird, d. h. dafs, wenn der Lichtpunkt oder der Convergenzpunkt der Einfallsstrahlen im Krümmungsmittelpunkt liegt, auch der Brennpunkt dort liegt. Dieselben Schlüsse lassen sich unmittelbar aus der geometrischen Betrachtung ableiten, wenn man bedenkt, dafs der nach dem Einfallspunkt gezogene Halbmesser zugleich das Einfallsloth ist, und dafs der Brechungswinkel stets kleiner als der Einfallswinkel ist Aus $F = (1 - \mu) R$ oder, was dasselbe ist, aus $F : R = 1 - \mu : 1$ folgt, dafs man den Haupt-Brennpunkt f (Fig. 62) geometrisch findet aus der Proportion $AC : Af = n - 1 : n$.

Was die Brennweite derjenigen Strahlen betrifft, welche auf die Fläche nicht sehr nahe an dem Scheitel auffallen (wir wollen sie Randstrahlen nennen), so hat man für sie, wenn die Entfernung vom Scheitel nur sehr mäfsig ist, und wenn man sie durch $\frac{1}{(F)}$ oder $\frac{1}{(f)}$ bezeichnet, je nachdem die einfallenden Strahlen parallel sind oder nicht,

$$(F) = F + \tfrac{1}{2}\mu^2 (1 - \mu) R^3 y^2$$

$$(f) = f + \tfrac{1}{2}\mu (1 - \mu)(R - e)^2 [\mu R - (1 + \mu) e] y^2,$$

wo F und f die Werthe von (F) und (f) für die Centralstrahlen sind, und y die Entfernung des Einfallspunktes von der Axe bedeutet.

Es folgt hieraus, da die beiden Glieder im Ausdrucke für (F) gleiche Zeichen haben, dafs die Haupt-Brennweite der Randstrahlen stets kleiner als die der Centralstrahl ist. Ebenso verhält es sich wegen der Gleichheit des Zeichens der beiden Glieder in (f) bei convexen Flächen 1) für jede Entfernung des Lichtpunktes von der Fläc

2) für convergirend einfallende Strahlen, wenn $e < \frac{1+\mu}{\mu} R$ ist; bei concaven Flächen 1) für convergirend einfallende Strahlen, 2) wenn die Einfallsstrahlen divergiren und zugleich $e < \frac{1+\mu}{\mu} R$ ist. Im entgegengesetzten Fall (d. h. wenn in den unter (2) genannten Fällen $e > \frac{1+\mu}{\mu} R$ wird) ist der Brennpunkt der Randstrahlen von der brechenden Fläche entfernter als der Brennpunkt der Centralstrahlen. In dem Uebergangspunkt, wo $e = \frac{1+\mu}{\mu} R$ ist, fallen beiderlei Brennpunkte zusammen (dies ist der oben betrachtete Fall, in welchem die Brennlinie zu einem Punkte wird), und von da ab wächst die Differenz der Brennweiten nach beiden Seiten hin.

Die Differenz zwischen der Brennweite der Centralstrahlen und der Brennweite der äufsersten Randstrahlen heifst die sphärische Längenabweichung.

Sphärische Seitenabweichung nennt man die Entfernung des Brennpunktes der Centralstrahlen von demjenigen Punkt, in welchem die auf der Axe in dem genannten Brennpunkt errichtete Senkrechte die äufsersten Randstrahlen trifft. Ist z. B. (Fig. 64) *CP* die Axe, *o* der Brennpunkt der Centralstrahlen, *A* ein Punkt des gröfsten Ringes der brechenden Fläche, *Ap* der in *A* gebrochene (äufserste) Randstrahl, also *p* der Brennpunkt der äufsersten Randstrahlen, so ist *po* die Längenabweichung, *os* die Seitenabweichung. Ist die Längenabweichung bekannt, und gleich δ, so findet man die Seitenabweichung aus der Proportion:

$$os : op = Cp : CA,$$

oder für kleinere Werthe von *AC* (d. i. von *y*), da alsdann *op* nur klein ist, und daher *Cp* durch *Co* ersetzt werden kann,

$$os : \delta = y : \frac{1}{f}.$$

Es ist also *die Seitenabweichung* gleich $\delta f y$.

Ist CA nur ein kleiner Theil des Radius, so i
Ausdruck für die Längenabweichung:

$$\frac{\mu^2}{2(1-\mu)} Ry^2,$$

und die Seitenabweichung:

$$\tfrac{1}{2}\mu^2 R^2 y^3.$$

Brechung durch Linsen.

Linse heifst jede Substanz, welche von zwei s
schen Flächen begrenzt ist, deren Mittelpunkte in
Linie liegen. Diese Centrallinie heifst die Axe der
die der Lichtquelle zugekehrte Seite ihre Vorderfl
die andere ihre Hinterfläche.

Eine Linse heifst biconvex, wenn beide Fl
ihre convexen Seiten nach Aufsen gekehrt haben, bi
cav, wenn sie dieselben nach Innen gekehrt haben.
heifst planconvex, wenn die eine Seite eben ist
kann solche als sphärisch von unendlich grofsem I
betrachten), und deren andere Seite ihre convexe
nach Aufsen hat. Sie heifst planconcav, wenn si
von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dafs d
krümmte Fläche ihre convexe Seite nach Innen gekeh
Sie heifst endlich concavconvex, wenn die eine I
ihre convexe Seite nach Innen hat, die andere nach A
Ist der Halbmesser der erstgenannten Fläche gröfs
der Halbmesser der letztgenannten, so nennt man sie
wohl Meniscus. Durchschnitte dieser Linsenformen
in der oben aufgeführten Reihenfolge in Fig. 63 abgeb

Die Entfernung des Lichtpunktes, den wir in de
der Linse denken wollen, von dem Scheitel der V
fläche heifst die Objektsweite. Wir wollen di
durch $-\frac{1}{e}$ bezeichnen, und durch $+\frac{1}{e}$ die Entfe
des (in der Axe befindlichen) Convergenzpunktes de
fallenden Strahlen von dem Scheitel der vorderen Fl
wenn dieselben convergiren. Den Durchschnittspunk

aus der Hinterfläche tretenden gebrochenen Strahlen, oder den Durchschnittspunkt ihrer Verlängerungen nennt man den zu der jedesmaligen Objektsweite gehörigen **Brennpunkt**, der also im ersten Falle ein wahrer, im zweiten ein virtueller ist. Die Entfernung desselben von der Hinterfläche heifst die **Brennweite der Linse**.

Aus dem Vorigen ist klar, dafs zu jedem Ringe der Vorderfläche selbst bei derselben Objektsweite eine andere Brennweite gehört. Man unterscheidet daher auch hier eine **Brennweite der Centralstrahlen**, im Gegensatz zu der **Brennweite der Randstrahlen**, welche zu dem äufsersten Ringe der Vorderfläche gehört.

Die Brennweite der Centralstrahlen, wenn das Licht der Axe parallel einfällt, heifst die **Haupt-Brennweite** oder **Focallänge der Linse**.

a) Brennweite der Centralstrahlen.

Man bezeichne durch n, $\frac{1}{R'}$, $\frac{1}{R''}$, $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{F}$ beziehlich das Brechungsverhältnifs der Linsensubstanz in Bezug auf das umgebende Mittel; den Radius der Vorder-; den der Hinterfläche; die Brennweite der Centralstrahlen bei der Objektsweite $-\frac{1}{e}$; die Focallänge der Linse. Ferner denke man R' und R'' positiv oder negativ, je nachdem die entsprechenden Flächen ihre convexe oder ihre concave Seite der Lichtquelle zugekehrt haben, und f und F positiv oder negativ, je nachdem die entsprechenden Brennweiten hinter oder vor der Linse liegen.

Alsdann sind die Gleichungen, welche f und F bestimmen, wenn die Dicke der Linse so gering ist, dafs man sie ganz vernachlässigen kann,

$$F = (n-1)(R'-R'')$$
$$f = F+e.$$

Bricht die Linsensubstanz das Licht stärker, als das umgebende Mittel, ist also $n>1$, so ist F positiv, wenn

nd R'' negativ ist, oder wenn R' und R'' po- $>R''$ ist, oder wenn R' und R'' negativ, aber R ferner wenn $R'=0$ (die Vorderfläche also eber r R'' negativ, oder wenn $R''=0$ und R' positiv ist. äfst sich in folgende Regel zusammenfassen: Der Haupt-Brennpunkt ist ein wahrer, d. h. er liegt hinter der e, wenn dieselbe biconvex, ein Meniscus oder planconvex st. Man nennt diese Linsen, weil sie die Parallelstrahlen zur Convergenz bringen, **Sammellinsen**.

In allen ande d F negativ. Der Haupt-Brennpunkt ist d wenn die Linse biconcav, planconcav oder c vcon mit überwiegender Concavität ist. Da sie d ahlen durch die Brechung zur Diverger man sie **Zerstreuungslinsen**.

Kehrt man die Linse so um, dafs die Hinterseite zur Vorderseite wird, so geht der Ausdruck für F über in

$$(n-1)(R''-R').$$

Da aber alsdann zugleich, wegen der veränderten Lage der Krümmung gegen die Lichtquelle, R' und R'' ihre Zeichen wechseln, so ändert sich dadurch die Focallänge gar nicht.

Jede Linse hat daher gleichsam zwei Haupt-Brennweiten, von denen man die eine die vordere, die andere die hintere nennen kann.

Aus der Gleichung $f=F+e$ sieht man, dafs, wenn die Linse eine Sammellinse ist und die Einfallsstrahlen divergiren (also wenn e negativ ist), $f<F$, d. h. die Brennweite gröfser als die Focallänge ist, und um so gröfser, je gröfser e wird, d. h. je mehr sich der Lichtpunkt der Linse nähert.

Wird $e=-F$, d. h. tritt der Lichtpunkt endlich in den vorderen Haupt-Brennpunkt, so wird $f=0$, d. h. die austretenden Strahlen werden der Axe parallel. Wächst noch mehr, befindet sich also der Lichtpunkt innerhalb vorderen Brennweite, so wird f negativ, d. h. der nkt wird virtuel, und f wächst mit e zugleich,

indefs f stets kleiner als e bleibt, also der Brennpunkt weiter von der Linse entfernt bleibt, als der Lichtpunkt.

Fafst man dies zusammen, so läfst sich der Vorgang so aussprechen: Wenn sich der Lichtpunkt (das Objekt) aus unendlicher Entfernung der Linse nähert, so entfernt sich der Brennpunkt (das Bild des Objekts) vom Haupt-Brennpunkt ab, von der Linse bis ins Unendliche.

Beim Durchgange des Objecktes durch den vorderen Haupt-Brennpunkt tritt das Bild in unendlicher Entfernung vor die Linse, und nähert sich mit ihm gleichzeitig der Linse, wenn das Objekt vom Haupt-Brennpunkt aus bis zur Linse fortschreitet, wo dann beide zusammenfallen.

Convergiren dagegen die Einfallsstrahlen (d. h. ist e positiv), so bleibt f positiv und, wächst mit e zugleich, und zwar so, dafs f stets $> F$ ist, d. h. das (virtuelle) Bild schreitet von der hintern Haupt-Brennweite der Linse zu.

Ist dagegen die Linse eine Zerstreuungslinse, und e negativ, so ist auch f negativ, f und e wachsen gleichzeitig, während $f > e$ und $> F$ bleibt. Bewegt sich also das Objekt aus unendlicher Ferne bis zur Linse, so bewegt sich das Bild von dem vorderen Brennpunkt bis zur Linse. Ist dagegen e positiv und wächst von 0 bis $-F$, so ist f noch negativ, und nimmt von F bis 0 ab, d. h. nähert sich der Convergenzpunkt der Einfallsstrahlen, aus unendlicher Ferne kommend, dem hinteren Haupt-Brennpunkt, so entfernt sich das (virtuelle) Bild vom vorderen Haupt-Brennpunkt aus von der Linse bis ins Unendliche. Wächst endlich das (positive) e von $-F$ bis ∞, so wird f positiv und wächst von 0 bis ∞, d. h. das Bild befindet sich hinter der Linse, und bewegt sich, aus unendlicher Ferne kommend, bis zur Linse, wenn der Convergenzpunkt der Einfallsstrahlen von dem hinteren Haupt-Brennpunkt aus sich bis zur Linse bewegt.

Für eine planconvexe Linse wird $F = (n-1)R$, für eine planconcave $F = -(n-1)R$, und für eine gleichseitige Linse, d. h. für eine Linse, deren beide Flächen dieselbe *Krümmung haben*, wird $F = 2(n-1)R$. Beste-

hen die Linsen aus Glas, für welches $n = 1{,}5$ ist, so wird demnach die Focallänge, wenn sie planconvex oder planconcav sind, dem doppelten Radius gleich; wenn sie gleichseitig sind, dem Radius selber gleich.

Aus dem Vorigen läfst sich leicht die Brennweite für ein Linsensystem berechnen, d. h. die Brennweite der letzten mehrer Linsen, die eine gemeinschaftliche Axe haben. Hat man z. B. zwei Linsen, und stehen dieselben um δ von einander ab, so hat man als Objektsweite für die zweite Linse $\frac{1}{f} - \delta$ zu nehmen, wo $\frac{1}{f}$ die Brennweite der ersten Linse bedeutet.

Haben die Linsen eine namhafte Dicke, so ändern sich die Werthe von F und f um so mehr, je kleiner die Krümmungsradien und je kleiner die Objektsweiten sind. Da nämlich alsdann die gebrochenen Strahlen eine bedeutendere Neigung gegen die Axe haben, so rückt der Einfallspunkt auf der hinteren Linsenfläche der Axe namhaft näher, oder entfernt sich von ihr um etwas Namhaftes, so dafs die Strahlen nach ihrem Austritt weit früher oder weit später die Axe treffen können. Ja es bleibt in diesem Fall nicht mehr die vordere Brennweite der hinteren gleich.

Die Ausdrücke für die umgekehrten Werthe der Brennweiten einer Linse von der Dicke d sind nämlich

$$F = (F) + \frac{h^2 d}{n - hd}$$

$$f = (F) + \frac{hd(h+e)+e}{n - d(h+e)},$$

wo (F) der Werth von F ist für die Linse, wenn sie unendlich dünn wäre, also $(n-1)(R' - R'')$, und wo h für $(n-1)R'$ steht.

Für planconvexe und planconcave Linsen, deren ebene Seite nach vorn liegt, wird allein, weil alsdann $h = 0$ wird, $F = (F)$.

Ist die Linse eine vollkommene Kugel, so wird

$$F = \frac{2(n-1)}{2-n} R;$$

ist sie eine Halbkugel mit ebener Vorderseite, so wird

$$F = (n-1)R \quad \text{und} \quad f = F + \frac{ne}{nR-e}R;$$

ist sie eine Halbkugel mit ebener Hinterseite, so wird

$$F = n(n-1)R \quad \text{und} \quad f = F + \frac{n^2 eR}{R-e}.$$

Die Focallänge einer Glaskugel, für welche $n = 1{,}5$ ist, kommt daher dem halben Radius gleich, die einer Halbkugel dem doppelten Radius, wenn die ebene Seite nach vorn liegt, und $\frac{4}{3}$ des Radius, wenn dieselbe nach hinten gekehrt ist.

b) Brennweite der Randstrahlen. Kugelabweichung.

Dafs die Brennpunkte der Rand- und Centralstrahlen im Allgemeinen nicht zusammenfallen, ist schon gesagt worden.

Wie bei einer einzigen Fläche, nennt man auch hier die Entfernung der Randstrahlen vom Brennpunkte der Centralstrahlen in der Richtung der Axe die sphärische Längenabweichung, und diese Entfernung in der auf der Axe senkrechten Richtung die sphärische Seitenabweichung. Wie dort, so läfst sich auch hier die Seitenabweichung aus der Längenabweichung und der Oeffnung der Linse berechnen.

Eine Linse ohne sphärische Abweichung heifst aplanatisch.

Mit der Objektsweite ändert sich auch die Abweichung, es kann daher eine Linse nur für eine bestimmte Objektsweite aplanatisch sein. Ueberdies sind nicht alle Linsen des Aplanatismus fähig, sondern nur solche concavconvexe Linsen, deren Flächenkrümmungen stark von einander abweichen.

Soll nämlich die Abweichung verschwinden können, so müssen die Krümmungshalbmesser in einem solchen Verhältnifs stehen, dafs die Bedingung

$$\frac{R'+R''}{R'-R''} > \sqrt{2n+3n^2}$$

erfüllt wird, welches, da $2n+3n^2$ stets gröfser als 1 ist, nur möglich wird, wenn $R'+R'' > R'-R''$ ist, d. h. wenn R' und R'' zugleich positiv oder zugleich negativ sind und R' und R'' bedeutend von einander verschieden sind.

Aber selbst die des Aplanatismus fähigen Linsen sind nie aplanitisch für parallele Einfallsstrahlen, d. h. für eine grofse Entfernung des Lichtpunktes: vielmehr ist bei allen Linsen die Haupt-Brennweite der Randstrahlen kürzer als die der Centralstrahlen. Doch giebt es ein Krümmungsverhältnifs, bei welchem die Abweichung für parallele Einfallsstrahlen ein Kleinstes wird, nämlich wenn

$$R' : R'' = 2n^2+n : 2n^2-n-4$$

ist. Für Glas, dessen Brechungsverhältnifs 1,5 ist, müssen daher die Krümmungshalbmesser sich wie $1 : -6$ verhalten, welches eine biconvexe Linse giebt, deren gewölbtere Seite nach vorn gerichtet sein mufs. Ist die Oeffnung nur mäfsig und die Dicke sehr unbedeutend, so ist die Längenabweichung in dem letzten Fall $\frac{15}{14}y^2F$, wo y die halbe Oeffnung und F die Brennweite der Centralstrahlen bedeutet.

Für stärker brechende Substanzen geht die zur kleinsten Abweichung gehörige Krümmung durch das planconcave in das concavconvexe über.

Was die Abweichung für den Fall betrifft, dafs die einfallenden Strahlen der Axe nicht parallel sind, so ist für alle des Aplanatismus unfähige Linsen die Brennweite der Randstrahlen kürzer als die der Centralstrahlen. Für diejenigen concavconvexen Linsen dagegen, welche des Aplanatismus fähig sind, richtet sich die relative Lage der Brennpunkte der Rand- und Centralstrahlen nach der Objektsweite.

Während die Abweichung bei einer einzigen Linse nur in den seltneren Fällen und nur für eine bestimmte Objektsweite sich vernichten läfst, kann man auf unendlich viele Arten für jede Objektsweite die Abweichung durch eine *Verbindung* zweier Linsen heben. Sind drei Krümmungen

gegeben, so läfst sich, wenigstens für mäfsige Oeffnungen, durch eine schickliche Wahl der vierten Krümmung der Aplanatismus herstellen; und ebenso, wenn zwei Krümmungen und die Vereinigungsweite der Strahlen nach der letzten Brechung (die Brennweite der Doppellinse) gegeben ist, durch eine schickliche Wahl der beiden anderen Krümmungen.

Bei einer einzigen Linse wächst die Abweichung mit der Gröfse der Oeffnung, also liegen auch bei gegebener Oeffnung die Brennpunkte der zwischen dem Rande und der Mitte auffallenden Strahlen zwischen dem Brennpunkte der Randstrahlen und dem der Centralstrahlen. Ist z. B. (Fig. 64) *AD* eine Linse, *P* der Brennpunkt der Centralstrahlen, *p* derjenige der Randstrahlen, so liegen die Brennpunkte der übrigen zwischen *A* und *C* einfallenden Strahlen zwischen *p* und *P*, und es giebt eine Entfernung *BC* von der Mitte *C*, in welcher ein Strahl einfallen mufs, wenn er nach der Brechung den Randstrahl *Ap* in der gröfstmöglichsten Entfernung von der Axe (z. B. in *s*) schneiden soll. Alsdann gehen sämmtliche zwischen *C* und *D* auffallende Strahlen nach der Brechung durch die auf *CP* senkrecht errichtete Linie *so*. Will man daher sämmtliche Strahlen in dem möglichst kleinsten Raum auffangen, so mufs man einen Schirm in *os* halten. Dort bildet sich ein heller Kreis, dessen Halbmesser *os* ist. Man nennt denselben den Abweichungskreis.

Die Rechnung lehrt, dafs derselbe, wenigstens bei mäfsiger Oeffnung, dem vierten Theil der Seitenabweichung gleich ist.

Da eine Fläche nur dann alle gebrochenen Strahlen nach demselben Punkt hinlenkt, wenn entweder die Fläche sphärisch ist und die einfallenden Strahlen die Richtung des Halbmessers haben, also nach dem Centrum convergiren, oder von demselben aus divergiren, oder wenn die Fläche die (p. 121) bezeichnete Krümmung hat: so mufs man, um eine vollkommen aplanatische Linse zu construiren, die beiderlei Krümmungen *verbinden*.

Ist z. B. (Fig. 65) *ACB* die für die gegebene Objektsweite nach (p. 121) construirte Krümmung, und *f* der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen, so hat man aus *f* eine sphärische Fläche *ADB* zu construiren. Die durch *ACB* auf *ADB* hingelenkten Strahlen haben alsdann die Richtung des Einfallslothes und vereinigen sich in *f*.

Dioptrische Bilder.

Werden von einem Lichtpunkt aus Strahlen auf eine brechende Fläche, oder auf eine Linse, oder auf ein System von Linsen gesendet, so empfängt ein hinter dem Brennpunkt befindliches Auge, wenn keine Abweichung stattfindet, einen Strahlenkegel, dessen Gipfel in dem wahren oder scheinbaren Brennpunkt liegt; man erblickt daher in diesem Brennpunkt ein Bild des Lichtpunktes. Kommt das Licht nicht von einem einzigen Punkte, sondern von einem leuchtenden oder erleuchteten Gegenstande, so erblickt man ein Bild jedes Punktes desselben, und mithin ein Bild des ganzen Gegenstandes.

Ist die brechende Fläche sphärisch, so läfst sich aus dem Vorigen der Ort eines jeden Punktes des Bildes bestimmen, da man jede durch den Krümmungsmittelpunkt gehende Linie als Axe betrachten kann. Das Bild eines Punktes des Objekts liegt daher in der durch denselben und den Krümmungsmittelpunkt gehenden Richtung, und zwar in einer Entfernung von der Fläche, welche durch $f = F + \mu e$ gegeben ist.

Nennt man nun Hauptaxe die zu der Mitte des Objekts gehörige Axe, so ist das Bild aufrecht, wenn die Brennpunkte (Bilder) der oberen Theile des Gegenstandes über der Hauptaxe, d. h. wenn sie diesseit des Centrums liegen, also virtuel sind; dagegen verkehrt, wenn sie unter der Hauptaxe, d. h. jenseit des Centrums liegen, also wahre Brennpunkte sind. Die dioptrischen Bilder sind sonach, wie die katoptrischen, aufrecht, wenn sie virtuelle, [verke]rkehrt, wenn sie wahre Bilder sind.

Ueberdies haben beide Arten von Bilder das mit einander gemein, dafs die in einer geraden Linie befindlichen Punkte im Bilde in einer Kegelschnittskrümmung liegen.

Ist die brechende Fläche eine Ebene *AB* (Fig. 66), so kann man dieselbe als eine Kugelfläche von unendlich grofsem Halbmesser (für die also $R = 0$ ist) ansehen, und für ein senkrecht über dem Objekt befindliches Auge befinden sich die Richtungen (Axen), welche die Brennpunkte enthalten, auf der brechenden Ebene senkrecht. Wenn nun das Objekt eine gerade Linie *CD* ist, so liegen die Bilder von *C* und *D* in den auf *AB* senkrechten Richtungen *CE* und *DH*, und man findet die Entfernungen dieser Bilder von *AB* aus der Formel $f = F + \mu e$, welche für diesen Fall, da wegen $R = 0$ auch $F = 0$ ist, in $f = \mu e$ übergeht. Es werden daher die Bilder von *C* und *D* in *c* und *d* liegen, da *CE* und *DH* gleich $-\frac{1}{e}$ ist, wenn $cE = n.EC$ und $dH = ndH$ ist. Das Bild von *CD* ist mithin eine gerade Linie, aber von anderer Neigung gegen *AB* als das Objekt, indem sich $tg\,CIA : tg\,cIA = 1 : n$ verhält.

Um den Ort und die Lage des durch Brechung in einer (aplanatischen) Linse erzeugten Bildes eines Gegenstandes durch geometrische Construction zu bestimmen, hat man nur nöthig für jeden Punkt des Objektes die Richtung zweier gebrochener Strahlen zu finden. Der Durchschnittspunkt beider ist alsdann das Bild des betreffenden Punktes.

Zu dem einen wählt man denjenigen Strahl, welcher durch die Brechung seine Richtung nicht ändert.

Soll ein einfallender Strahl dem austretenden parallel, also der Eintrittswinkel dem Austrittswinkel gleich sein, so müssen auch die Winkel innerhalb der Linse (der Brechungswinkel an der ersten Fläche und der Einfallswinkel an der zweiten) gleich sein. Die Normalen (die nach dem Eintritts- und Austrittspunkt gehenden Radien) beider Flächen müssen daher parallel sein.

Es sei nun (Fig. 67 u. 68) AB die brechende Linse, C der Mittelpunkt der vorderen, C_1 der Mittelpunkt der hinteren [illegible] und $Mbeg$ ein durch die Brechung seine Richtung [illegible] dernder Strahl. Alsdann muſs $\angle ebC = \angle beC_1$, also bC [illegible] $_1$ sein. Der Punkt d, in welchem be die Axe der Linse schneidet, heiſst der **Mittelpunkt der Linse**, und hat für jede Richtung der einfallenden Strahlen dieselbe Lage, da $Cd : CC_1 = Cb : Cb - C_1e$ ist, und CC_1, C_1e und Cb unveränderlich sind. Seine Entfernung od von der vordern Fläche ist, wenn man die Dicke oo_1 der Linse durch d, den Radius der vorderen Fläche durch r', den der hinteren durch r'' bezeichnet, da $CC_1 = r' + r'' - d$ ist,

$$od = Cd - Co = \frac{r'd}{r'' - r'} = \frac{R''d}{R' - R''}.$$

Der gebrochene Strahl eg liegt fast genau in der Verlängerung von Mb, wenn die Linse sehr dünn ist, oder wenn Mb nur schwach gegen die Axe geneigt ist, d. h. wenn das Objekt nur klein im Verhältniſs zur Entfernung von der Linse ist. Man braucht daher nur in diesen Fällen vom Objektspunkt M durch den Mittelpunkt d der Linse eine Linie zu ziehen, um den gebrochenen Strahl eg zu erhalten.

Zum zweiten gebrochenen Strahl nimmt man den Strahl Ma, welcher der Axe parallel ist, weil seine Richtung nach der Brechung durch den Haupt-Brennpunkt F geht. Ist die Dicke der Linse nur gering im Vergleich mit der Brennweite, so giebt schon die durch den Einfallspunkt a zu dem Brennpunkt F gezogene Linie hinreichend genau die Lage des Strahls an.

Der Durchschnittspunkt m der Linien dg und aF ist alsdann der Ort des Bildes des Punktes M.

Man sieht aus den Figuren, in denen mn das auf diese Weise construirte Bild von MN ist, daſs die vor der Linse liegenden (virtuellen) Bilder verkehrt, die hinter derselben liegenden (wahren) Bilder aufrecht sein müssen, und daſs sich die Gröſse des Bildes (in der Linear-Dimension) zu der des Objektes wie die respectiven Entfernungen von der Mitte d verhalten.

Wenn die Linse nicht aplanatisch ist, so entspricht jedem Punkte des Objekts nicht ein Punkt, von welchem aus divergirend die gebrochenen Strahlen ein Bild geben, sondern ein Kreis, nämlich der Abweichungskreis. Es dehnt sich also im Bilde jeder Punkt des Objekts zu einem Kreise aus, durch deren Ueberdeckung das Gesammtbild des Gegenstandes undeutlich wird. Die Deutlichkeit des Bildes hängt folglich von der Gröfse der sphärischen Abweichung ab; und man mufs daher, wenn man eine Linse zur Erzeugung deutlicher Bilder gebraucht, aplanatische nehmen, oder die Oeffnung so weit beschränken, bis die Störung unmerklich wird.

II. Brechung des zusammengesetzten Lichtes.

Brechung durch Prismen.

Die Ungleichheit der Geschwindigkeit verschiedenfarbiger Strahlen, und die damit verbundene Ungleichheit der Brechungswinkel bei einem und demselben Einfallswinkel bewirkt, dafs bei weifsem Einfallslichte die in demselben vorhandenen, unter sich aber parallelen verschiedenen Farbenstrahlen beim Eintritt in ein Prisma divergiren, und dafs diese Divergenz beim Austritt aus demselben noch vermehrt wird, so dafs — wenn das Licht von einem einzelnen Punkt oder von einer der Kante des Prismas parallelen Lichtlinie ausgeht — ein durch dasselbe hindurchsehende Auge das prismatische Spektrum erblickt.

Jedem Farbenstrahl entspricht ein anderer Ablenkungswinkel, und der Winkel, welchen die äufsersten der aus dem Prisma tretenden divergirenden Strahlen mit einander bilden, d. h. die Ausdehnung des Spektrums, ist nichts anderes, als der Unterschied der Ablenkungswinkel dieser Strahlen. Diese Divergenz oder diese Ausdehnung des Spektrums wird natürlich um so gröfser, je gröfser der Unterschied der Brechungsverhältnisse der rothen und vio-

letten Strahlen wird, d. h. je gröfser das Zerstreuungsvermögen der Substanz ist.

Legt man ein bestimmtes Prisma zum Grunde, und dreht dasselbe gegen den Lichtpunkt (oder die Lichtlinie), so dafs der Einfallswinkel sich stetig ändert, so ändert sich auch die Ausdehnung des Spektrums, und sie erreicht einen kleinsten Werth für einen bestimmten Einfallswinkel, der aber nicht mit demjenigen zusammenfällt, bei welchem die Ablenkung eines homogenen Lichtstrahls ein Kleinstes wird. Aendert man den Einfallswinkel nach der einen oder nach der andern Richtung hin, vorausgesetzt dafs die Einfalls-Ebene mit dem Hauptschnitt des Prismas zusammenfällt, so wächst die Ausdehnung des Spektrums ununterbrochen, jedoch so, dafs sie an der einen Grenze endlich bleibt, an der andern Grenze das Spektrum eine unbestimmte Länge erhält, nämlich da, wo das gebrochene Licht an der Hinterfläche des Prismas total reflektirt wird, und wo also die einfallenden Strahlen auf derjenigen Seite des Einfallslothes liegen, welche der Kante des Prismas zugekehrt ist.

Der erwähnte Einfallswinkel, bei welchem das Spektrum am kürzesten ist, wenn das Licht im Hauptschnitt einfällt, ist gegeben durch die Gleichung

$$n^2 sin(i+\alpha')cos(i+2\alpha')+sin\,\alpha' = 0,$$

wo i den brechenden Winkel des Prisma, und α' den Brechungswinkel an der Vorderfläche bedeutet.

Leitet man die aus einem Prisma tretenden divergirenden Strahlen so durch ein zweites Prisma, dafs sie nach ihrem endlichen Austritt parallel werden, so wird das Austrittslicht wiederum weifs, und man sagt, das erste Prisma sei durch das zweite achromatisirt. Zu diesem Zweck mufs man das Prisma so wählen, dafs das unter dem Austrittswinkel einfallende Licht die Strahlen genau ebenso divergiren macht, wie das erste Prisma unter dem ursprünglichen Einfallswinkel. Dreht man nämlich alsdann die Prismen so, dafs ihre Kanten einander gegenüberstehen, so werden die Strahlen um eben so viel gegen die andern zurückgelenkt, als sie durch das erste Prisma vorgelenkt

waren. Um sich dies klar zu machen, denke man sich *ABC* (Fig. 69) als das erste, *abc* als das zweite Prisma, *Sd* als einfallenden Strahl, welcher sich in *d* so theilt, dafs einer der Farbenstrahlen nach *e*, ein anderer nach *f* hin gebrochen wird, und dafs nach der zweiten Brechung der erste Strahl die Richtung *eg*, der zweite die Richtung *fh* annimmt. Der Divergenzwinkel, welcher die Länge des Spektrums bestimmt, wenn der eine der beiden Strahlen dem äufsersten Roth, der andere dem äufsersten Violett entspricht, ist alsdann *glh*.

Tritt nun der Strahl *eg* nach dem Durchgange durch das Prisma *abc* in der Richtung *ks'* aus, und hat dasselbe die Eigenschaft, dafs die beiden betrachteten Farbenstrahlen, wenn sie unter dem Winkel *s'kb* auffallend, nach dem Austritt unter demselben Winkel *glh* divergiren, so müssen die Strahlen *eg* und *fh*, die unter diesem Divergenzwinkel auffallen, parallel (nach *is* und *ks'*) austreten.

Dafs dies geschieht, wenn beide Prismen aus derselben Substanz bestehen, bei *A* und *a* gleiche brechende Winkel haben, und $AC \# ca$ ist, und zwar für alle Farbenstrahlen, ist (Bd. I, p. 167) erörtert worden. In diesem Falle sind indefs die austretenden Strahlen *is* und *ks'* mit *Sd* parallel, die Richtung der Strahlen wird also nicht geändert. Soll nicht blofs das Prisma *ABC* achromatisirt, sondern sollen auch die Strahlen abgelenkt werden, so kann man dies 1) dadurch erreichen, dafs man den brechenden Winkel bei *a* ändert, und zugleich *ac* gegen *AC* so neigt, dafs der Divergenzwinkel *glh* für beide Prismen gleich wird. Dafs dies möglich ist, geht aus der obigen Bemerkung hervor, dafs man durch Aenderung des Einfallswinkels dem Spektrum jede beliebige Länge geben kann. 2) Läfst sich der mit Strahlenablenkung verbundene Achromatismus dadurch erreichen, dafs man das zweite Prisma aus einer andern Substanz nimmt. Man kann hierbei die Flächen *AC* und *ac* parallel lassen, und hat alsdann nur den brechenden Winkel bei *a* schicklich zu ändern. Ist das Zerstreuungsvermögen des zweiten Prismas

gröfser als das des ersten (besteht also z. B. *ABC* aus Kronglas und *abc* aus Flintglas), so würde für $A = a$, das Spektrum von *abc* gröfser als das von *ABC* werden; man mufs daher alsdann $a < A$ nehmen; man mufs dagegen $A > a$ nehmen, wenn *ABC* das Licht stärker zerstreut als *abc*.

Sind die brechenden Winkel nur klein, und läfst man das Licht unter dem Winkel der kleinsten Ablenkung einfallen, so achromatisiren sich die Prismen, wenn sich die brechenden Winkel umgekehrt wie die Unterschiede der Brechungsverhältnisse verhalten, d. h. wenn die Brechungsverhältnisse der beiden betrachteten Farbenstrahlen n und $n + \delta n$ für das erste, und n' und $n' + \delta n'$ für das zweite Prisma vorstellen, wie $\delta n' : \delta n$.

Man sieht hieraus, dafs sowohl wenn die Prismen von derselben Substanz, als wenn sie von verschiedenen Substanzen genommen werden, nur zwei Farbenstrahlen parallel austreten, und dafs daher das Austrittslicht nicht ganz ungefärbt bleibt.

Sollten nämlich sämmtliche Strahlen parallel austreten, sollte der Achromatismus also vollkommen sein, so müfsten unter den gegebenen Umständen in beiden Prismen alle Strahlen gleich stark divergiren, die Farben in beiden Spektren müfsten also genau gleich vertheilt sein — ein Umstand, welcher bei keinem Paar bekannter Substanzen stattfindet.

Um daher das Austrittslicht möglichst frei von Farben zu machen, mufs man diejenigen beiden Strahlen zum parallelen Austritt bringen, welche das lebhafteste Licht geben, und zugleich im Spektrum möglichst weit von einander abstehen. Man wählt dazu das an Orange grenzende Roth und das intensivste Blau, oder die den Fraunhoferschen Linien *D* und *F* entsprechenden Farben. Die benachbarten (hellen) Farben treten alsdann gleichfalls nahe parallel aus, und stören wenig oder gar nicht, während die übrigbleibenden Farben Grün und ein schwaches Purpur geben. Eine solche Verbindung von zwei Prismen giebt ein sehr kurzes Spektrum, dessen weifse Mitte an der einen Seite

grün, an der anderen röthlich gefärbt ist. Man nennt dieses Spektrum secundäres Spektrum.

Verbindet man mehrere Prismen mit einander, so lassen sich so viel Strahlen zum vollkommenen Parallelismus bringen, als man Prismen anwendet. Zu den bei drei Prismen fortzubringenden Farben nimmt man am bequemsten die der Strahlen *C*, *E* und *G*. Das durch solche Prismenverbindung erzeugte Spektrum nennt man tertiär.

Brewster hat das secundäre Spektrum für eine grofse Anzahl Substanzen untersucht, und diese letzteren in einer Tafel so zusammengestellt, dafs das Grün des secundären Spektrums je zweier um so stärker ist, je weiter sie in der Tafel von einander entfernt stehen. Das Verzeichnifs ist folgendes:

1) Schwefelsäure.
2) Phosphorsäure.
3) Schweflige Säure.
4) Phosphorige Säure.
5) Schwefelwasserstoffsäure.
6) Wasser.
7) Eis.
8) Thierisches Eiweifs.
9) Bergkrystall.
10) Salpetersäure.
11) Blausäure.
12) Salzsäure.
13) Salpetrige Säure.
14) Essigsäure.
15) Aepfelsäure.
16) Citronensäure.
17) Flufsspath.
18) Blauer Topas.
19) Beryll.
20) Selenit.
21) Leucit.
22) Turmalin.
23) Borax.
24) Boraxglas.
25) Aether.
26) Alkohol.
27) Arabisches Gummi.
28) Kronglas.
29) Mandelöl.
30) Rochellersalz.
31) Wachholdergummi.
32) Steinsalz.
33) Kalkspath.
34) Bernsteinöl.
35) Wachholderöl.
36) Spermacetöl.
37) Rübsöl.
38) Olivenöl.
39) Zirkon.
40) Flintglas.
41) Rhodiumöl.
42) Rosmarinöl
43) Bockshornöl.
44) Copaivabalsam.
45) Nufsöl.
46) Sebenbaumöl.

47) Rautenöl.
48) Buchelöl.
49) Salpeter.
50) Diamant.
51) Harz.
52) Copalgummi.
53) Castorfett.
54) Camillenöl.
55) Dillsamenöl.
56) Wermuth.
57) Majoranöl.
58) Bergamotöl.
59) Pfeffermünzöl.
60) Thymianöl.
61) Muscatnufsöl.
62) Limoniöl.
63) Bernstein.
64) Frauenmünzöl.
65) Hyssopöl.
66) Mohnöl.
67) Flohkrautöl.
68) Salbeiöl.
69) Terpenthinöl.
70) Canadabalsam.
71) Lavendelöl.
72) Salzsaures Antimon.
73) Gewürznelkenöl.
74) Fenchelsamenöl.
75) Rothes Glas.
76) Orangefarbenes Glas.
77) Opalfarbenes Glas.
78) Geschmolzener Bleizucker.
79) Ambra.
80) Sassafrasöl.
81) Kümmelöl.
82) Anissamenöl.
83) Bittermandelöl.
84) Kohlensaures Blei.
85) Tolubalsam.
86) Schwefelalkohol.
87) Schwefel.
88) Ricinusöl.

Chromatische Abweichung sphärischer Linsen.

Da die Brennweite einer Linse von dem Brechungsverhältnifs abhängt, so hat jede Farbe ihren eigenen Brennpunkt, und da die brechbarsten Strahlen am stärksten abgelenkt werden, d. h. da die brechbarsten Strahlen nach der Brechung mit den einfallenden die gröfsten Winkel bilden, so ist die Brennweite der violetten Strahlen im Allgemeinen kürzer als die der rothen. Es mufs dies nämlich dann stattfinden, wenn der Punkt, von welchem die Einfallsstrahlen aus convergiren, oder gegen den sie convergiren, und die Brennpunkte auf verschiedenen Seiten der Linse liegen, oder, falls sie auf derselben Seite liegen, wenn die Objektsweite gröfser ist als die Brennweite. Dagegen wird *die Brennweite* der rothen Strahlen die kürzere, wenn in

dem letzteren Falle die Objektsweite kleiner ist als die Brennweite, d. h. wenn bei Sammellinsen das Objekt innerhalb der vorderen Haupt-Brennweite sich befindet, und bei Zerstreuungslinsen, wenn die Einfallsstrahlen gegen einen Punkt hinter der Linse convergiren, welcher innerhalb der Haupt-Brennweite liegt. Hält man daher, im Fall der Brennpunkt ein wahrer ist, einen Schirm in die Brennweite der mittleren Strahlen, so erscheint im ersten Fall ein Kreis mit rothem Rande, im zweiten Fall ein Kreis mit blauem Rande.

Dasselbe, was man in Bezug auf die Rand- und Centralstrahlen sphärische Längen- und Seiten-Abweichung nennt, heifst in Bezug auf die blauen und rothen Strahlen chromatische Längen- und Seiten-Abweichung; und es giebt ebenso zwischen dem Brennpunkt der äufsersten rothen Strahlen und dem der äufsersten violetten einen Kreis der kleinsten (chromatischen) Abweichung, wie es zwischen dem Brennpunkt der Centralstrahlen und der äufsersten Randstrahlen einen Kreis der kleinsten (sphärischen) Abweichung giebt. Wenn F der umgekehrte Werth der Focallänge, f der umgekehrte Werth der Vereinigungsweite der gebrochenen Strahlen, und θ das Zerstreuungsverhältnifs $\frac{\delta n}{n-1}$ ist, und wenn man die Linse als sehr dünn voraussetzt, so ist die chromatische Längenabweichung der Centralstrahlen:

$$\frac{F\theta}{f^2}.$$

Verbindet man zwei Linsen so, dafs die chromatische Abweichung der einen durch die andere vernichtet wird, so sagt man, jene sei durch diese achromatisirt.

Nennt man den leuchtenden Punkt S, und den Vereinigungspunkt der Strahlen nach dem Durchgange durch beide Linsen p, so wird ein solcher Achromatismus hergestellt, wenn die verschiedenfarbigen Brennpunkte der ersten Linse gedeckt werden würden von den ebenso gefärbten Brennpunkten der zweiten Linse, im Fall das Licht

auf dieselbe von p aus fiele. Sind z. B. AB und CD (Fig. 70) die beiden Linsen, und v der Brennpunkt der violetten, r der Brennpunkt der rothen Strahlen nach der Brechung durch AB; ist ferner r' der Brennpunkt der rothen Strahlen nach der Brechung durch AB und CD; und würden, wenn von r' aus weifses Licht auf CD fiele, die rothen Strahlen nach r, die violetten nach v gebrochen, so müssen umgekehrt, wenn das Licht von S ausgeht, die genannten Strahlen nach dem Durchgang durch die Doppellinse eine gemeinsame Richtung annehmen. Denn wenn das von r' ausgehende Licht nach der Brechung durch CD seinen Brennpunkt in r oder v hat, so mufs auch das von r oder v ausgehende Licht seinen Brennpunkt in r' haben.

Zum Achromatismus ist daher nur nöthig, dafs die erste Linse für die Objektsweite Sm dieselbe chromatische Abweichung, oder, genauer gesagt, dieselbe Brennpunktslage hat, als die zweite Linse für irgend eine Objektsweite nr'.

Nun ist aber 1) bei constanter Focallänge die chromatische Abweichung um so gröfser, je gröfser die Brennweite (die Vereinigungsweite der gebrochenen Strahlen) ist, weil die von einem und demselben Einfallsstrahl herrührenden gebrochenen Farbenstrahlen vermöge ihrer Divergenz die Axe in Punkten schneiden, welche von einander um so entfernter liegen, je später sie dieselbe treffen. — 2) Ist bei constanter Objektsweite die Abweichung um so gröfser, je kürzer die Focallänge ist, weil in diesem Fall die Divergenz der Farbenstrahlen wegen ihrer gröfseren Ablenkung bedeutender wird.

Man kann daher den Achromatismus entweder dadurch herstellen, dafs man die zweite Linse CD in eine solche Entfernung von AB bringt, dafs für die Objektsweite $r'n$ die Abweichungen beider Linsen zusammenfallen; oder, wenn man der Linse CD eine bestimmte Stellung geben (sie z. B. so nahe als möglich an AB heranrücken) will, dadurch, dafs man die Brennweite so ändert, dafs die Abweichungen zusammenfallen.

Was den ersten Fall betrifft, so erhellt, dafs bei ge-

gebener Substanz nicht immer eine achromatisirende Linse möglich ist, da zugleich die Bedingung hinzutritt, dafs die zweite Linse hinter die erste zu stehen kommen mufs. Die zum Achromatismus der Centralstrahlen nöthige Entfernung der Linsen ist, wenn dieselben sehr dünn sind,

$$\frac{1}{F}\left(1-\sqrt{-\frac{\theta'}{\theta''}\frac{F}{F'}}\right),$$

wo F und F' beziehlich die reciproken Focallängen der beiden Linsen, und θ' und θ'' deren Zerstreuungsverhältnisse bedeuten.

Was den zweiten Fall betrifft, so ist die Gleichung, welche die zum Achromatismus erforderliche Focallänge der zweiten Linse bestimmt, vorausgesetzt, dafs beide Linsen sehr dünn sind, sich berühren, und nur die Centralstrahlen berücksichtigt werden,

$$F' = -\frac{\theta'}{\theta''}F.$$

Aus beiden Ausdrücken geht hervor, dafs F und F' verschiedene Zeichen haben müssen, d. h. dafs die eine Linse eine Sammellinse, die andere eine Zerstreuungslinse sein mufs.

Die letzte Bedingung läfst sich auch unmittelbar aus der Figur erschliefsen, da im entgegengesetzten Fall der rothe Brennpunkt auf den violetten, und der violette auf den rothen fallen würde.

Da ferner aus dem Gesagten hervorgeht, dafs der Achromatismus nicht von den Krümmungen, sondern nur von den Focallängen abhängt, so kann die Bedingung des Achromatismus nie mit der Bedingung des Aplanatismus, welcher nur von den Krümmungen abhängt, in Widerspruch gerathen, und es kann daher jede achromatische Doppellinse auch aplanatisch gemacht werden.

Wie bei zwei achromatischen Prismen, läfst sich auch durch zwei Linsen die chromatische Abweichung nur für zwei Farbenstrahlen vernichten, und man wählt daher hier, wie dort, die beiden störendsten aus. Die Anwendung

mehrerer Linsen macht indefs auch die Berücksichtigung mehrerer Farben möglich.

Was die achromatische Abweichung der Randstrahlen betrifft, so ist dieselbe in aplanatischen Verbindungen nur gering, da die Abweichungen in diesem Fall nach derselben Richtung hin geschehen.

Zweite eilung.

Analytische Entwickelu g der katoptrischen und dioptrischen Erscheinungen.

A. *Katoptrik.*

Da für die Anwendung derjenige Fall allein von Wichtigkeit ist, in welchem die reflektirende Fläche eine Umdrehungsfläche ist, so möge derselbe allein hier erörtert werden.

Werden von einem leuchtenden Punkt, welcher in der Umdrehungsaxe liegt, Lichtstrahlen auf den Spiegel gesendet, so schneiden die reflektirten Strahlen oder ihre Verlängerungen die Axe in Punkten, welche im Allgemeinen nicht zusammenfallen. Nur diejenigen Strahlen, welche auf Punkte des Spiegels fallen, die in einer auf der Axe senkrechten Ebene liegen, treffen, wie wir gesehen haben, nach der Reflexion unter jeder Bedingung in einem in der Axe liegenden Punkt zusammen, nämlich in dem Brennpunkte desjenigen reflektirenden Kreises des Spiegels, welcher von den betreffenden Einfallspunkten gebildet wird.

Die Kenntnifs der Lage dieser Brennpunkte für die verschiedenen Ringe, aus denen man sich den Spi stehend denken kann, führt auf die Kenntnifs dei theilung des reflektirten Lichtes, also auf die Lage waigen Bilder, auf die Brennfläche, u. s. w.

Bestimmung der Lage der von Spiegeln reflektirten Strahlen. Brennpunkte.

Da die Lage der einfallenden und reflektirten Strahlen gegen die Axe dieselbe ist in allen durch die Axe gehenden Ebenen, so ist nur nöthig, den Vorgang in einer dieser Ebenen zu betrachten.

Sind z. B. ξ, η die Coordinaten des reflektirenden Punktes, a und a' beziehlich die Abscissen der Durchschnittspunkte des einfallenden und reflektirten Strahls mit der Axe, und φ, φ' die Winkel, welche diese Strahlen mit der Umdrehungsaxe, welche zugleich die Axe der x sei, bilden, so ist die Gleichung des einfallenden Strahls

$$1)\quad y-\eta = tang\,\varphi(x-\xi),$$

und die des reflektirten:

$$2)\quad y-\eta = tg\,\varphi'(x-\xi),$$

während $tang\,\varphi = \frac{\eta}{\xi-a}$, $tang\,\varphi' = \frac{\eta}{\xi-a'}$ ist.

Ist also aufser dem Einfallspunkt (ξ, η) a gegeben, so ist die Lage beider Strahlen bestimmt, sobald man a', oder, was dasselbe ist, die Entfernung ihrer beiden Durchschnittspunkte mit der Axe, $a'-a$, kennt. Diese Differenz findet sich leicht aus dem Reflexionsgesetz.

Es sei AB (Fig. 71) der Durchschnitt der reflektirenden Fläche mit der Einfalls-Ebene (die Erzeugungscurve), SM der einfallende Strahl, MT die Tangente an M, MC die Normale, Ms' der reflektirte Strahl, s der Durchschnittspunkt seiner Richtung mit der Axe OC, und O der Ursprung der Coordinaten. Alsdann ist $OP=\xi$, $PM=\eta$, $OS=a$, $Os=a'$, $\angle MSC=\varphi$, $\angle MsC=\varphi'$; ferner ist (wegen $SMD=DMs'$) $SMT=sMT$, und

$$Ss = a'-a = SP-sP = \xi-a-sP,$$

während $sP = MP\,tang\,PMs = \eta\,tg(TMP-TMs)$ ist, und man hat wegen $TMs = MTP-\varphi$, und $TMP = 90^0 - MTP$,

$$a'-a = \xi-a-\eta\,tang(90^0-2MTP+\varphi).$$

Da ferner $tang\, MTP = \frac{\partial\eta}{\partial\xi}$ und $tang\,\varphi = \frac{\eta}{\xi - a}$ i
so ergiebt sich, wenn man $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = p$ setzt,

$$3)\quad a' - a = \xi - a - \eta\, cotg\left[2\, arc(tg = p) - arc\left(tg = \frac{\eta}{\xi - a}\right)\right.$$

Dieser Ausdruck wird noch einfacher, wenn man l denkt, dafs $2\, arc(tg = p) = arc\left(tg = \frac{2p}{1-p^2}\right)$, und de nach, b für $\frac{\eta}{\xi - a}$ setzend,

$$arc(tg\, p) - arc(tg\, b) = arc\left(tg\, \frac{2p - (1-p^2)b}{(1-p^2) + 2pb}\right) \text{ ist.}$$

Die Gleichung (3) geht alsdann über in:

$$a' - a = \xi - a - \eta\, \frac{1 - p^2 + 2pb}{2p - (1-p^2)b},$$

wofür sich schreiben läfst:

$$\text{I.}\quad a' - a = 2\, \frac{(\xi - a + p\eta)(p\xi + pa - \eta)}{2p(\xi - a) - (1 - p^2)\eta}.$$

Insofern $PMs = 90^0 - 2\, MTP + \varphi$ ist, ergiebt si $\varphi' = MsT = 2\, arc(tg\, p - \varphi)$ und mithin

$$4)\quad tg\,\varphi' = \frac{2p(\xi - a) - (1 - p^2)\eta}{(1 - p^2)(\xi - a) + 2p\eta}.$$

Ist der leuchtende Punkt sehr entfernt, und der e fallende Strahl der Axe parallel, so dafs $a = -\infty$ u $\varphi = 0$ wird, so erhält man

$$5)\quad tg\,\varphi' = \frac{2p}{1 - p^2},\qquad a' = \xi - \eta\,\frac{1 - p^2}{2p}.$$

Die Entfernung a' ist zugleich die Entfernung d Brennpunktes desjenigen reflektirenden Kreises, dessen A scisse ξ ist.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich sogleich der Ve einigungspunkt der von einem e b e n e n Spiegel reflektirt Strahlen. Steht die Ebene des Spiegels senkrecht auf d

Axe, so wird für sie $\xi = a$, $p = \infty$, also

$$a' = \frac{2\xi . \eta}{\eta} = 2\xi = 2a.$$

Der Durchschnittspunkt des reflektirten Strahls mit der Axe ist also unabhängig von η, mithin für jede Richtung des Einfallsstrahls derselbe, und zwar vom leuchtenden Punkt doppelt so weit entfernt, wie vom Spiegel.

Für gekrümmte Flächen ändert sich a' im Allgemeinen mit ξ, und die Brennpunkte der successiv auf einander folgenden reflektirenden Kreise liegen in der Axe hinter einander. Es läfst sich aber die Frage stellen, welche Krümmung die Fläche haben mufs, wenn für eine bestimmte Lage a des leuchtenden Punktes sämmtliche Brennpunkte zusammenfallen, d. h. wenn a' constant bleiben soll.

Setzen wir zu diesem Zweck den Ausdruck für $a' - a$ aus (I.) einer Constanten $2C$ gleich, und wählen den Anfangspunkt der Coordinaten so, dafs $a = C$ wird, so erhält man

$$6) \quad p(\xi^2 - \eta^2 - C^2) = (1 - p^2)\xi\eta.$$

Führt man einen neuen Veränderlichen z so ein, dafs $py = xz$ wird, und multiplicirt mit y, so kommt:

$$\xi z(\xi^2 - \eta^2 - C^2) = \xi\eta^2 - \xi^3 z^2,$$

also $$\eta^2 = \frac{z\xi^2 - C^2 z + z^2\xi^2}{1 + z} = z\xi^2 - C^2\frac{z}{1+z},$$

und hieraus, wenn man differenzirt,

$$2\eta\partial\eta = 2\xi z\partial\xi + \xi^2\partial z - C^2\partial\left(\frac{z}{1+z}\right)$$

oder, da $\eta\partial\eta = p\eta\partial\xi = \xi z\partial\xi$ ist,

$$\left(\xi^2 - \frac{C^2}{(1+z)^2}\right)\partial z = 0.$$

Nur der zweite Faktor $\partial z = 0$ giebt eine Lösung *), nämlich $z = c$ (Const.). Setzt man für z wiederum seinen

---

*) Der erste Faktor liefert nämlich $\xi = \pm\frac{C}{1+z}$, d. h. $\xi + p\eta = C$, oder, wenn man p mittelst (6) eliminirt, $\eta^2 + (\xi - C)^2 = 0$, welche Gleichung keine reele Werthe für η liefert.

Werth $\frac{p\eta}{\xi}$ und integrirt, so ergiebt sich die allgemeine Gleichung für die Kegelschnitte:

$$\eta^2 = c(\xi^2 - A),$$

wo A die durch die Integration eingehende neue Constante ist.

Es sind also die Umdrehungsflächen der zweiten Ordnung die einzigen, welche die Eigenschaft besitzen, sämmtliche Strahlen für eine bestimmte Entfernung des lichtaussendenden Punktes in einen Pu kt zu vereinigen.

Ist der Spiegel sphärisch, die Gleichung des Erzeugungskreises $r^2 = (\xi - b)^2 + \eta^2$, und mithin $p = -\frac{\xi - b}{\eta}$, $1 - p^2 = \frac{2\eta^2 - r^2}{\eta^2}$, so erhält man aus (I.) für die Distanz des Brennpunktes, wenn man die Abscissen vom strahlenden Punkt an zählt, also $a = 0$ setzt,

$$a' = \frac{2b[r^2 + b(\xi - b)]}{r^2 + 2b(\xi - b)}.$$

Hieraus findet sich sogleich die Brennweite, d. h. die Entfernung des Brennpunktes vom Krümmungscentrum des Spiegels (welche durch q bezeichnet sei)

$$7)\quad q = a' - b = \frac{br^2}{r^2 + 2b(\xi - b)}.$$

Da a' und b nach der Richtung hin gerechnet sind, welche vom leuchtenden Punkt aus nach dem Spiegel hin geht, so liegt der Brennpunkt vor dem Spiegel, und ist demnach ein wahrer Brennpunkt, wenn q negativ ist (also bei concaven Spiegeln); er liegt dagegen hinter dem Spiegel (und ist demnach virtuel), wenn q positiv wird (also bei convexen Spiegeln).

Man ersieht sogleich aus (7), dafs q bei solchen Aenderungen von ξ wenig variirt, bei welchen $\xi - b$ im Ve[r]gleich mit r sehr klein ist — ein Umstand, welcher fi diejenigen Strahlen eintritt, welche mit der Axe, nur kleine Winkel bilden (für die Centralstrahlen).

das Centrum $\xi + b = r$ wird, wenn man r po

negativ nimmt, je nachdem der Spiegel concav oder convex ist, so liefert die Gleichung (7) für die gemeinsame Brennweite dieser Centralstrahlen

$$8)\quad q = \frac{br}{r+2b} = \tfrac{1}{2}r - \frac{(\frac{1}{2}r)^2}{b+\frac{1}{2}r}.$$

Die Entfernung dieses Brennpunktes von der Mitte des Krümmungshalbmessers r ist daher $\frac{(\frac{1}{2}r)^2}{b+\frac{1}{2}r}$, also um so geringer, je gröſser b, d. h. je entfernter der leuchtende Punkt ist. Die Brennweite ist der Hälfte des Krümmungshalbmessers genau gleich, wenn $b = \infty$ ist, die Strahlen also parallel auffallen (Haupt-Brennweite). Ist r positiv, also der Spiegel concav, so ist, wie man aus (8) sieht, q nur dann $> \frac{1}{2}r$, wenn b negativ und $> \frac{1}{2}r$ ist, d. h. wenn der leuchtende Punkt zwischen dem Spiegel und dem Haupt-Brennpunkt liegt. Ist r negativ, also der Spiegel convex, so ist q stets $> \frac{1}{2}r$, da stets $b > -\frac{1}{2}r$ ist.

Ist (Fig. 72) NAM ein sphärischer Spiegel, C dessen Krümmungsmittelpunkt, SM ein einfallender, Ms der reflektirte Strahl und $Cf = fA = \frac{1}{2}r$, so ist $Sf = b + \frac{1}{2}r$, $sf = \frac{1}{2}r - q$, und es folgt aus (8) die Proportion:

$$Sf : Cf = Cf : sf.$$

Ebenso ergiebt sich, wenn der Spiegel convex, SM' der einfallende, $M's'$ der reflektirte Strahl, und $Cf' = \frac{1}{2}r$ ist, $Sf' : Cf' = Cf' : s'f'$.

Sphärische Aberration.

Nennt man q die Brennweite derjenigen Strahlen, welche am Rande des Spiegels auffallen, und f die der Centralstrahlen, so hat man für ihre Differenz (Longitudinal-Aberration):

$$9)\quad q - f = \frac{br^2}{r^2 + 2b(\xi - b)} - \frac{br}{r+2b}.$$

Wenn das den Spiegel bildende Kugelsegment nur wenige Grade umfaſst, so daſs die Ordinate der äuſsersten (Rand-) Strahlen, welche durch η_1 bezeichnet sein möge,

mit dem Krümmungshalbmesser verglichen, nur klein ist, so ist auch $q-f$ nicht sehr bedeutend, und man erhält dafür einen genäherten Werth, wenn man für $\xi-b$, oder was dasselbe ist, für $(r^2-\eta_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $r-\frac{\eta_1^2}{2r}$ setzt. Dadurch erhält man

$$q-f=\frac{br^2}{2br+r^2-\frac{b\eta_1^2}{r}}-\frac{br}{2b+r}=\frac{b^2\eta_1^2}{r(2b+r)^2},$$

oder wenn man für b die Haupt-Brenntweite (von der Spiegelfläche an gerechnet) $f=\frac{r(b+r)}{2b+r}$ einführt,

$$q-f=\frac{(r-f)^2\eta_1^2}{r^3}.$$

Für parallele Einfallsstrahlen wird $q-f=\frac{\eta_1^2}{4r}$.

Ist (Fig. 73) SP einer der auf den Spiegel PAP_1 fallenden von S ausgehenden Randstrahlen, und Pg seine Richtung nach der Reflexion; ferner CQ einer der Centralstrahlen, welcher nach der Reflexion die Richtung Qf annehme, so ist die Senkrechte fg die Lateral-Aberration.

Man hat unmittelbar $fg=fs.\frac{PM}{Ms}=\frac{(q-f)\eta_1}{Ms}$, während $Ms=CM-Cs=(\xi-b)-q$ ist. Setzt man für q seinen Werth aus (7), und für $q-f$ seinen Werth aus (9), so erhält man

$$10)\quad fg=\frac{2b^2r\eta_1}{2b+r}\cdot\frac{b-\xi+r}{r^2(\xi+2b)+2b(\xi-b)^2},$$

und näherungsweise für kleine Werthe von η_1,

$$11)\quad fg=\frac{b^2\eta_1^3}{r^2(r+b)(r+2b)},$$

welcher Ausdruck für parallele Einfallsstrahlen übergeht in

$$12)\quad fg=\frac{\eta_1^3}{2r^2}.$$

Bestimmung der Brennfläche.

Betrachten wir wiederum zuerst die Curve, welche durch die Durchschnittspunkte der von der Erzeugungscurve reflektirten Strahlen gebildet wird.

Die Gleichung des von einem Punkte (ξ, η) dieser Curve reflektirten Strahls ist

$$13)\quad y-\eta = A(x-\xi);$$

die Gleichung desjenigen Strahls, welcher vom nächst folgenden Punkt ($\xi+\partial\xi$, $\eta+\partial\eta$) reflektirt wird,

$$y-(\eta+\partial\eta) = (A+\partial A)[x-(\xi+\partial\xi)].$$

Die Verbindung dieser beiden Gleichungen, oder, was noch bequemer ist, die Verbindung der ersten Gleichung (13) mit der durch Subtraction aus beiden entstehenden

$$14)\quad -\partial\eta = (x-\xi)\partial A - A\partial\xi$$

giebt die Coordinaten des Durchschnittspunktes (x, y), nämlich

$$15)\quad x = \xi + \frac{A-p}{\partial A}\partial\xi, \quad y = \eta + A\frac{A-p}{\partial A}\partial\xi,$$

aus denen sich die Gleichung der aus sämmtlichen Durchschnittspunkten gebildeten Curve (der **Brennlinie**) ergiebt, wenn man für A seinen Werth $tang\,\varphi'$ aus (4) setzt, und ξ und η mittelst der Gleichung der Spiegelcurve eliminirt. Diese Brennlinie ist die Erzeugungscurve der **Brennfläche**.

Gehen sämmtliche Strahlen von einem Punkt der Axe aus, so dafs a constant ist, so erhält man, wenn man der Einfachheit wegen $a=0$ und $\frac{\partial p}{\partial x}=q$ setzt,

$$A = \frac{2p\xi-(1-p^2)\eta}{2p\eta+(1-p^2)\xi}, \quad A-p = \frac{(1+p^2)(p\xi-\eta)}{2p\eta+(1-p^2)\xi},$$

$$\frac{\partial A}{\partial\xi} = (1+p^2)\frac{(1+p^2)(\eta-p\xi)+2q(\xi^2+\eta^2)}{[2p\eta+(1-p^2)\xi]^2},$$

also, wenn man $\xi^2+\eta^2=r_1^2$ setzt,

$$16)\quad \begin{cases} x = 2\dfrac{p(p\xi-\eta)^2-qr_1^2\xi}{(1+p^2)(p\xi-\eta)-2qr_1^2}, \\[2ex] y = 2\dfrac{(p\xi-\eta)^2+qr_1^2\eta}{(1+p^2)(\eta-p\xi)+2qr_1^2}. \end{cases}$$

Ist der leuchtende Punkt sehr entfernt, sind die auffallenden Strahlen also parallel, so erhält man aus (5)

$$A = \frac{2p}{1-p^2}, \quad A - p = \frac{p(1+p^2)}{1-p^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{2q(1+p^2)}{(1-p^2)^2},$$

$$17) \quad x = \xi + \frac{p(1-p^2)}{2q}, \quad y = \eta + \frac{p^2}{q}.$$

Kommen die einfallenden Strahlen nicht aus einem Punkt, sondern sind sie etwa selbst von einer Umdrehungsfläche reflektirt, deren Umdrehungsaxe mit derjenigen der neuen reflektirenden Fläche zusammenfällt, so läfst sich die Brennfläche folgendermafsen bestimmen.

Die von den Durchschnittspunkten der einfallenden Strahlen gebildete Fläche, deren Erzeugungscurve durch die Gleichung $y_1 = \varphi(x_1)$ gegeben sei, ist alsdann die Brennfläche der ersten reflektirenden Fläche, und die Gleichung der Einfallsstrahlen daher, da dieselben die Curve $y_1 = \varphi(x_1)$ berühren,

$$18) \quad y_1 - \eta = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1 - \xi).$$

Für dieselben Strahlen hat man überdies aus (1)

$$y_1 - \eta = \frac{\eta}{\xi - a}(x_1 - \xi).$$

Substituirt man den hieraus entnommenen Werth von $\xi - a$, nämlich $\xi - a = \frac{y_1 - \eta}{x_1 - \xi}\eta$, in die Gleichung (4), so erhält man

$$19) \quad tg\,\varphi' = A\,\frac{2p(x_1 - \xi) - (1-p^2)(y_1 - \eta)}{(1-p^2)(x_1 - \xi) + 2p(y_1 - \eta)},$$

welche in Verbindung mit (16) die Gleichung der neuen kaustischen Fläche giebt, aus welcher man noch x_1 und y_1 mittelst (18) und der Gleichung $y_1 = \varphi(x_1)$ zu eliminiren hätte.

Brennlinie des Kreises für parallel auffallende Strahlen.

Die Gleichung des Kreises sei $\xi^2+\eta^2=r^2$, also

$$p=-\frac{\xi}{(r^2-\xi^2)^{\frac{1}{2}}},\quad q=-\frac{r^2}{(r^2-\xi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man erhält alsdann aus (17):

$$x=\frac{3r^2-2\xi^2}{2r^2}\xi,\quad y=\frac{(r^2-\xi^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2}=\frac{\eta^3}{r^2},$$

und wenn man diese Gleichungen quadrirt und addirt, dabei $r=1$ setzend, $\xi^2=\frac{4}{3}(1-x^2-y^2)$, und dies in $y^2=(1-\xi^2)^3$ substituirt, giebt

$$20)\quad 27y^2=(4x^2+4y^2-1)^3.$$

Die Brennlinie ist also eine Epicycloide, deren Revolutionskreis zum Radius $\frac{1}{4}$ hat. Siehe Fig. 56.

Kreis der kleinsten Abweichung.

Wenn (Fig. 61) ADB der Durchschnitt eines sphärischen Spiegels, $\alpha\beta f\alpha b$ der seiner kaustischen Fläche für eine bestimmte Entfernung des leuchtenden Punktes, und $Aa\alpha$, $Bb\beta$ die Richtung der von den Punkten A und B des Randes reflektirten Strahlen ist, so ist, wie wir p. 133 gesehen haben, $\alpha\beta$ der Durchschnitt des Kreises der kleinsten Abweichung. Sind wiederum ξ_1 und η_1 die Coordinaten des Punktes A, und bezeichnet man den Winkel AsD durch φ_1', so ist die Gleichung der Linie $Aa\alpha$:

$$y-\eta_1=tang\,\varphi_1'(x-\xi_1),$$

welche in Verbindung mit der Gleichung der kaustischen Fläche die Coordinaten des Durchschnittes α giebt, und somit auf den Durchmesser $\alpha\beta$ und auf die Entfernung des Kreises $\alpha\beta$ von D, nämlich auf iD führt.

Ist die reflektirende Fläche sphärisch, und fallen die Strahlen parallel auf dieselbe, so erhält man aus (5):

$$tg\,\varphi_1'=\frac{2p}{1-p^2},$$

oder, insofern hier $p=\frac{\eta_1}{\xi_1}$ ist,

$$tg\,\varphi_1' = \frac{2\xi_1\eta_1}{\xi_1^2-\eta_1^2} = \frac{2\xi_1\eta_1}{1-2\eta_1^2}.$$

Die Gleichung des Strahls $Aa\alpha$ ist daher

$$y-\eta_1 = \frac{2\xi_1\eta_1}{1-2\eta_1^2}(x-\xi_1),$$

woraus man findet

$$2x = \frac{1}{\xi_1}\left(\frac{1-2\eta_1^2}{\eta_1}y+1\right).$$

Führt man einen neuen Unbekannten z so ein, dafs $y=\eta_1^3 z^3$ wird, so erhält man, da die letzte Gleichung $4x^2=\frac{1}{1-\eta_1^2}[(1-2\eta_1^2)\eta_1^2 z^3+1]^2$ giebt, durch Substitution dieses Werthes von $4x^2$, für y^2 seinen Werth $\eta_1^6 z^6$ setzend, aus (20):

$$\eta_1^2 z^6+2(1-2\eta_1^2)z^3+3(\eta_1^2-1)z^2+1 = 0,$$

und durch $(1-z)^2$ dividirend,

$$21)\quad \eta_1^2 z^4+2\eta_1^2 z^3+3\eta_1^2 z^2+2\eta_1+1 = 0.$$

Entwickelt man z nach Potenzen von η_1, so genügen die ersten Glieder, wenn η_1 erheblich kleiner als der Radius ist. Man erhält nämlich

$$z = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{9}{32}\eta_1^2-\tfrac{9}{32}\eta_1^4-\tfrac{1395}{4096}\eta_1^6-\text{ etc.},$$

folglich

$$22)\quad y = -\tfrac{1}{8}\eta_1^3-\tfrac{27}{128}\eta_1^5-\tfrac{675}{2048}\eta_1^7-\text{ etc.}$$

Für die Anwendungen, in denen η_1 nur unbedeutend ist, reicht das erste Glied $y=-\frac{1}{8}\eta_1^3$ aus. Für den Radius r ist $y=-\frac{1}{8}\frac{\eta_1^3}{r^2}$, also dem vierten Theil der Lateral-Aberration gleich (siehe (12)).

B. *Dioptrik.*

I. Brechung des homogenen Lichtes.

Brechung an ebenen Flächen.

Die Richtung der Lichtstrahlen, nachdem sie eine einmalige einfache Brechung an einer ebenen Fläche erlitten haben, und mithin die Ablenkung, d. h. der Winkel zwischen den einfallenden und gebrochenen Strahlen, läfst sich unmittelbar nach dem Cartesischen Gesetz bestimmen, sobald nur der Einfallswinkel und das Geschwindigkeitsverhältnifs des Lichtes in beiden Mitteln (d. h. ihr relatives Brechungsverhältnifs) gegeben ist. Erleidet das Licht eine neue Brechung, d. h. geht dasselbe in ein drittes Mittel über, so läfst sich nach demselben Gesetz die geänderte Richtung des Lichtes bestimmen, sobald die Lage der zweiten brechenden Ebene gegen die erste und das Brechungsverhältnifs des neuen Mittels bekannt ist.

Betrachten wir nun allgemein die Richtung des Strahls nach einer zweimaligen Brechung.

Es seien α der Einfallswinkel und α' der Brechungswinkel bei der ersten Brechung; α_1 und α_1' die entsprechenden Winkel bei der zweiten Brechung. Ferner sei D die Ablenkung oder der Winkel zwischen dem einfallenden und dem zweimal gebrochenen Strahl, i der Neigungswinkel der brechenden Ebenen (d. h. der brechende Winkel des prismatischen Raumes, in welchem das zweite Mittel enthalten ist), θ der Winkel zwischen den beiden Brechungs-Ebenen, ψ der Winkel zwischen dem Hauptschnitt (so heifse die auf beiden brechenden Flächen senkrechte Ebene) und der ersten Brechungs-Ebene, und φ der Winkel zwischen dem Hauptschnitt und der zweiten Brechungs-Ebene. Ferner denke man sich in Fig. 74 durch den Punkt C gelegt: CL parallel dem Einfallsloth an der ersten brechenden Ebene, CL' parallel dem Einfallsloth an der zweiten brechenden Ebene, CS parallel dem einfallen-

den, CS' parallel dem einmal gebrochenen, CS'' parallel dem zweimal gebrochenen Strahl. Alsdann ist $SL = \alpha$, $S'L = \alpha'$, $S'L' = \alpha_1$, $S''L' = \alpha_1'$, $SS'' = D$, $LL' = i$, $LS'L' = \theta$, $S'LL' = \psi$, $LL'S' = \varphi$, und die körperlichen Dreiecke $CLL'S'$ und $CSS'S''$ geben folgende Relationen:

$$1)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \cos\alpha' \cos i + \sin\alpha' \sin i \cos\psi \\ \sin\alpha_1 \sin\theta = \sin i \sin\psi \\ \sin\alpha_1 \sin\varphi = \sin\alpha' \sin\psi \\ \cos D = \cos(\alpha - \alpha')\cos(\alpha_1 - \alpha_1') \\ \qquad\qquad - \sin(\alpha - \alpha')\sin(\alpha_1 - \alpha_1')\cos\theta. \end{cases}$$

Bedeutet n das Brechungsverhältniſs des zweiten Mittels in Bezug auf das erste, und n_1 dasjenige des dritten Mittels in Bezug auf das zweite, so hat man überdies

$$2)\quad \sin\alpha = n \sin\alpha', \quad \sin\alpha_1 = n_1 \sin\alpha_1'.$$

Die Gleichungen (1 u. 2) dienen zur Bestimmung von 6 der in ihnen enthaltenen Gröſsen, wenn die übrigen gegeben sind.

Fällt das Licht in dem Hauptschnitt ein, so fallen die Punkte S, S', S'', L, L' in eine Ebene. Ist dabei $n > 1$ und $n_1 < 1$ (also $\alpha > \alpha'$ und $\alpha_1 < \alpha_1'$), d. h. ist das zweite Mittel stärker brechend als das erste und dritte, so wird $\theta = 0$, und überdies $\varphi = 0$ und $\psi = 180^0$, oder $\varphi = 180^0$ und $\psi = 0^0$, je nachdem der Einfallsstrahl der Durchschnittslinie der beiden brechenden Ebenen (der Kante des prismatischen Raumes) zu- oder von derselben abgewendet ist.

Nennt man α und α_1 negativ oder positiv, je nachdem die betreffenden Strahlen der Kante des Prismas zu-, oder von ihr abgewendet sind, so erhält man statt der Gleichungen (1) für beide Fälle

$$3)\quad \alpha_1 = i + \alpha' \quad \text{und} \quad D = \pm(\alpha_1' - \alpha - i),$$

wo das Vorzeichen von der gegenseitigen Lage des einfallenden und des zweimal gebrochenen Strahls abhängt.

Für den Fall, daſs das erste und dritte Mittel die Luft oder der leere Raum ist, wird $n_1 = \frac{1}{n}$, und die Gleichungen (2) gehen über in

$$4)\quad \sin\alpha = n \sin\alpha', \quad \sin\alpha_1' = n_1 \sin\alpha_1.$$

Aus den Gleichungen (3 u. 4) läfst sich noch bequem α_1 und α_1' eliminiren. Aus der letzten der Gleichungen (3) erhält man nämlich, indem man für $\sin\alpha_1'$ seinen Werth $n\sin\alpha_1$ oder $n\sin(\alpha'+i)$ setzt,

$$5)\quad \sin(D+i+\alpha) = n(\sin\alpha'\cos i+\cos\alpha'\sin i)$$
$$= n[\sin\alpha' - 2\sin\alpha'\sin^2\tfrac{1}{2}i + 2\cos\alpha'\sin\tfrac{1}{2}i\cos\tfrac{1}{2}i]$$
$$= \sin\alpha + 2n\sin\tfrac{1}{2}i\cos(\alpha'+\tfrac{1}{2}i).$$

Aus der Gleichung (5), in Verbindung mit $\sin\alpha = n\sin\alpha'$, läfst sich das Brechungsverhältnifs n bestimmen, wenn α, i und D durch Messung bestimmt sind. Da aber mit α zugleich D sich ändert und diese Aenderung am geringsten für diejenigen Einfallswinkel α ist, für welche die Abweichung D ein Minimum ist, so werden Messungsfehler den geringsten Einflufs haben, wenn man bei demjenigen Einfallswinkel die Messungen anstellt, welcher D = *Minimum* macht.

Um dieses α zu bestimmen, setzen wir $\partial D = 0$. Die Gleichungen (3. u. 4) geben für diesen Fall, da i constant ist,

$$\partial\alpha' = \partial\alpha_1, \quad \partial\alpha_1' = \partial\alpha, \quad \cos\alpha\,\partial\alpha = n\cos\alpha'\,\partial\alpha',$$
$$\cos\alpha_1'\,\partial\alpha_1' = n\cos\alpha_1\,\partial\alpha_1 = n\cos\alpha_1\,\partial\alpha'.$$

Es ist daher $\partial\alpha = \frac{n\cos\alpha'}{\cos\alpha}\partial\alpha'$, oder da $n\partial\alpha' = \frac{\cos\alpha_1'}{\cos\alpha_1}\partial\alpha_1'$ ist,

$$\frac{\partial\alpha_1'}{\partial\alpha} = \frac{\cos\alpha\cos\alpha_1}{\cos\alpha'\cos\alpha''}, \text{ mithin wegen } \partial\alpha_1' = \partial\alpha,$$
$$\cos\alpha\cos\alpha_1 = \cos\alpha'\cos\alpha_1'.$$

Quadrirt man diese Gleichung, und eliminirt α und α_1' mittelst (4), so kommt

$$(1-\sin^2\alpha_1)(1-n^2\sin^2\alpha') = (1-\sin^2\alpha')(1-n^2\sin^2\alpha_1'),$$

und hieraus $\sin^2\alpha' = \sin^2\alpha_1$, also $\alpha' = \pm\alpha_1$.

Da aus (3) $\alpha_1 = i+\alpha'$ ist, so ist hier das (—) Zeichen zu nehmen, so dafs

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}i, \qquad \alpha' = -\tfrac{1}{2}i$$

wird.

Der Einfallswinkel ist daher dem Austrittswinkel gleich, und der einfallende sowohl als der austretende Strahl ist

von der Kante des Prismas abgekehrt. Ist das zweite Mittel (die Substanz des Prismas) schwächer brechend als das umgebende Mittel, so sind jene beiden Strahlen der Kante des Prismas zugekehrt.

Da $\sin\alpha = -n\sin\frac{1}{2}i$ und $\sin\alpha_1{}' = n\sin\frac{1}{2}i$ ist, so hat man für die Ablenkung

$$D = \alpha_1{}' - \alpha - i = 2\,arc(\sin = n\sin\tfrac{1}{2}i) - i,$$

also $$\sin\tfrac{1}{2}(D+i) = n\sin\tfrac{1}{2}i,$$

mithin

$$6)\quad n = \frac{\sin\frac{1}{2}(D+i)}{\sin\frac{1}{2}i},$$

welche Gleichung das Brechungsverhältnifs aus dem brechenden Winkel i und der Ablenkung D bestimmt.

In dem Fall, dafs die beiden Brechungs-Ebenen auf einander senkrecht stehen, hat man $\theta = 90^0$, und die Gleichungen (1) gehen über in:

$$7)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \cos\alpha'\cos i + \sin\alpha'\sin i\cos\psi \\ \sin\alpha_1 = \sin i\sin\psi \\ \cos D = \cos(\alpha - \alpha')\cos(\alpha_1 - \alpha_1{}'). \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, wenn man dieselbe quadrirt,

$$\cos^2\alpha_1 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha'\cos i + \cos^2\alpha'\cos^2 i$$
$$= \sin^2\alpha'\sin^2 i(1 - \sin^2\psi),$$

und wenn man $\sin i$ mittelst der zweiten Gleichung eliminirt, $\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha' - 2\cos\alpha_1\cos\alpha'\cos i + \cos^2 i = 0$, mithin

$$8)\quad \cos\alpha'\cos\alpha_1 = \cos i.$$

Brechung an krummen Flächen.

Richtung der gebrochenen Strahlen. Vereinigungsweite derselben.

Wir betrachten wiederum unter den krummen Flächen nur die in der Praxis allein vorkommenden Umdrehungsflächen, und zwar möge zuvörderst das Licht von einem Punkt der Umdrehungsaxe ausgehend gedacht werden.

Da das Verhalten des Lichtes in allen durch die Axe *gehenden* Ebenen dasselbe bleiben mufs, so hat man nur

nöthig, die Brechung an demjenigen Bogen zu betrachten, in welcher die brechende Fläche von einer dieser Ebenen geschnitten wird.

Nimmt man diese Ebene, welche zugleich die Einfalls- und Brechungs-Ebene wird, zur Ebene der xy, die Umdrehungsaxe zur Axe der x, nennt x und y die Coordinaten des Einfallspunktes irgend eines der Strahlen, und $180-\varphi$ den Winkel, welchen der Strahl nach der Brechung mit der Axe der x macht, so hat man als Gleichung des gebrochenen Strahls:

$$9)\quad \eta - y = -tg\,\varphi(\xi - x).$$

Der Winkel φ ergiebt sich, wie folgt:

Es sei (Fig. 62) Of die Axe, AP der Durchschnitt der brechenden Fläche, S der Ausgangspunkt der Strahlen, welcher zugleich der Ursprung der Coordinaten sei, SP ein einfallender Strahl, Pf der in P gebrochene, und PC die Normale der Fläche im Einfallspunkte P.

Alsdann ist f der Brennpunkt desjenigen Ringes der brechenden Fläche, dessen Radius PM ist, und man hat $SM = x$, $PM = y$, $PfS = \varphi$, $SPC = 180^0 - \alpha$ und $fPC = \alpha'$, wo α den Einfallswinkel, α' den Brechungswinkel bezeichnet. Ferner sei der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Axe bildet, $PSM = \varphi_1$, $PCM = v$, $SP = r = \sqrt{x^2+y^2}$, $dy = p dx$, und n das Brechungsverhältnifs. Nun findet sich:

$$sin\,\varphi_1 = \frac{y}{r},\quad cos\,\varphi_1 = \frac{x}{r},$$

$$sin\,v = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\quad cos\,v = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

also $sin\,DPS = sin\,\alpha = sin(\varphi_1 + v) = \dfrac{x+py}{r\sqrt{1+p^2}}$,

$$sin\,\alpha' = \frac{1}{n} sin\,\alpha = \frac{x+py}{nr\sqrt{1+p^2}} \text{ und } cos\,\alpha' = \frac{v}{nr\sqrt{1+p^2}},$$

wo

$$10)\quad v = \sqrt{n^2 r^2 (1+p^2) - (x+py)^2}$$

gesetzt ist. Ebenso findet man

$$\sin\varphi = \sin(v-\alpha') = \frac{\nu - p(x+py)}{nr(1+p^2)},$$

$$\cos\varphi = \frac{p\nu + py + x}{nr(1+p^2)}$$

und 11) $$tg\varphi = \frac{\nu - p(x+py)}{p\nu + py + x}.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich die Entfernung der conjugirten Brennpunkte Sf, da solche gleich $x + y\cot\varphi$ ist, nämlich

12) $$Sf = (x+py)\frac{px - y - \nu}{p(x+py) - \nu}.$$

Für den Fall, dafs die Strahlen der Axe parallel auffallen, darf man nur in den gefundenen Ausdrücken x mit $x+e$ vertauschen, und $e = \infty$ setzen. Behält man alsdann nur die mit e^2 behafteten Glieder als die bedeutendsten bei, so verwandeln sich die Gleichungen (10 u. 11) in:

13) $$\begin{cases} \nu = e\sqrt{n^2(1+p^2)-1} \\ tg\varphi = \dfrac{\sqrt{n^2(1+p^2)-1}-p}{p\sqrt{n^2(1+p^2)-1}+1} \end{cases}$$

und für die Entfernung des Punktes f vom Anfange der Coordinaten ergiebt sich

$$Of = x + y \cdot \frac{1+\nu}{\nu - p}.$$

Ist die brechende Fläche eine Kugelfläche, so hat man für die Entfernung des Brennpunktes f vom Scheitel A, wenn der Abstand SC des leuchtenden Punktes vom Krümmungsmittelpunkt durch a bezeichnet wird, $fA = Sf - a + r$; und insofern für diesen Fall

$$(a-x)^2 + y^2 = r^2, \qquad p = \frac{a-x}{y},$$

$$1+p^2 = \frac{r^2}{y^2}, \qquad x + py = a$$

wird, erhält man aus (11 u. 12)

14) $$\begin{cases} \nu y = \sqrt{n^2r^2x^2 + (n^2r^2 - a^2)y^2} \\ Sf = a\left[1 - \dfrac{r^2}{a(a-x) - \nu y}\right] \\ fA = \varphi = r\left[1 - \dfrac{ar}{a(a-x) - \nu y}\right]. \end{cases}$$

Wenn die brechende Fläche ein nicht sehr bedeutendes Kugelsegment ist, d. h. wenn das zu den äufsersten Punkten gehörige y nur ein kleiner Theil von r ist, so dafs man ohne erheblichen Fehler die 4ten und höheren Potenzen von y vernachlässigen kann, so wird

$$a-x=\sqrt{r^2-y^2}=r-\tfrac{1}{2}\frac{y^2}{r}, \text{ also } x=a-r+\tfrac{1}{2}\frac{y^2}{r} \text{ und}$$

$$vy=nr(a-r)+\frac{a(n^2r-a)}{2nr(a-r)}y^2,$$

folglich ergiebt sich als Näherungswerth für die Brennweite

$$15)\quad \varphi=\frac{nr(a-r)}{n(a-r)-a}-\frac{n-1}{2nr}\cdot\frac{a^2(a+nr)}{(a-r)[a+n(r-a)]^2}y^2,$$

und, wenn man die reciproke Brennweite durch (f) bezeichnet,

$$16)\quad (f)=\frac{1}{\varphi}=\frac{n(a-r)-a}{nr(a-r)}+\frac{a^2(n-1)(a+nr)}{2n^3r^3(a-r)^3}y^2.$$

Die kaustische Fläche.

Die Brennlinie der gebrochenen Strahlen findet sich aus (19) genau ebenso wie die Brennlinie der reflektirten Strahlen aus der Gleichung dieser letzten Strahlen.

Setzt man wiederum $tg\,\varphi=A$, und bezeichnet die Coordinaten der Brennlinie durch x_1, y_1, so erhält man auf jenem Wege

$$17)\quad x_1=x+\frac{A+p}{\partial A}\partial x,\quad y_1=y-A\frac{A+p}{\partial p}\partial x,$$

worin man für A den Werth aus (11) zu nehmen hat.

Für den Fall, dafs die einfallenden Strahlen parallel sind, ergiebt sich aus (13), wenn man $\frac{\partial p}{\partial x}$ durch q bezeichnet,

$$x_1=x-\frac{n^2q\,tg\,\varphi}{n^2(1+p^2)-1},\quad y_1=y+\frac{n^2q}{n^2(1+p^2)-1}.$$

Die Gleichung (12) ist zugleich die Gleichung der Erzeugungscurve derjenigen Fläche, für welche sich die *Brennlinie auf einen Punkt* reducirt (d. h. für welche alle

Strahlen durch den Punkt f gehen), wenn man Sf einer Constanten c gleich setzt. Man erhält aus derselben, $x+py=\alpha$ setzend,

$$\alpha[p(x-c)-y] = \nu(\alpha-c),$$

und wenn man dieselbe quadrirt und für ν den Werth aus (10) setzt:

$$\alpha^2\{[p(x-c)-y]^2+(\alpha-c)^2\}$$
$$= n^2(\alpha-c)^2(x^2+y^2)(1+p^2),$$

und durch $(1+p^2)$ dividirend,

$$\alpha^2[(x-c)^2+y^2] = n^2(\alpha-c)^2(x^2+y^2).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂x^2, und zieht auf jeder Seite die Wurzel aus, so ergiebt sich

$$\frac{x\partial x+y\partial y}{\sqrt{x^2+y^2}} = n\frac{(x-c)\partial x+y\partial y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}.$$

Das Integral dieser Gleichung,

$$18)\quad \sqrt{x^2+y^2} = n\sqrt{(x-c)^2+y^2}+C,$$

welches eine Curve der 4ten Ordnung vorstellt, ist die einfachste Form der Gleichung jener Erzeugungscurve.

Man erhält das sehr einfache geometrische Gesetz dieser Curve, wenn man aus S (Fig. 62) mit der willkührlichen Constante C als Radius einen Kreis bd beschreibt. Es ist nämlich alsdann, da

$$dP=\sqrt{x^2+y^2}-C \quad \text{und} \quad Pf=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ist, zufolge der Gleichung (18)

$$19)\quad dP:Pf = n:1.$$

Für $C=0$ wird die Curve ein Kreis:

$$x^2+y^2 = n^2[(x-c)^2+y^2],$$

für welchen, wenn man seinen Radius mit R, und die Entfernung seines Mittelpunktes von S mit a bezeichnet,

$$R = \frac{nc}{n^2-1} \quad \text{und} \quad a = nR \quad \text{ist.}$$

Ist der Kreis gegeben, so findet man den erforderlichen Ort S des leuchtenden Punktes aus $a=nR$, und den Ort f des Brennpunktes aus (19).

Für den Fall, dafs die Strahlen parallel auffallen, verlege man den Ursprung der Coordinaten nach f. Alsdann

geht x in $c-x$ über, wo c unendlich grofs ist, und aus (18) wird:

$$\sqrt{c^2-2cx+x^2+y^2} = n\sqrt{x^2+y^2}+C,$$

oder wenn man die linke Seite nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt und $\frac{1}{c}=0$ setzt,

$$(c-C)-x = n\sqrt{x^2+y^2}.$$

Da $c-C$ einen endlichen Werth haben kann, insofern man dem C nur einen unendlichen Werth beizulegen nöthig hat, so stellt diese Gleichung einen Kegelschnitt vor.

Macht man $Of=c-C$, also $c-C-x=OM$, so heifst jene Gleichung, da $\sqrt{x^2+y^2}=Pf$ ist, $OM=nPf$. Setzt man überdies f als den geometrischen Brennpunkt des Kegelschnitts voraus, so gehört diese Gleichung einer Ellipse an, wenn $OM>Pf$, also $n>1$ ist, d. h. wenn das Licht in ein stärker brechendes Mittel übergeht; sie gehört einer Hyperbel an, wenn $OM<Pf$ ist, das zweite Mittel also das Licht schwächer bricht; sie gehört einer Parabel an, wenn $OM=Pf$, also $n=1$ ist, d. h. wenn beide Mittel dasselbe Brechungsverhältnifs haben. In dem letzten Fall bleiben die Strahlen der Axe parallel.

Brennweite der Centralstrahlen sphärischer Flächen.

Den Ausdruck für die reciproke Brennweite der Centralstrahlen erhält man aus (16), wenn man darin $y=0$ setzt, nämlich

$$f=\frac{n(a-r)-a}{nr(a-r)}.$$

Bezeichnet man den reciproken Werth des Radius mit R, und die reciproken Werthe der Entfernung des leuchtenden Punktes vom Scheitel (SA) und des Brechungsverhältnisses beziehlich mit e und μ, so dafs

$$r=\frac{1}{R},\quad r-a=\frac{1}{e},\quad n=\frac{1}{\mu}$$

wird, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$20)\ f=(1-\mu)R+\mu e.$$

Diese Formel gilt ganz allgemein, die Krümmung mag convex oder concav sein, und die einfallenden Strahlen mögen von einem Punkt aus divergiren, oder gegen einen Punkt hin convergiren, wenn man e, R, f positiv oder negativ nimmt, je nachdem in der Figur 62 S, C, f rechts oder links von A liegen. Es sind demnach die Radien positiv zu denken bei convexen Flächen; die Brennweiten, wenn der Brennpunkt hinter der Fläche liegt; und die Distanz desjenigen Punktes, in welchem sich die Einfallsstrahlen schneiden, vom Scheitel der Fläche, wenn die letzteren convergiren. Negativ dagegen sind alsdann diese Gröfsen in dem entgegengesetzten Falle.

Die reciproke Brennweite F für parallel auffallende Strahlen (d. h. die reciproke Focallänge der brechenden Fläche) wird, da e in diesem Falle Null ist,

$$21)\quad F = (1-\mu)R,$$

und mithin

$$22)\quad f = F + \mu e.$$

Die Gleichung (21) läfst sich schreiben: $F:R = n-1:n$, d. h. $AC:Af = n-1:n$ und mithin auch

$$AC:Cf = n-1:1 \quad \text{oder} \quad Af:Cf = n:1.$$

Die Gleichungen (21 u. 22) führen auf die Brennweite eines Systems auf einander folgender sphärischer Flächen, vorausgesetzt, dafs deren Centra sämmtlich in einer Linie liegen.

Es sei die Entfernung der Scheitel je zwei auf einander folgender Flächen nach der Reihe d', d'', d'''.....; ferner seien $n^{(\alpha)}$, $\mu^{(\alpha)}$, $f^{(\alpha)}$, $F^{(\alpha)}$, $R^{(\alpha)}$ die Werthe von n, μ, f, F, R für die αte Fläche (und zwar so, dafs $n^{(\alpha)}$ das relative Brechungsverhältnifs des αten Mittels in Bezug auf das $(\alpha-1)$te ist), und $e^{(\alpha)}$ bezeichne die Entfernung des Scheitels der αten Fläche von dem Brennpunkt der $(\alpha-1)$ten Fläche. Alsdann hat man,

$$23)\quad F^{(\alpha)} = (1-\mu^{(\alpha)})R^{(\alpha)}, \quad f^{(\alpha)} = F^{(\alpha)} + \mu^{(\alpha)} e^{(\alpha)}$$

und da $\frac{1}{e^{(\alpha)}} = \frac{1}{f^{(\alpha-1)}} - d^{(\alpha)}$ ist,

$$24)\quad e^{(a)} = \frac{f^{(a-1)}}{1 - f^{(a-1)} d^{(a)}}.$$

Liegen sämmtliche Flächen unendlich nahe, so dafs sie sich berühren, und mithin $d'' = d''' = d'''' = \ldots = 0$ ist, so wird $e^{(a)} = f^{(a-1)}$, mithin: $f' = F' + \mu' e'$,
$f'' = F'' + \mu'' F' + \mu' \mu'' e'$, $f''' = F''' + \mu''' F'' + \mu''' \mu'' F' + \mu''' \mu'' \mu' e'$
und allgemein

$$25)\quad f^{(a)} = F^{(a)} + \mu^{(a)} F^{(a-1)} + \mu^{(a)} \mu^{(a-1)} F^{(a-2)} + \ldots\ldots + \mu' \mu'' \mu''' \ldots\ldots \mu^{(a)} e'.$$

Dieses ist die reciproke Brennweite des ganzen Systems, wenn dasselbe aus a Flächen besteht.

Ist das erste Mittel der leere Raum, so sind n', $n'n''$, $n'n''n'''$, ... die absoluten Brechungsverhältnisse des 1ten, 2ten, 3ten Mittels, und man erhält für (25), wenn man dieselben durch n_1', n_1'', n_1''' .... bezeichnet,

$$26)\quad n_1^{(a)} f^{(a)} = n_1^{(a)} F^{(a)} + n_1^{(a-1)} F^{(a-1)} \ldots + n_1' F' + e' = S[n_1^{(c)} F^{(c)}] + e',$$

und die reciproke Focallänge des Systems ist, wenn man dieselbe mit F bezeichnet, da alsdann $e' = 0$ ist, gegeben durch die Gleichung

$$27)\quad n_1^{(a)} F = S[n_1^{(c)} F^{(c)}],$$

und mithin $\qquad n_1^{(a)} f^{(a)} = n_1^{(a)} F + e'$,

während für den Fall, dafs das letzte Mittel wiederum der leere Raum ist, $n_1^{(a)} = 1$, also $f^{(a)} = F + e'$ wird.

Denkt man sich die 1te und 2te, die 3te und 4te, etc. Fläche als Grenzen unendlich dünner sich berührender Linsen, so wird aus dem Flächensystem ein Linsensystem.

Für eine einzige, im leeren Raum befindliche Linse wird $n_1'' = 1$, $\mu' = \frac{1}{n}$, $\mu'' = n$, also

$$28)\quad F = n' F' + F'',$$

und wegen $F' = (1 - \mu') R'$, $F'' = (1 - \mu'') R''$,

$$29)\quad F = (n - 1)(R' - R'') = F_1,$$

wo F_1 die reciproke Focallänge der unendlich dünnen Linse bedeutet.

Für ein aus mehreren (unendlich dünnen sich berührenden) *durch leere Räume* von einander getrennten Lin-

sen bestehendes System erhält man, da $n_1^{(2\mathfrak{x})} = 1$, $n_1^{(2\mathfrak{x}-1)} = n^{(2\mathfrak{x}-1)}$ wird, aus (27)

$$F = S[F^{(2\mathfrak{x})}] + S[n^{(2\mathfrak{x}+1)} F^{(2\mathfrak{x}-1)}]$$
$$= S[F^{(2\mathfrak{x})} + n^{(2\mathfrak{x}-1)} F^{(2\mathfrak{x}-1)}].$$

Die Glieder dieser Summe haben genau die Form (28), und sind folglich auch von der Form (29). Als reciproke Focallänge des ganzen Systems ergiebt sich daher, wenn man dieselbe durch (F), und die der einzelnen Linsen durch F_1, F_2, F_3 etc. bezeichnet,

$$(F) = F_1 + F_2 + F_3 + \text{etc.},$$

während die reciproke Brennweite des Systems $f = (F) + e'$ ist.

Wenn sich die brechenden Flächen nicht berühren, aber einander so nahe sind, daſs man die Quadrate ihrer Entfernungen vernachlässigen kann, so wird aus (24):

$$e^{(a)} = f^{(a-1)} + f^{2(a-1)} d^{(a)},$$

mithin geht (23) über in:

$$f^{(a)} = F^{(a)} + \mu^{(a)} (f^{(a-1)} + f^{2(a-1)} d^{(a)}),$$

oder, indem man mittelst dieser Gleichung selbst $f^{(a-1)}$, dann $f^{(a-2)}$, dann $f^{(a-3)}$ etc. eliminirt,

30) $$n_1^{(a)} f^{(a)} = S[n_1^{(c)} F^{(c)}] + S[n_1^{(c-1)} f^{2(c-1)} d^{(c)}] + e',$$

wo für c in den Summengliedern alle Werthe von 1 bis a zu setzen sind.

Eliminirt man noch die Faktoren $f^{2(c-1)}$ aus den Gliedern der zweiten Summe mittelst (23), so findet man als erste Glieder dieser zweiten Summe:

$$n_1'(F' + \mu' e)^2 d'' + n_1''(F'' + \mu'' F' + \mu' \mu'' e')^2 d''' + \text{etc.}$$

Für eine einzige Linse, welche sich im leeren Raum befindet, und deren Dicke d ist, wird demnach:

31) $$\begin{cases} f = (n-1)(R' - R'') + e' + \frac{1}{n}[n-1)R' + e']^2 d, \\ F = (n-1)(R' - R'') + \dfrac{(n-1)^2}{n} R'^2 d. \end{cases}$$

Zur strengen Bestimmung der Brennweite einer Linse muſs man die unverkürzten Formeln (23 u. 24) gebrauchen. Ist n das Brechungsverhältniſs der Linsensubstanz in Bezug auf das umgebende Mittel, so hat man $\mu' = \frac{1}{n}$ und

$\mu'' = n$ zu nehmen, so dafs man erhält, wenn man $(n-1)(R'-R'') = (F)$ und $(n-1)R' = h$ setzt,

$$32) \begin{cases} f = \dfrac{n(F)+e'+(n-1)R''d(h+e')}{n-d(h+e')} \\ \qquad = (F)+\dfrac{hd(h+e')+e'}{n-d(h+e')} \\ F = \dfrac{n(F)+(n-1)R''hd}{n-hd} = (F)+\dfrac{h^2d}{n-hd}. \end{cases}$$

Je nachdem die vordere oder hintere Seite der Linse eben ist, oder je nachdem die Linse gleichseitig ist, hat man in dieser Gleichung nur beziehlich $R' = 0$ oder $R'' = 0$ und $R' = -R''$ zu setzen.

Ist die Linse eine Kugel, deren Radius $\frac{1}{R}$ ist, so wird $R' = -R'' = R$ und $d = \frac{2}{R}$, also

$$f = \frac{2(n-1)R+(2-n)e'}{(2-n)R-2e'}R, \qquad F = \frac{2(n-1)}{2-n}R.$$

Der Brennpunkt der parallelen Strahlen fällt daher in die hintere Fläche, d. h. es wird $F = \infty$, wenn $n = 2$ ist.

Ist die Linse eine Halbkugel, deren plane Seite hinten liegt, so wird $R'' = 0$, $R' = R$ und $d = \frac{1}{R}$, also

$$F = n(n-1)R; \quad f = \frac{(n-1)R+e'}{R-e'}nR = F+\frac{n^2e'R}{R-e'}.$$

Liegt die plane Seite vorn, so wird $R' = 0$, $R'' = -R$, mithin

$$F = (n-1)R; \quad f = \frac{n(n-1)R+e'}{nR-e'} = F+\frac{ne'R}{nR-e'}.$$

Brennweite der Randstrahlen sphärischer Flächen. Sphärische Abweichung.

Brechung durch eine einzige Fläche.

Setzen wir die brechenden Flächen nur von solcher Ausdehnung voraus, dafs man die 4ten und höheren Potenzen *von y vernachlässigen* darf, und bezeichnen die re-

ciproke Brennweite durch $(f) = f + \Delta f$, wo f die reciproke Brennweite der Centralstrahlen bedeutet, so ist der Ueberschufs der ersteren über die letzte der von y abhängige Theil in (16), also

$$\Delta f = \frac{a^2(n-1)(a+nr)}{2n^3 r^3 (a-r)^3} y^2,$$

oder wenn man wiederum die umgekehrten Werthe von n, r und $r-a$, nämlich μ, R und e einführt.

33) $\Delta f = \frac{1}{2}\mu(1-\mu)(R-e)^2[\mu R-(1+\mu)e]y^2 = Ey^2$.

Der Ueberschufs der Brennweite über die Brennweite der Centralstrahlen, d. h. die sphärische Längenabweichung ist alsdann, wenn man dieselbe mit ε bezeichnet;

$$34) \quad \varepsilon = \Delta\frac{1}{f} = -\frac{\Delta f}{f^2}.$$

Da sich die Seitenabweichung zur halben Oeffnung (y) verhält, wie die Längenabweichung zur Brennweite, so hat man, wenn dieselbe durch $\varkappa$ bezeichnet wird,

$$35) \quad \varkappa = \varepsilon y f = -\frac{\Delta f}{f} y.$$

Man sieht aus (34), dafs $\Delta f = 0$ wird, also keine Abweichung stattfindet 1) wenn $R = e$ wird, d. h. wenn die Fläche convex ist, und die einfallenden Strahlen gegen deren Centrum hin convergiren, oder wenn die Fläche concav ist, und die Strahlen vom Centrum ausgehen. Da die Einfallsstrahlen alsdann mit dem Einfallsloth zusammenfallen, so wird ihre Richtung durch die Brechung nicht geändert. 2) wenn $R = (n+1)e$ wird, welches, wie oben gezeigt wurde, die Bedingung ist, unter welcher die Brennfläche sich auf einen Punkt reducirt. Da das Letztere voraussetzt, dafs R und e gleiches Zeichen haben, so müssen in diesem Fall die Einfallsstrahlen convergiren bei convexen Flächen und divergiren bei hohlen Flächen.

Für parallele Einfallsstrahlen hat man:

$$36) \quad \begin{cases} \Delta f = \frac{1}{2}\mu^2(1-\mu)R^3 y^2, \quad \varepsilon = -\dfrac{\mu^2}{2(1-\mu)} R y^2, \\ \varkappa = -\frac{1}{2}\mu^2 R^2 y^3. \end{cases}$$

Brechung durch mehrere sich berührende Flächen.

Ist die reciproke Brennweite der Randstrahlen nach der zweiten Brechung $f''+\delta f''$, wenn die zweite Fläche nicht aberrirend wirkte, dagegen $f''+\delta' f''$, wenn die erste Fläche nicht aberrirend wirkte, so darf man wegen der Kleinheit von $\delta f''$ und $\delta' f''$ dieselbe für den Fall, dafs beide Flächen aberrirend wirken, gleich $f''+\delta f''+\delta' f''= f''+\Delta f''$ nehmen.

Wendet man wiederum die frühere Bezeichnung an, und bedeutet E', E'', E''' etc. dasjenige, was aus dem Werth von E in (33) wird, wenn man darin μ, R, e mit 1, 2, 3... Accenten versieht, so erhält man wegen der Berührung der brechenden Flächen

$e''=f'$, $e'''=f''$ etc., mithin $f''=(1-\mu'')R''+\mu''f'$,

also $\delta f''=\mu''\Delta f'=\mu''E'y^2$,

während $\delta' f''=E''y^2$ ist,

so dafs $\Delta f''=(E''+\mu''E')y^2$ wird, worin für e'', f' zu setzen ist.

Ebenso erhält man

$$\Delta f'''=\mu'''\Delta f''+E'''y^2=(E'''+\mu'''E''+\mu''\mu'''E')y^2 \text{ etc.},$$

und allgemein, wenn man wiederum $n_1{}^{(a)}=\mu'\mu''\mu'''\ldots\mu^{(a)}$ setzt, und Δf die Total-Abweichung nennt,

$$37)\quad n_1\Delta f=(n_1{}'E'+n_1{}''E''+n_1{}'''E'''+\ldots)y^2,$$

worin

$$e''=f'=(1-\mu')R'+\mu'e'$$
$$e'''=f''=(1-\mu'')R''+\mu''(1-\mu')R'+\mu'\mu''e'$$
$$e''''=f'''=(1-\mu''')R'''+\mu'''(1-\mu'')R''+\mu'''\mu''(1-\mu')R'+\mu'''\mu''\mu'e' \text{ etc.},$$

während überdies $\varepsilon=-\dfrac{\Delta f}{f^2}$ und $x=-\dfrac{\Delta f}{f}y$ ist.

Brechung durch eine unendlich dünne Linse.

Ist das umgebende Mittel der leere Raum, so ist für diesen Fall

$$\mu''=n_1{}'=\frac{1}{\mu'},\quad n_1{}''=n_1=1,\quad \Delta f=(n_1{}'E'+E'')y^2,$$

ferner, wenn wir die Accente bei μ, n und e unterdrücken,

$$n_1' E' = \tfrac{1}{2}(1-\mu)(R'-e)^2[\mu(R'-e)-e]$$

$$E'' = -\tfrac{1}{2}\frac{1-\mu}{\mu^3}[\mu(R'-e)-R'+R'']^2 \times$$
$$[\mu^2(R'-e)-\mu e-R'+R''],$$

mithin

$$\Delta f = \frac{n-1}{2n}(R'-R'')\{[(2-n)R'+nR''-2e]\times$$
$$[R'-(1+n)e]+n[(n-1)R'-nR''+e]^2\}y^2,$$

oder

$$38)\quad \Delta f = \frac{n-1}{2n}(R'-R'')(\beta-\gamma e+\delta e^2)y^2,$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\beta = (2-2n^2+n^3)R'^2+(n+2n^2-2n^3)R'R''+n^3R''^2$$
$$\gamma = (4+3n-3n^2)R'+(n+3n^2)R''$$
$$\delta = 2+3n.$$

Da nach (29) $(n-1)(R'-R'')$ die reciproke Focallänge F_1 der Linse ist, so läfst sich die Gleichung (38) schreiben:

$$39)\quad \Delta f = \frac{F_1}{2n}(\beta-\gamma e+\delta e^2)y^2.$$

Die Bedingung des Aplanatismus der Linse ist daher

$$40)\quad \beta-\gamma e'+\delta e'^2 = 0 \text{ oder } e' = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-4\beta\delta}}{2\delta}.$$

Die Erfüllung derselben ist folglich nur dann möglich, wenn $\gamma^2 > 4\beta\delta$ ist, oder da

$$\gamma^2-4\beta\delta = n^2[(R'+R'')^2-(2n+3n^2)(R'-R'')^2]$$

sich findet, wenn $\left(\frac{R'+R''}{R'-R''}\right)^2 > 2n+3n^2$ ist.

Da n stets >1 ist, so ist die Vernichtung der sphärischen Abweichung durch eine schickliche Wahl der Gröfse e, oder was dasselbe ist, der Entfernung des leuchtenden Punktes, nur dann möglich, wenn $R'+R'' > R'-R''$ ist, also wenn R' und R'' dasselbe Zeichen haben, d. h. bei concav-convexen Linsen.

Für parallel auffallende Strahlen (für $e'=0$) wird

$$41)\quad \Delta f = \frac{F_1}{2n}\beta y^2.$$

Die Bedingung des Aplanatismus für diesen Fall würde $\beta = 0$ sein. Löst man die Gleichung $\beta = 0$ nach R' auf, so findet man, dafs R' nur reel wird, wenn

$$(n + 2n^2 - 2n^3)^2 > 4n^3 (2 - 2n^2 + n^3)$$

ist. Dies führt aber auf $n < \frac{1}{4}$, und da kein bekanntes Mittel ein so geringes Brechungsverhältnifs besitzt, so kann eine sphärische Linse durch keine Krümmung für Parallel-Strahlen aplanatisch werden.

Da demnach β stets positiv ist, und zu einer Sammellinse ein positives F_1, zu einer Zerstreuungslinse ein negatives F_1 gehört, so haben F_1 und Δf durchgängig gleiche Zeichen. Da ferner F_1 der umgekehrte Werth der Brennweite der Centralstrahlen, $F_1 + \Delta f$ der umgekehrte Werth der Brennweite der Randstrahlen ist, so ist, wegen $F_1 + \Delta f > F_1$, für Parallelstrahlen die Brennweite der Randstrahlen kürzer als die der Centralstrahlen.

Was die gegenseitige Lage der Brennpunkte der Rand- und Centralstrahlen für nicht parallel einfallende Strahlen betrifft, so bemerke man, dafs, wenn der Ausdruck für die Längenabweichung positiv ist, die positiven Brennweiten der Randstrahlen gröfser, die negativen kürzer als die der Centralstrahlen sind, und dafs das Umgekehrte stattfindet, wenn die Längenabweichung negativ wird.

Es ist aber die Längenabweichung

$$\varepsilon = -\frac{\Delta f}{f^2},$$

und $\beta - \gamma e' + \delta e'^2$ stets positiv, aufser für die des Aplanatismus fähigen Linsen, und daher hat Δf für alle andere Linsen mit F_1 gleiches Zeichen, so dafs ε positiv ist für die Zerstreuungslinsen, negativ für die Sammellinsen. Es gilt demnach folgende Regel:

In den biconvexen, biconcaven, planconvexen und planconcaven, so wie in convex-concaven Linsen, für welche

$$\frac{R' + R''}{R' - R''} < \sqrt{2n + 3n^2}$$

ist, *liegt der Brennpunkt* der Randstrahlen un-

ter jeden Umständen der Linse näher, als der Brennpunkt der Centralstrahlen.

Für den Fall der concav-convexen Linsen, für welche

$$\frac{R'+R''}{R'-R''} > 2n + 3n^2$$

ist, läfst sich die Lage der Brennpunkte aus dem Zeichen von $\gamma - \gamma e' + \delta e'^2$ für jeden besonderen Fall leicht bestimmen.

Ist z. B. γ positiv (welches z. B. eintritt, wenn die convexe Seite nach vorn gewendet ist, also R' und R'' positiv sind, und $4+3n > 3n^2$ ist), so ist für negative Werthe von e', also für divergirend auffallende Strahlen ε negativ, weil F_1 positiv ist; die Brennweite der Randstrahlen ist daher kürzer als die der Centralstrahlen, wenn die gebrochenen Strahlen sich hinter der Linse vereinigen, d. h. wenn der Lichtpunkt aufserhalb der vorderen Brennweite liegt, dagegen länger, wenn der Lichtpunkt innerhalb derselben liegt.

Dafs für parallele Einfallsstrahlen kein Aplanatismus möglich ist, wurde schon bemerkt. Die Bedingung der kleinsten Abweichung findet man durch Differenziren der aus (34 u. 41) gezogenen Gleichung

$$\varepsilon = -\frac{\Delta f}{F_1^2} = -\frac{y^2}{2n}\frac{\beta}{F_1}.$$

Es ergiebt sich nämlich

$$F_1^2.\partial\varepsilon = -\frac{y^2}{2n}(F_1\partial\beta - \beta\partial F_1).$$

Ist die Focallänge gegeben, so ist $\partial F_1 = 0$, mithin $\partial R' = \partial R''$, und demzufolge führt die Bedingung $\partial\beta = 0$ auf

$$(4+n-2n^2)R' + (n+2n^2)R'',$$

d. h. auf

$$\frac{R''}{R'} = \frac{2n^2-n-4}{2n^2+n}.$$

Für eine Glaslinse, für welche $n = 1{,}5$, liefert diese Gleichung $R'' : R' = 1 : -6$.

Der Werth der Abweichung solcher Linse ist demnach $\varepsilon = -\frac{15}{14}y^2 F_1$.

Brechung durch ein System unendlich dünner Linsen.

Ist das umgebende Mittel der leere Raum, so hat man $n_1 = n_1'' = n_1'''' = \ldots = 1$, und wenn n', n'', n'''.... die Brechungsverhältnisse der 1ten, 2ten, 3ten.... Linse sind, $n_1' = n'$, $n_1''' = n''$, $n_1''''' = n'''$.... Die Gleichung (37) giebt alsdann

$$\Delta f = (n'E' + E'')y^2 + (n''E''' + E'''')y^2 + \ldots.$$

Bezeichnet man durch β', γ', δ' in Bezug auf die erste, durch β'', γ'', δ'' in Bezug auf die zweite Linse etc., was β, γ, δ vorher für die einzige Linse bedeutete, so erhält man

$$42)\quad \Delta f = \frac{y^2}{2}\left[\frac{F_1}{n'}(\beta' - \gamma' e' + \delta' e'^2) + \frac{F_3}{n''}(\beta'' - \gamma'' e'' + \delta'' e''^2) + \ldots\right],$$

während nach Seite 168

$$f' = (1-\mu')R' + \mu' e', \qquad f'' = F_1 + e' = e''$$
$$f''' = (1-\mu''')R''' + \mu''' e'', \qquad f'''' = F_1 + F_1 + e' \text{ etc. ist.}$$

Für parallele Einfallsstrahlen wird daher

$$43)\quad \Delta f = \frac{y^2}{2}\left[\frac{F_1}{n'}\beta' + \frac{F_3}{n''}(\beta'' - \gamma'' F_1 + \delta'' F_3^2) + \frac{F_5}{n'''}(\beta''' - \gamma'''(F_1 + F_3) + \delta'''(F_1 + F_3)^2) + \text{ etc.}\right].$$

Ist die Substanz der Linsen und deren Focallänge gegeben, so kann der Bedingungsgleichung des Aplanatismus $\Delta f = 0$ auf unendlich viel verschiedene Arten für jede Entfernung des Lichtpunktes genügt werden.

Für 2 Linsen und für parallele Einfallsstrahlen wird diese Bedingungsgleichung

$$44)\quad \Delta f = \frac{F_1}{n'}\beta' + \frac{F_3}{n''}\beta'' - \frac{F_1 F_3}{n''}\gamma'' + \frac{F_1^2 F_3}{n''}\delta = 0.$$

Da β' und β'' nach R', R'', R''', R'''' vom 2ten Grade und γ'' vom 1ten Grade ist, so wird diese Gleichung vom zweiten Grade. Aus dieser Gleichung lassen sich noch 2 der 4 Gröfsen R', R'', R''', R'''' mittelst der Gleichungen $F_1 = (n'-1)(R'-R'')$ und $F_3 = (n''-1)(R'''-R'''')$ eliminiren.

Ist F_1 und F_2 nicht gegeben, so wird die Gleichung (44) vom dritten Grade, da diese Gröſsen nach R', R'', R''', R'''' vom ersten Grade sind. Sind daher 3 Krümmungshalbmesser gegeben, so giebt es allemal einen reelen Werth für den vierten, welcher das Linsenpaar aplanatisch macht. Ebenso läſst sich jedesmal die Focallänge jeder der Linsen bestimmen, wenn zwei Krümmungen und die Gesammt-Focallänge $F_1 + F_2$ gegeben ist.

Halbmesser der sphärischen Abweichung.

Ist (Fig. 64) AB eine Linse, p der Brennpunkt der am Rande A gebrochenen Strahlen, p_1 der Brennpunkt der in einem Punkte B gebrochenen Strahlen, welcher von der Axe um $CB = x$ entfernt liegt; ist ferner s der Durchschnittspunkt der Strahlen Ap und Bp_1, und so senkrecht auf der Axe Cp, und bezeichnet man die halbe Oeffnung der Linse CA durch y, os durch r, und die reciproke Brennweite der Centralstrahlen durch f, so hat man

$$os = r = op\, tang\, ops = op_1\, tang\, op_1 s.$$

Es ist aber $tang\, ops = \frac{y}{Cp}$ und $tang\, op_1 s = \frac{x}{Cp_1}$; oder wenn y nicht bedeutend ist, und man daher die Längen-Abweichung gegen die Brennweite vernachlässigen kann, $tang\, ops = yf$ und $tang\, op_1 s = xf$. Es wird daher

$$r = op \,.\, yf = op_1 \,.\, xf,$$

mithin $\quad op : op_1 = x : y$ und $op : pp_1 = x : y + x$.

Da nun, wenn P der Brennpunkt der Centralstrahlen, also $pp_1 = Pp - Pp_1$, d. h. der Differenz der sphärischen Längenabweichungen der Strahlen Ap und Bp_1 gleich ist, und da nach (42) Δf, und folglich auch die Längenabweichung proportional y^2, d. h. proportional dem Quadrat der Entfernung des Brechungsortes von der Axe ist, so hat man, wenn $Pp = Ay^2$ ist, $Pp_1 = Ax^2$, also $pp_1 = A(y^2 - x^2)$. Es ergiebt sich demnach

$$op = \frac{A(y^2 - x)^2 x}{y + x} = A(y - x)x,$$

folg-

folglich $r = op.yf = A(y-z)yzf.$

Setzt man das Differenzial dieses Ausdrucks nach z gleich Null, um den Werth von z zu erhalten, für welchen r ein Gröfstes wird, d. h. für welchen r dem Halbmesser des Abweichungskreises gleich wird, so erhält man $z = \frac{1}{2}y$, also

$$r = \tfrac{1}{4}Afy^3,$$

oder da $A = -\frac{\Delta f}{f^2y^2}$ ist,

$$r = -\tfrac{1}{4}\frac{\Delta f}{f}y.$$

Es ist also der Halbmesser des Abweichungskreises dem 4ten Theil der Seitenabweichung gleich.

Vollständiger Werth der Brennweite einer Linse.

Um einen genauen Werth der Brennweite einer Linse von gröfserer Oeffnung zu erhalten, wie er zur Berechnung der stärkeren Fernröhre, und besonders der Mikroskope nöthig wird, mufs man von den strengen Formeln (14) ausgehen.

Bequemer für die Rechnung ist es jedoch, in dieselben für x und y die Winkel einzuführen, welche die Strahlen mit der Axe bilden.

Am einfachsten ergeben sich die Formeln aus der Betrachtung der Fig. 75, in welcher AB ein Segment der brechenden Kugelfläche, BS die Axe, $CB = CA = r'$ der Halbmesser der Krümmung, AS die Richtung eines der convergirend auf die Fläche BA fallenden Strahlen, und As dessen Richtung nach der Brechung ist. Man bezeichne die Brennweite Bs der von AB gebrochenen Strahlen durch f', die Entfernung BS des Convergenzpunktes der Einfallsstrahlen von B durch a, den Winkel ASB, den die einfallenden Strahlen mit der Axe bilden, durch φ, den Winkel AsB, den die gebrochenen mit derselben bilden, durch φ'. Es ist alsdann $SAC = \alpha$ und $sAC = \alpha'$, und es ergiebt sich, da $f' = Bs = BC + Cs = r' + Cs$ ist,

$$45)\quad f' = r' + r'\frac{\sin\alpha'}{\sin\varphi'}.$$

Betrachtet man a und φ als gegeben, so findet man zur Bestimmung von α aus dem Dreieck ACS,

$$46)\quad \sin\alpha = \frac{a-r'}{r'}\sin\varphi,$$

während α' und φ' bestimmt sind durch

$$47)\quad \sin\alpha = n\sin\alpha',\quad \varphi' = \varphi + \alpha - \alpha'.$$

Ist nun AB die Vorderfläche einer Linse von der Dicke d, so ist s, $f'-d$, φ', $\frac{1}{n}$ für die Hinterfläche dasselbe, was S, a, φ und n für die Vorderfläche ist. Bezieht man daher r'', f'', φ'' auf die Hinterfläche, und hat man aus (45—47) f' und φ' bestimmt, so erhält man die Brennweite f'' der Linse für diejenigen Strahlen, welche in der Entfernung a von der Vorderfläche convergiren und mit der Axe den Winkel φ bilden, aus denselben Gleichungen (45—47), wenn man darin

	a	r'	φ	f'	φ'	n
durch	$f-d$	r''	φ'	f''	φ''	$\frac{1}{n}$

ersetzt.

Sollen die Formeln allgemein gelten, so hat man die Radien derjenigen Flächen als positiv zu denken, welche ihre convexe Seite der Lichtquelle zukehren; die Radien derjenigen Flächen dagegen als negativ, welche ihre concave Seite der Lichtquelle zukehren; ferner die Winkel, die von den Strahlen mit der Axe gebildet werden, als positiv oder negativ, je nachdem jene convergiren oder divergiren; endlich sind die Einfalls- und Brechungswinkel positiv oder negativ zu denken, je nachdem dieselben über oder unter der Axe liegen, wenn man in der Figur sich CA mit CB zusammenfallend denkt.

Die Werthe von a und f sind wie im Vorhergehenden positiv oder negativ, je nachdem diese Längen rechts oder links von B liegen.

Hat man ein Linsensystem, so darf man nur die Rech-

nung fortsetzen, und z. B. bei der dritten Brechung in (45—47)

$$\begin{array}{lcccccc} & a & r' & \varphi & f' & \varphi' & n \\ \text{durch} & f''-e & r''' & \varphi'' & f''' & \varphi''' & n' \end{array}$$

ersetzen, wo e die Entfernung der zweiten Linse von der ersten bezeichnet, und r''', f''', φ''', n' sich ebenso auf die dritte Fläche beziehen, wie r', f', φ', n auf die erste.

Für parallele Einfallsstrahlen wird $\varphi = 0$, $a = \infty$, also α unbestimmt. Man mufs in diesem Falle von α statt von φ und a ausgehen.

Brechung des zusammengesetzten Lichtes.

Brechung durch Prismen.

Wenn das Licht durch ein im leeren Raume befindliches Prisma geht, und zwar so, dafs es in einer auf dessen Kante senkrechten Ebene einfällt, so hat man den Gleichungen (2 u. 3) zufolge, wenn n das Brechungsverhältnifs der Substanz des Prismas für einen bestimmten Farbenstrahl, und i dessen brechender Winkel ist,

$$\sin\alpha = n \sin\alpha', \quad \sin\alpha_1' = n \sin\alpha_1, \quad \alpha_1 = i + \alpha'.$$

Ist nun $n + \delta n$ das Brechungsverhältnifs für irgend einen anderen Farbenstrahl, so findet sich hieraus, da alle Farbenstrahlen unter demselben Winkel α einfällen,

$$\sin\alpha'\,\delta n + n\cos\alpha'\,\delta\alpha' = 0, \quad \delta\alpha_1 = \delta\alpha',$$
$$\cos\alpha_1'\,\delta\alpha_1' = \sin\alpha_1\,\delta n + n\cos\alpha_1\,\delta\alpha_1.$$

Da daher $n\delta\alpha_1 = n\delta\alpha' = -tg\,\alpha'\,\delta n$, und $\alpha_1 = i + \alpha'$ ist, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\cos\alpha_1'\,\delta\alpha_1' = \delta n[\sin(i+\alpha') - \cos(i+\alpha')\,tg\,\alpha'],$$

woraus sich ergiebt:

$$48) \quad \delta\alpha_1' = \frac{\sin i\,.\,\delta n}{\cos\alpha'\cos\alpha_1'},$$

wo $\delta\alpha_1'$ die Divergenz der beiden (zu n und $n + \delta n$ gehörigen) Farbenstrahlen ist, also die Länge des Spektrums, wenn der erste dem äufsersten Roth, der zweite dem äufsersten Violett entspricht.

Das Spektrum ist daher am kürzesten, wenn $\cos\alpha' \cos\alpha_1'$ sein Maximum erreicht, also wenn $tg\,\alpha'\,\delta\alpha' + tg\,\alpha_1'\,\delta\alpha_1' = 0$ wird, woraus sich zur Bestimmung des zugehörigen Einfallswinkels ergiebt:

$$n^2 \sin(i+\alpha')\cos(i+2\alpha') + \sin\alpha' = 0.$$

Von diesem Einfallswinkel ab nimmt die Länge des Spektrums zu beiden Seiten zu, und zwar dehnt sich dasselbe an der einen Grenze bis ins Unbestimmte aus, nämlich für den Einfallswinkel, unter welchem die zweite Fläche total reflektirend zu wirken anfängt, d. h. für $\alpha_1' = 90^0$, welches $\delta\alpha_1 = \infty$ liefert.

Um die Bedingungen zu erhalten, unter denen ein Prisma durch ein zweites achromatisirt wird, hat man nur den Divergenzwinkel der das zweite Prisma verlassenden Farbenstrahlen zum Verschwinden zu bringen.

Nennt man den Neigungswinkel der einander zugekehrten Flächen beider Prismen i', den brechenden Winkel des zweiten Prisma i'', die Einfallswinkel an der ersten und zweiten Fläche des letzteren α_2 und α_3, die zugehörigen Brechungswinkel α_2' und α_3', und D die Total-Abweichung der austretenden Strahlen, so hat man, wenn n' das Brechungsverhältniſs für denjenigen Strahl ist, welchem im ersten Prisma der Werth n entsprach,

$$\alpha_2 = i' + \alpha_1', \quad \sin\alpha_2 = n' \sin\alpha_2', \quad \sin\alpha_3' = n \sin\alpha_3,$$
$$\alpha_3 = i'' + \alpha_2', \quad D = \alpha + i + i' + i'' - \alpha_3'.$$

Die Bedingung des Achromatismus ist alsdann $\delta D = 0$, oder da α constant ist, $\delta\alpha_3' = 0$. Genau wie die Gleichung (48) findet sich aus den vorstehenden Gleichungen

$$\delta\alpha_2 = -\frac{\sin i''\,\delta n'}{\cos\alpha_3 \cos\alpha_2}.$$

Da überdies wegen $\alpha_2 = i' + \alpha_1'$ auch $\delta\alpha_2 = \delta\alpha_1'$ ist, so folgt aus der Verbindung der letzten Gleichung mit (48):

$$49)\quad \frac{\cos\alpha' \cos\alpha_1'}{\cos\alpha_2 \cos\alpha_3} = -\frac{\sin i}{\sin i''}\cdot\frac{\delta n}{\delta n'},$$

woraus sich in Verbindung mit $\alpha_2 = i' + \alpha_1'$ der brechende Winkel i'' des achromatisirenden Prisma für eine gegebene Stellung (d. h. für ein gegebenes i'), oder diese Stellung

(d. h. i') für ein gegebenes i'' berechnen läfst, vorausgesetzt, dafs n und $n+\delta n$ den lebhaftesten und möglichst von einander entfernten Farben entspricht.

Am einfachsten ist die Relation zwischen den brechenden Winkeln i und i'', wenn das Licht unter dem Einfallswinkel der kleinsten Abweichung (natürlich nur für einen bestimmten Farbenstrahl) einfällt, d. h. wenn $\alpha = \alpha_1'$ und $\alpha_2 = \alpha_3'$ ist. Für diesen Fall hatten wir (p. 160) gefunden,

$$50)\quad n \sin\tfrac{1}{2}i = \sin\tfrac{1}{2}(i+D'),\quad n' \sin\tfrac{1}{2}i'' = \sin\tfrac{1}{2}(i''+D''),$$

wo D' und D'' die Werthe der kleinsten Abweichung sind. Man zieht hieraus

$$\sin\tfrac{1}{2}i.\delta n = \tfrac{1}{2}\delta D' \cos\tfrac{1}{2}(i+D'),\quad \sin\tfrac{1}{2}i''\delta n' = \tfrac{1}{2}\delta D'' \cos\tfrac{1}{2}(i''+D'').$$

Die Bedingung des Achromatismus ist alsdann, da wegen der umgekehrten Lage der Prismen $\delta D' = \delta D''$ sein mufs,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\sin\frac{1}{2}i''}\,\frac{\delta n}{\delta n'} = \frac{\cos\frac{1}{2}(i+D')}{\cos\frac{1}{2}(i''+D'')},$$

oder, wenn man hierin für $\sin\frac{1}{2}i$ und $\sin\frac{1}{2}i''$ ihre Werthe aus (50) setzt,

$$\frac{n'\delta n}{n\delta n'} = \frac{\cos\frac{1}{2}(i+D')\sin\frac{1}{2}(i''+D'')}{\cos\frac{1}{2}(i''+D'')\sin\frac{1}{2}(i+D')} = \frac{tg\frac{1}{2}(i''+D'')}{tg\frac{1}{2}(i+D')}.$$

Setzt man $\dfrac{\delta n}{n-1} = \theta$, $\dfrac{\delta n'}{n'-1} = \theta'$, also $\dfrac{\delta n}{\delta n'} = \dfrac{\theta}{\theta'}\cdot\dfrac{n'-1}{n-1}$, so läfst sich die letzte Gleichung schreiben:

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{n(n'-1)}{n'(n-1)}\,\frac{tg\frac{1}{2}(i''+D'')}{tg\frac{1}{2}(i+D')},\qquad\text{oder}$$

$$51)\quad \frac{\theta}{\theta'} = \frac{n'-1}{n-1}\,\frac{\sin\frac{1}{2}i''}{\sin\frac{1}{2}i}\sqrt{\frac{1-n^2\sin^2\frac{1}{2}i}{1-n'^2\sin^2\frac{1}{2}i''}}.$$

Sind die brechenden Winkel i und i'' und mithin auch D' und D'' sehr klein, so dafs man die Sinus durch ihre Bogen ersetzen kann, so geht diese Gleichung über in:

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{(n'-1)i''}{(n-1)i} = \frac{D''}{D'}$$

(insofern nämlich $D' = (n-1)i$ und $D'' = (n'-1)i''$ ist). Restituirt man für θ und θ' ihre Werthe, so erhält die Gleichung die Form

$$\frac{\delta n}{\delta n'} = \frac{D''}{D'},$$

woraus das Gesetz folgt, dafs bei kleinen brechenden Winkeln diese letzteren sich umgekehrt wie die Farbenzerstreuungen δn und $\delta n'$ verhalten müssen.

Brechung durch Linsen. Chromatische Abweichung.

Die chromatische Abweichung einer Linse, d. h. die Entfernung der Brennpunkte der äufsersten (rothen und violetten) Strahlen, variirt mit der Entfernung desjenigen Punktes von der Axe, in welchem die einfallenden Strahlen die Linse treffen; sie ist also für die Randstrahlen eine andere, als für die Centralstrahlen.

Aus der Formel für die Centralstrahlen einer unendlich dünnen Linse

$$F_1 = (n-1)(R'-R'')$$

folgt, dafs F mit n zugleich wächst, dafs also bei parallelen Einfallsstrahlen der Brennpunkt der violetten (brechbareren) Strahlen der Linse näher liegt, als der den rothen Strahlen angehörige. Dasselbe folgt aus $f = F_1 + e$ für convergirende und divergirende Einfallsstrahlen, mit Ausnahme des Falles, in welchem F und e verschiedene Zeichen haben und e absolut genommen gröfser als F ist, d. h. bei Sammellinsen, wenn die Einfallsstrahlen von einem vor der Linse und innerhalb der Brennweite liegenden Punkte divergiren; bei Zerstreuungslinsen, wenn sie nach einem hinter der Linse, aber innerhalb der Brennweite liegenden Punkt hin convergiren.

Die Aenderung von F_1 ist, wenn n um δn wächst,

$$52)\quad \delta F_1 = (R'-R'')\delta n = (n-1)(R'-R'')\frac{\delta n}{n-1} = F_1\theta,$$

wo θ wiederum das Zerstreuungsverhältnifs $\frac{\delta n}{n-1}$ bedeutet.

Nennt man die chromatische Abweichung $-\omega$, und bezieht n auf die äufsersten rothen, $n+\delta n$ auf die äufsersten violetten Strahlen, so hat man, wegen

$$\delta f_1 = \delta(F_1 + e) = \delta F_1,$$

$$53)\quad \omega = -\delta\frac{1}{f_1} = \frac{\delta f_1}{f_1^2} = \frac{F_1\theta}{f_1^2}.$$

Bei einer einzigen Linse kann also die chromatische Abweichung nie verschwinden. Die Seitenabweichung findet sich hieraus, da deren Ausdruck, wie bei der sphärischen Aberration (p. 170), $\omega f y$ ist,

$$y\theta\frac{F_1}{f_1},$$

und für parallel auffallende Strahlen, d. h. für $F_1 = f_1$, $y\theta$, also unabhängig von der Focallänge.

Achromatismus eines Linsensystems.

Betrachten wir zuvörderst nur zwei, von einander um d entfernte Linsen, und nennen $\frac{1}{f_1}$ und $\frac{1}{F_1}$ die Brennweite und Focallänge der ersten, $\frac{1}{f_3}$ und $\frac{1}{F_3}$ die der zweiten Linse, ferner $\frac{1}{e'}$ die Entfernung des Convergenzpunktes der einfallenden Strahlen von der ersten Linse, und θ' deren Zerstreuungsverhältniſs $\frac{\delta n}{n-1}$, endlich $\frac{1}{e''}$ und θ'' die entsprechenden Werthe für die zweite Linse.

Es ist alsdann $f_3 = F_3 + e''$, also die Bedingung des Achromatismus:

$$\delta f_3 = \delta F_3 + \delta e'' = 0.$$

Aus der Gleichung $\frac{1}{e''} = \frac{1}{f_1} - d$ erhält man überdies, da $\delta f_1 = F_1\theta'$ ist,

$$\delta e'' = \frac{e''^2 \delta f_1}{f_1^2} = \frac{e''^2 F_1 \theta'}{f_1^2},$$

so daſs die obige Gleichung wegen $\delta F_3 = F_3\theta''$ sich verwandelt in:

$$54) \quad \delta f_3 = F_3\theta'' + F_1\theta'\frac{e''^2}{f_1^2} = \left(F_1\theta' + F_3\theta''\frac{f_1^2}{e''^2}\right)\frac{e''^2}{f_1^2} = 0.$$

Der Achromatismus ist daher nicht von der Krümmung der Linsen, sondern nur von ihrer Brennweite abhängig, und da *θ' und θ'' positiv* sind, so muſs F_1 oder F_3 nega-

Sechster Abschnitt.

Von der Absorption.

Erste Abtheilung.

Uebersicht über die Absorptions-Erscheinungen.

Absorption des reflektirten und gebrochenen Lichtes.

Man nennt einen Körper vollkommen durchsichtig, wenn das austretende und reflektirte Licht zusammengenommen dem einfallenden Lichte an Stärke genau gleich ist. In der Wirklichkeit giebt es aber keinen solchen Körper; es geht vielmehr mehr oder weniger Licht verloren, d. h. es wird mehr oder weniger Licht von den Körpern absorbirt.

Die Absorption schwächt höchst wahrscheinlich bei keinem einzigen Mittel das (reflektirte und gebrochene) Licht aller Farben gleichmäfsig.

Betrachten wir einen Körper, der vollkommen glatt ist, damit er an einer Oberfläche das Licht nicht ganz oder theilweis unregelmäfsig reflektirt (zerstreut), der ferner homogen ist, damit nicht verschiedenartige Theile verschieden auf das Licht wirken, und der endlich entweder vollkommen undurchsichtig ist, oder wenn er nicht durchsichtig ist, doch eine solche Dicke hat, dafs in ein vor demselben befindliches Auge kein Licht von irgend einem hinter demselben befindlichen Gegenstand kommt (z. B. ein Metall oder eine homogene hinreichend dicke Schicht einer Flüs-

sigkeit): so würden, wenn die Oberfläche z. B. eine Ebene ist, alle vor dem Körper sich befindenden Gegenstände genau in ihrer Farbe sich abspiegeln, sobald derselbe alle Farbenstrahlen gleichmäſsig reflektirte, d. h. sobald die Intensität des unter einem bestimmten Winkel einfallenden Lichtes zu der des reflektirten für alle Farbenstrahlen dasselbe Verhältniſs hätte.

Wäre dagegen der Körper so rauh, daſs er sämmtliches Licht unregelmäſsig reflektirte, so würde derselbe unter übrigens gleichen Umständen genau in der Farbe erscheinen, welche das einfallende Licht hat. Er würde daher im Sonnenlicht ein helles vollkommen reines Weiſs zeigen, wenn dasselbe durch die Absorption wenig geschwächt wird, und das Weiſs würde dunkler werden und durch alle Stufen des Grau hindurchgehend ins vollkommen Schwarze übergehen, wenn die Lichtschwächung bis zur Lichtvernichtung abnähme.

Wenn es nun auch vollkommen glatte Körper giebt, welche nicht wahrnehmbar die Farbe der abgespiegelten Gegenstände ändern, und wenn es auch rauhe Körper giebt, welche keine Abweichung vom reinen Weiſs und vom reinen Schwarz bemerken lassen, so dürfte dies noch keinen Beweis einer vollkommen gleichmäſsigen Absorption abgeben, da die Fraunhoferschen dunklen Linien selbst im Spektrum des Sonnenlichtes, welches die Atmosphäre durchlaufen hat, und welches man noch mit dem meisten Rechte weiſs nennen darf, auf ein Fehlen oder auf eine Schwächung einzelner Farben hindeuten.

Auf der andern Seite giebt es vielleicht keinen Körper, welcher von allen Farbenstrahlen nur eine einzige (zu einer einzigen Wellenlänge gehörige) Strahlengattung reflektirte, und von welchem also alle übrigen absorbirt würden. Ein solcher Körper würde nämlich in jedem farbigen Lichte, welches jene Farbe nicht mit enthielte, vollkommen schwarz erscheinen.

Von allen Mitteln wird also im Allgemeinen bei der Reflexion *jeder Farbenstrahl* anders afficirt. Die katoptri-

schen Bilder weichen hinsichtlich ihrer Farbe mehr oder weniger von den abgespiegelten Gegenständen ab, und die nicht vollkommen glatten Körper erscheinen in derjenigen Farbe, welche aus denjenigen im Einfallslichte enthaltenen Farben gemischt ist, die in einer zur Wahrnehmung hinreichenden Menge reflektirt werden können. Die natürliche Farbe der Körper hängt also von dem Absorptionsverhältnifs und von der Farbe des Einfallslichtes ab.

Die intensive Färbung spiegelnder Körper, welche die Intensität der katoptrischen Bilder schwächt, wie die des Milchglases und des Email, rührt von der Ungleichartigkeit der Masse her. In dem Email sind es z. B. die feinen Theilchen des Zinnoxyds, welche das zu ihnen durchdringende Licht unregelmäfsig reflektiren und mit dem von der Oberfläche regelmäfsig reflektirten Licht vermischen. Diese Theile spielen also die Rolle eines, von der Glasmasse unabhängigen rauhen Körpers. Ein Seitenstück hierzu sind die belegten Glasspiegel, in welchen die Oberfläche des Glases und die Belegung für sich unabhängig katoptrische Bilder geben, von denen aber nur das von der Belegung herrührende wegen seiner Lichtstärke das vorherrschende und allein mit Deutlichkeit gesehene ist.

Was von der Absorption in Bezug auf das reflektirte Licht gesagt ist, gilt ebenso in Bezug auf das gebrochene.

Ist das absorbirende Mittel von parallelen Flächen begrenzt, und ist die Absorption nahe gleichmäfsig, und nicht zu stark, so sieht man durch dasselbe die Gegenstände nahe in ihrer natürlichen Farbe; ist die Absorption ungleichmäfsig, so sieht man die weifsen Gegenstände in der Farbe, welche aus den nicht absorbirten Farben gemischt ist, und die farbigen Gegenstände in der Mischungsfarbe derjenigen nicht absorbirten Strahlen, welche dieselben in Folge der ihnen eigenen Absorption allein reflektiren können. Läfst also das Mittel nur eine einzige Farbe hindurch (wie es nahe mit dem rothen Kupferoxydulglase der Fall ist), so erscheinen alle Gegenstände dunkel, welche diese Farbe *nicht mit* enthalten.

Ist das Mittel von nicht parallelen Flächen begrenzt,

also prismatisch, so erscheinen weiſse Gegenstände auf dunklem Grunde und dunkle Gegenstände auf weiſsem Grunde mit denjenigen prismatischen Farben gesäumt, welche nicht absorbirt worden sind.

Das prismatische Spektrum, welches man erhält, wenn man weiſses Licht, nachdem man es durch ein von parallelen Flächen begrenztes absorbirendes Medium geleitet hat, durch ein durchsichtiges (nicht absorbirendes) Prisma gehen läſst, giebt (bei weiſsem Einfallslichte) ein genaues Bild der Absorptionsverhältnisse des Mittels. Das Licht ist nämlich an denjenigen Stellen geschwächt, oder von dunklen Räumen oder Linien unterbrochen, welche Farben entsprechen, die unverhältniſsmäſsig geschwächt oder ganz vernichtet sind. Mittel, deren Farbe beim Darauf- oder Hindurchsehen kaum merkliche Unterschiede zeigen, erzeugen oft ganz unähnliche Spektra. Die absorbirenden, starren und tropfbarflüssigen Körper geben Spektra, welche nach den bisherigen Erfahrungen, wenn sie vollkommen ausgelöschte Stellen enthalten, solche nur in gröſserer Ausdehnung enthalten. So ist im Spektrum des kobaltblauen Glases, je nach der schwächeren oder stärkeren Färbung, das Orange sehr schwach oder ganz ausgelöscht, so daſs das ebenfalls etwas geschwächte Roth einen abgesonderten ovalen Fleck bildet.

Eine auffallende (von Brewster entdeckte) Eigenheit besitzt das oxalsaure Chromoxyd-Kali, welche dasselbe den Gasarten nahe bringt, nämlich das Auftreten einer scharf begrenzten Linie im Roth des Spektrums, zwischen den Fraunhoferschen Linien *A* und *B* (etwa um $\frac{1}{6}$ des Intervalls zwischen *A* und *B* mehr nach *B* hin). Bei sehr geringer Dicke dieses doppelbrechenden Krystalls ist das durch die schnellsten Strahlen erzeugte Bild hellblau, und enthält, wie die prismatische Zerlegung zeigt, noch etwas Grün; das Bild der langsameren Strahlen enthält in seinem Spektrum Grün und Roth, von denen die erste Farbe im Tageslicht, die letzte im Kerzenlicht vorwaltet. Bei gröſserer Dicke wird das Blau *reiner und schwächer*, und das Grün des *anderen Bildes verschwindet*, und bei einer bestimmten Dicke

erlischt das blaue Bild gänzlich, während das andere olivengrün erscheint, und gleichfalls verschwunden ist, wenn die Dicke bis zu $\frac{1}{20}''$ gewachsen ist, wo der Krystall ganz undurchsichtig ist, und im reflektirten Licht fast schwarz aussieht. Aehnlich verhält sich die Auflösung des Salzes in Wasser, deren Färbung mit zunehmender Dicke im Tageslicht aus dem Blaugrünen in bläuliches Nelkenroth, im Kerzenlicht aus hellem Blutroth in immer dunkler werdendes Blutroth übergeht. Was die Veränderung des Spektrums bei zunehmender Dicke betrifft, so werden schon bei einer Dicke, bei welcher er fast farblos aussieht, die gelben Strahlen an der brechbareren Seite der Linie *D* angegriffen; alsdann verschwindet das Violett, das Gelb, das Orange, das weniger brechbare Grün, bis der Raum zwischen *D* und *E*, und ein Theil an der andern Seite von *D* und *E* ganz zerstört ist, wo dann jeder Gegenstand zwei weit getrennte Bilder giebt, deren eines roth, das andere grünlichblau ist. Darauf erlischt das Grün an der blauen Seite von *E* und das Blau an der violetten Seite von *F*, bis bei *F* nur reines Blau übrig bleibt, welches gleichfalls bei noch gröfserer Dicke der Lösung ganz verschwindet, und noch eine Zeitlang nur das Roth bemerkbar läfst.

Auch die Wärme ist von Einflufs auf die Absorptionsverhältnisse der festen und flüssigen Körper. Das rothe Quecksilberoxyd wird durch Erhitzung dunkelbraun, die Auflösungen des Eisenchlorids und der Eisenoxydsalze werden dunkler etc. Merkwürdig ist die von Mitscherlich (Pogg. Ann. XXVIII, p. 116) beobachtete, durch Temperaturerhöhung erzeugte plötzliche Farbenänderung des Quecksilberjodids, welche in einer Veränderung der Anordnung der Theile, die sich in der Krystallform ausspricht, seinen Grund hat. Die durch Sublimation erhaltenen krystallinischen Blättchen sind nämlich gelb; schmilzt man dieselben aber, und läfst die gelbe Masse erstarren, so setzt sich die Farbe plötzlich in ein intensives Roth um, welches wiederum durch vorsichtiges Erwärmen in Gelb verwandelt werden kann.

Die Gasarten (welche gar nicht oder nur unmerklich die Farben zerstreuen, also kein Spektrum bilden) werden hinsichtlich ihrer Absorptionsverhältnisse dadurch untersucht, dafs man möglichst vollkommen weifses Licht durch eine Schicht der Gasart leitet, und nach dem Austritt auf ein Prisma fallen läfst, welches das Licht möglichst gleichmäfsig absorbirt (z. B. auf ein homogenes weifses Glasprisma oder auf ein Bergkrystallprisma *). Das resultirende Spektrum, verglichen mit dem Spektrum, welches ohne Dazwischentritt der Gasart sich ergiebt, zeigt die Verhältnisse der Lichtschwächung durch das Gas.

Merkwürdig ist hierbei die Thatsache, dafs die Aenderung des Aggregatszustandes im Allgemeinen wenig Einflufs auf den Ton der durchgelassenen Farben hat, dafs aber im gasförmigen Zustand oft einzelne Farbenstrahlen in zahlreicher Menge absorbirt werden, so dafs das Spektrum von vielen dunklen Linien unterbrochen ist, deren Zahl und Stärke von der Dichtigkeit und Temperatur des Gases abhängt.

Die Anwesenheit dunkler Linien in Gasspektren wurde von Brewster entdeckt, und zwar zuerst im Spektrum des salpetersauren Gases, in welchem er mehrere hundert Linien bemerkte, die viel deutlicher waren, als die dunklen Linien im Sonnenspektrum. Er fand sie schärfer und dunkler im Violett und im Blau, blässer im Grün, und sehr schwach im Gelb und im Roth. Durch Vermehrung der Dichte des Gases wurde die Deutlichkeit der Linien im Gelb und Roth gröfser, und die Linien im Blau und Violett nahmen an Breite zu.

Bald nachher wurden solche Linien von Miller auch in anderen Gasen entdeckt. Das Spektrum des Joddampfes zeigte mehr als hundert gleichweit von einander entfernte Linien. Ist die Dichtigkeit des Gases nur gering, so er-

*) Miller liefs hierzu das Licht einer Gaslampe durch eine mit dem Gase gefüllte Flasche gehen, und erzeugte durch eine dahinter gestellte mit Wasser gefüllte Röhre eine Focallinie, deren Licht alsdann durch ein Prisma betrachtet wurde.

scheinen in dem Indigo einige feine, blafs schwarze Linien; vermehrt man die Dichte durch Erwärmung, so werden dieselben schwärzer und ihre Zahl vermehrt sich, die hellen Linien im Blau nehmen allmälig an Stärke ab, bis das blaue Ende ganz ausgelöscht ist, während neue Linien in dem übrigen Theil des Spektrums sich bilden. Bei sehr großer Intensität der Farbe des Gases endlich reducirt sich das Spektrum auf ein kleines Stück Roth, welches von zahlreichen schwarzen Strichen durchzogen ist.

Das Spektrum des Bromdampfes fand Miller dem des Jodgases vollkommen ähnlich.

Während Chlorgas nur das blaue Ende des Spektrums vernichtet, ohne Linien zu zeigen, gab Euchlor eine Menge breiter Linien und regelmäfsige Zwischenräume, und zwar blofs in dem Theile des Spektrums, welcher vom Chlor absorbirt wird.

Schmilzt man zwei Substanzen zu einem Gemenge zusammen, welche complementar gefärbtes Licht durchlassen, so ist das durchgelassene Licht des Gemenges farblos.

So wird, wie Suckow fand *), eine durch etwas Mangansuperoxyd in dem oxydirenden Theil der Löthrohrflamme schwach roth gefärbte Phosphorsalzperle durch Zusatz einer geringen Menge des für sich grün färbenden Kupferoxyds farblos und durchsichtig. Dasselbe erfolgt, wenn man das strohgelbfärbende Uranoxyd und eine solche Quantität Mangansuperoxyd anwendet, welche für sich die Perle röthlich violett färben würde. Ebenso wird eine in der Reductionsflamme des Löthrohrs durch Kobaltoxyd schwach blau gefärbte Boraxperle durch Zusatz einer geringen Menge orange färbender Wolframsäure farblos. Suckow fand selbst, dafs in einem Turmalin, welcher stellenweis farblos und röthlich violett war, in dem farblosen Theile gleichfalls das an sich roth-violett färbende Manganoxyd aber mit einem Zusatz von grün färbendem Eisenoxydul enthalten war. Demnach dürfte Farblosigkeit eines Minerals nicht mehr als Zeichen seiner chemischen Reinheit angesehen werden.

Prin-

*) Pogg. Ann. XXXIX, p. 326.

Principien, auf denen die Erklärung der Absorptions-Erscheinungen beruht.

Die Absorptions-Erscheinungen im Allgemeinen, und die dunklen Linien im Spektrum der Gase insbesondere, hat v. Wrede (Pogg. Ann. XXXIII.) mit glücklichem Erfolge aus der Annahme erklärt, dafs das Licht im Innern des absorbirenden Mittels partielle Reflexionen erleide, und dafs die direkt gebrochenen oder die direkt reflektirten Strahlen mit den durch partielle Reflexionen und Brechungen im Innern abgezweigten und später austretenden Strahlentheilen interferiren. Da die Verzögerungen bei dieser Voraussetzung von dem Abstand der Moleküle des Mittels abhängen, so mufs die Intensität (also das Absorptionsverhältnifs) von der Wellenlänge abhängen, und das austretende oder reflektirte Licht bei weifsem Einfallslicht im Allgemeinen mehr oder weniger gefärbt sein.

Setzt man zuerst zwei (ebene) parallele Molekelschichten voraus, und das Licht senkrecht auf diese Schichten einfallend, so ist der Ausdruck für die Intensität, I^2, des austretenden Lichtes

$$1)\quad I^2 = \frac{(1-R)^4}{1-2R^2\cos\Delta+R^4},$$

wenn die Intensität des Einfallslichtes zur Einheit genommen wird, R' die Vibrationsintensität des Lichtes nach einer einmaligen Brechung, R dieselbe nach einmaliger Reflexion bedeutet, und Δ für $\frac{4\pi}{l}d$ steht, in welchem Ausdruck l die Wellenlänge und d den Abstand der beiden Schichten vorstellt.

Die Intensität wird demnach am gröfsten, wenn $2d$ einer geraden Anzahl halber Wellenlängen, am geringsten, wenn $2d$ einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen gleich ist, d. h. diejenigen Farben werden am wenigsten absorbirt, deren Wellenlänge 1, 2, 3... mal in $2d$ enthalten ist, und diejenigen werden am meisten geschwächt, deren Wellenlänge $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$... mal in $2d$ enthalten ist.

Construirt man eine Curve, deren Abscissen $\frac{l}{2d}$, und deren C[illegible] l[illegible]ten die zugehörigen Werthe von I sind, so erhält ma[illegible] in Bild der Intensität für jedes Verhältnifs der Wellenl[illegible] zur Entfernung der Schichten. Nimmt man d als con[illegible]t an, betrachtet man also ein ganz bestimmtes Mittel, so werden die Abscissen der Wellenlänge proportional, und ist für das äufserste Violett $\frac{l}{2d} = a$, und für das äufserste I[illegible] h[illegible] b, [illegible] bietet die Curve zwischen den Abscissen a [illegible] b ein [illegible] für die Intensität der verschiedenen Farbenstra[illegible] dar.

Die Fig. 76 [illegible] ve dar, nur ist nicht $\frac{l}{2d}$ sondern $\log\frac{l}{2d}$ zu Abscissen genommen.

Man nenne die Wellenlänge des äufsersten Roth für irgend ein Mittel l_1, die zu dem an der Grenze des Roth und Gelb liegenden Strahl gehörige l_2, die zur Grenze des Gelb und Grün liegende gehörige l_3, etc. und l_8 die Wellenlänge des äufsersten Violett.

Construirt man nun ein Spektrum (Fig. 77), dessen Länge $\log\frac{l_1}{l_8}$ (für die Gasarten nahe gleich $\log 1{,}58$) ist, und nimmt zur Breite der Räume, welche die 7 Hauptfarben einnehmen, $\log\frac{l_1}{l_2}$, $\log\frac{l_2}{l_3}$, $\log\frac{l_3}{l_4}$ etc.; und legt das Spektrum so an die Abscissenlinie der vorigen Figur, dafs die äufserste Grenze des Roth auf den Punkt fällt, welcher dem $\log\frac{l_1}{2d}$ entspricht, so ist die Intensität jeder Stelle des Spektrums bestimmt durch die darüber liegende Ordinate. Es liegt nämlich z. B. die Ordinate für die Grenze zw[illegible] Roth und Gelb da, wo die Abscisse $\log\frac{l_2}{2b}$ ist, [illegible] Entfernung von dem Punkt, wo die Abscisse $\log\frac{l_1}{2}$ be-

trägt $log\frac{l_1}{2b} - log\frac{l_2}{2b}$, d. i. $log\frac{l_1}{l_2}$, welches eben die Stelle ist, an welcher sich jene Grenze zwischen Roth und Gelb in dem angelegten Spektrum befindet.

Setzt man z. B. $2d = \frac{1}{20}l_1$, so kommt der Anfangspunkt (A) des Spektrums bei 20 zu liegen, der ganze Theil der über demselben befindlichen Curve ist daher seinem Maximum nahe, und das durchgelassene Licht muſs fast rein weiſs erscheinen. Setzt man $2d = \frac{1}{4}l_1$, so kommt A unter 4 zu liegen, und die Intensitätscurve nimmt vom Rothen zum Violetten ab, welches letztere seinem Minimum sehr nahe ist; das Mittel würde daher wenig durchsichtig sein, und das durchgelassene Licht sich ins Rothe ziehen. Für $2d = \frac{1}{2}l_1$ liegt das ganze Curvenstück dem Minimum sehr nahe, und das Mittel würde undurchsichtig sein.

Nimmt man d immer kleiner und kleiner, so wird im durchgelassenen Lichte nach und nach das Violett, Blau, Grün, Gelb, Roth vorherrschen.

Es lassen sich also durch die verschiedene Annahme des Werthes von d alle Grade der Durchsichtigkeit und alle Farbennüancen hervorgebracht denken.

So lange $2d < 4l_1$ ist, giebt es nur ein Minimum oder zwei Minima, von denen jedes an einem Ende des Spektrums liegt; es wird also nur eine Stelle im Spektrum, oder es werden dessen beide Enden absorbirt. Die Zahl der absorbirten Stellen wächst aber mit $2d$ zugleich, und für $2d = 0{,}004$ Zoll erhält man ungefähr so viel dunkle Linien, als das Jodgas zeigt; allein es wird das durchgelassene zugleich weiſs sein, da eine gleiche Menge (sehr nahe liegender) Maxima auftreten.

Setzen wir statt zweier reflektirenden Schichten mehrere, und zwar ungleichweit von einander entfernte voraus, und nehmen wir zugleich an, daſs die Reflexionen eines und desselben Strahls nur zwischen benachbarten Schichten erfolgen, daſs also z. B. nicht ein Strahl nach einer Reflexion an der dritten Schicht erst an der ersten Schicht wieder *zurückgelenkt wird*, so erhalten wir für die Inten-

sität nach dem Austritt einen Ausdruck von der Form

$$I_1^2 \cdot I_2^2 \cdot I_3^2 \ldots,$$

wo I_1^2, I_2^2, I_3^2 sich von I^2 in (1) nur dadurch unterscheiden, dafs unter d beziehlich die Entfernungen der aufeinanderfolgenden Schichten verstanden werden müssen *). Nun giebt jeder der Faktoren I_1^2, I_2^2, I_3^2 ... eine Curve, wie die der Fig. 76; jedem derselben (zu einem eigenen Werth von d gehörenden) entspricht ein anderes Stück dieser Curve, und die Summe der Ordinaten der Curvenstücke giebt die Curve der Total-Intensität.

Das Spektrum des Jodgases, und dessen Veränderung mit der Temperatur, läfst sich sehr treu darstellen, wenn man drei Schichten voraussetzt, deren Entfernungen d und d' so beschaffen sind, dafs $2d = l_1$ und $2d' = 150\, l_1$ ist. In Fig. 78 stellt AB die zu d, CD die zu d' gehörige Curvenform vor; die aus beiden entstehende Curve ist daher der Linie EF ähnlich.

Stellt man sich nun vor, dafs der durch die Erwärmung hervorgebrachte dunklere Ton des Jodgases nur von der Zunahme der Menge des reflektirten Lichtes herrührt, also von einer Zunahme des Werthes von R in der Formel (1), so bleibt die Lage der Maxima und Minima dieselbe, und es werden nur die Maxima geringer. Es wird sich daher nur die Curve der Abscissenlinie OX nähern, ohne ihre Form zu ändern. Entspricht nun eine Ordinate von der Gröfse aa derjenigen Intensität, welche ein Lichtstrahl haben mufs, um noch eben auf den Gesichtssinn wirken zu können, oder mit andern Worten: ist ab die Grenze

---

*) Wrede nennt a. a. O. das, was dem Obigen nach die Wirkung je zwei aufeinanderfolgender Schichten ist, Verzögerungsart, und scheint sich so viele Schichtenpaare gedacht zu haben, als Verzögerungsarten vorhanden sind, so dafs zu einem Produkt von n Faktoren in dem Intensitätsausdruck, welchem nach dem Obigen $n+1$ Schichten entsprechen, $2n$ Schichten gehörig zu denken wären, und zwar so, dafs zwischen den Schichtenpaaren selbst keine Reflexionen stattfänden. Dabei negirt er Reflexionen im Innern der Moleküle selbst. Beide Vorstellungsarten führen auf dasselbe *Resultat*. Welche von beiden naturgemäfser sei, mag dahingestellt bleiben.

der Wahrnehmbarkeit für das Auge, so wird das Spektrum an denjenigen Stellen dunkel sein, welche den unter ab liegenden Curventheilen angehören; es werden also im Blau einige dunkle Linien entstehen. Nimmt aber die Intensität durch Zunahme des Werthes von R ab, d. h. rückt die Curve näher an OX, oder, was dasselbe ist, rückt die Grenze der Wahrnehmbarkeit höher hinauf, bis z. B. nach $a_1 b_1$, so wird der blaue Theil des Spektrums gänzlich absorbirt und es erscheinen dunkle Linien im Grün. Nimmt die Intensität noch mehr ab, so dafs die Grenze der Wahrnehmbarkeit nach $a_2 b_2$ hinaufrückt, so bleibt vom Spektrum nur noch von schwarzen Linien durchzogenes Roth übrig.

Was das Spektrum des oxalsauren Chromoxyd-Kali betrifft, so verhält sich dasselbe so, als ob drei reflektirende Schichten vorhanden wären, für welche $2d = l_1$ und $2d' = 10 l_1$ ist. Es gleicht nämlich die Curve für $2d = l_1$ der Linie AB Fig. 79, die Curve für $2d' = 10 l_1$ der Linie CD, also die reflektirende Curve der Linie EF. Ist nun ab die Grenze der Wahrnehmbarkeit, so erhält man ein Spektrum, welches nur Roth enthält, und in welchem sich ein schmaler dunkler Streif befindet.

In dem Vorigen sind zwar nur zwei Schichten und eine Schichtengruppe betrachtet worden, aber die Rechnung zeigt, dafs bei mehreren gleichweit von einander entfernten Schichten und bei mehreren Schichtengruppen die hellsten und dunkelsten Stellen ihre Lage nicht ändern, dafs nur der Grad der Helligkeit ein anderer wird, und dafs namentlich bei sehr durchsichtigen Mitteln der Contrast der hellsten und dunkelsten Stellen mit der Zahl der Schichten zunimmt.

Nach demselben Princip, nach welchem die Absorptionsphänomene des durchgegangenen Lichtes sich analytisch darstellen lassen, sind auch die des reflektirten Lichtes darstellbar. Die Rechnung führt auf den Grundsatz, dafs die Maxima und Minima des Spektrums im reflektirten Lichte genau die Stelle einnehmen, an welcher sich dieselben *im Spektrum des* gebrochenen Lichtes zeigen.

Da die Lage und das Verhältnifs der Maxima und Minima dem Princip gemäfs von der Wellenlänge abhängen, und diese in verschiedenen Richtungen in den doppelbrechenden Substanzen verschieden ist, so erklärt sich hieraus auch die Erscheinung des Dichroismus.

Künstliche Erzeugung der Spektra absorbirender Mittel.

Wrede erzeugte, von dem erörterten Princip ausgehend, durch partielle Reflexionen an den beiden Flächen dünner Glimmerblättchen die Hauptformen der Spektra absorbirender Mittel.

Zur Hervorbringung der Spektra, welche nach dem Vorigen auf Reflexionen äquidistanter Schichten beruhen, bog er ein dünnes Glimmerblatt (dessen Dicke hier der Entfernung *d* entspricht) so, dafs es die Oberfläche eines aufrechten Cylinders bildete, und liefs das von einer brennenden Kerze ausgehende Licht, nachdem es von dem Blättchen, auf welchem es eine feine vertikale Lichtlinie erzeugte, reflektirt worden war, durch ein Prisma gehen.

Sobald das Blättchen nicht dünner als $\frac{1}{1000}$ Zoll ist, erscheint das Licht vor dem Eintritt ins Prisma weifs, und das Spektrum ist von einer um so gröfseren Zahl dunkler Linien durchzogen, je gröfser die Dicke ist. Wählt man ein Blättchen, dessen Flächen etwas gegen einander geneigt sind, und biegt es so zu einem Cylinder, dafs die Dicke in der Vertikal-Dimension gleich bleibt, in der Horizontaldimension abnimmt, so läfst sich durch Drehen des Cylinders das allmälige Auseinandertreten der dunklen Linien und die Abnahme der Anzahl derselben verfolgen.

Zur Darstellung der Spektra, welche auf Reflexionen zwischen 3 ungleich entfernten Schichten beruhen, liefs Wrede das von einem solchen cylindrischen Glimmerblättchen reflektirte Licht auf ein zweites fallen, und das von diesem letzteren reflektirte durch ein Prisma gehen. Zur Verstärkung concentrirte er zuerst das Kerzenlicht durch eine Linse, und hielt durch einen Schirm das I[illegible] von dem zweiten Glimmerblättchen; und durch

deren das vom ersten Blättchen reflektirte Licht von dem Prisma ab. Durch Drehen der cylindrischen Blättchen liefsen sich alle mögliche Combinationen von Flächendistanzen hervorbringen, welche keine allzu grofse Dünnheit erforderten.

Um auch Versuche für sehr kleine Werthe von d zu machen, bediente er sich gefärbter Flüssigkeiten, die in einer cylindrischen Röhre zwischen zwei Glasscheiben, deren gegenseitiger Abstand sich beliebig ändern liefs, eingeschlossen waren. Mit einer rothen Flüssigkeit und einem Glimmerblättchen erzeugte er Spektra, welche dem des Jodgases und dem des oxalsauren Chromoxyd-Kali vollkommen glichen. Durch Vergröfserung des Einfallswinkels, also durch Verstärkung der reflektirten Lichtmengen, brachte er den Effekt der durch Temperaturerhöhung intensiver gemachten Gasarten, nämlich die Verbreiterung der schwarzen Linien, hervor.

Berechnung der dunklen Linien in prismatischen Spektren.

Rühren die dunklen Linien, welche in dem prismatischen Spektrum sichtbar werden, wenn das Licht vor dem Eintritt in das Prisma durch ein gasförmiges Mittel gegangen ist, von partiellen Reflexionen äquidistanter Molekelschichten her, so lassen sich nach dem Vorhergehenden aus den Wellenlängen, welche zweien dunklen Linien entsprechen, die Entfernung der Schichten, so wie die Zahl und Distanz der übrigen dunklen Linien berechnen.

Es erscheinen nämlich die dunklen Linien da, wo die Wellenlänge so grofs ist, dafs $(2a+1)l = 2d$ wird (wo unter a eine beliebige ganze Zahl zu denken ist). Bezeichnet nun l_1 die Wellenlänge der äufsersten rothen, l_7 die der äufsersten violetten Strahlen, s die Zahl der dunklen Linien, und liegt l_1 zwischen $\frac{2d}{2m-1}$ und $\frac{2d}{2m+1}$, so dafs die Wellenlänge der ersten dunklen Linie im Roth $\frac{2d}{2m+1}$

ist, so liegt l_7 zwischen $\frac{2d}{2(m+s)-1}$ und $\frac{2d}{2(m+s)+1}$, und die Wellenlänge der letzten dunklen Linie im Violett ist $\frac{2d}{2(m+s)-1}$.

Hieraus folgt, dafs m zwischen $\frac{d}{l_1}-\frac{1}{2}$ und $\frac{d}{l_1}+\frac{1}{2}$, so wie dafs $m+s$ zwischen $\frac{d}{l_7}-\frac{1}{2}$ und $\frac{d}{l_7}+\frac{1}{2}$ liegt. Man erhält also s, wenn man die gröfste in $\frac{d}{l_7}-\frac{1}{2}$ enthaltene ganze Zahl von der gröfsten in $\frac{d}{l_7}+\frac{1}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl subtrahirt.

Will man d berechnen, und kennt man zwei Wellenlängen, z. B. l_2 und l_3, und die Zahl $s'-1$ der dunklen Linien zwischen denselben, so setze man

$$l_2=\frac{2d}{2m'-1} \quad \text{und} \quad l_3=\frac{2d}{2(m'+s')-1}.$$

Man hat alsdann

$$d=l_2(m'-\tfrac{1}{2})=l_3(m'+s'-\tfrac{1}{2}),$$

also $$d=\frac{l_2 l_3 s'}{l_2-l_3}.$$

Will man den Abstand zweier benachbarten dunklen Linien berechnen, und ist für die eine, als bekannt vorausgesetzte, die Wellenlänge l, die der nächstfolgenden $l-\delta l$, so hat man, wenn $l=\frac{2d}{2m'-1}$ ist, $l-\delta l=\frac{2d}{2m'+1}$, folglich, da $2m'=\frac{2d}{l}+1$ ist,

$$l-\delta l=\frac{ld}{l+d} \quad \text{und} \quad \delta l=\frac{l^2}{l+d}.$$

Die dunklen Linien sind daher im violetten Licht enger, als im rothen.

Ist d sehr klein, so dafs $\delta l=l$ wird, stehen also die dunklen Linien sehr weit von einander ab, so verhalten sich die Zuwächse δl der Wellenlängen nahe wie die Wellenlängen selbst.

Einflufs der Natur der Lichtquellen auf das Spektrum.

Das prismatische Spektrum eines brechenden Mittels ist verschieden je nach der Natur der Lichtquelle; doch sind die Aenderungen denen, welche die Aenderung des Mittels hervorbringt, so analog, dafs man nicht umhin kann, beide einer gleichen Ursache zuzuschreiben. Im Allgemeinen sind die Spektra farbiger Flammen weniger ausgedehnt, als die des Sonnenlichtes, so dafs die Wellenlängen der erzeugten Strahlen zwischen engeren Grenzen liegen. Namentlich gehören hierher die Flammen des verdünnten und des Kochsalz aufgelöst enthaltenden Weingeistes, welche nur gelbes Licht liefern, so wie der äufsere (dunklere) Theil der Kerzenflamme, welcher nur orangefarbenes Licht giebt. Der innere hellleuchtende Theil der Kerzenflamme giebt Licht von allen Farben, und dem unteren blauen Theil fehlen die rothen und gelben Strahlen.

Man kann die Spektra dieser Theile der Flamme gesondert untersuchen, wenn man ein dioptrisches Bild der letzteren durch eine Sammellinse erzeugt, und den zu untersuchenden Theil des Bildes auf die Oeffnung fallen läfst, durch welche hindurch das Licht auf das Prisma geleitet wird. Der äufserste Rand des Bildes giebt als Spektrum nur einen orangefarbenen Strich, also homogenes Licht; der innere Theil giebt ein vollständiges Spektrum, welches im Orange da, wo im Sonnenspektrum die dunkle Doppellinie D sich befindet, eine helle Doppellinie zeigt, die um so intensiver wird, je weiter der auf die Oeffnung fallende Theil des Bildes der Flamme von dessen Mitte entfernt ist, und welche offenbar dem Einflufs der dunkleren Hülle der Flamme zuzuschreiben ist. Das Spektrum des blauen Theils endlich enthält nur Violett, Blau und Grün, und hat neben sich drei regelmäfsig liegende Maxima, wie sie sich aus einer Annahme von $d = 5l_1$ bis $6l_1$ ergeben würden.

Das Spektrum der Flamme des Weingeistes, welcher Kupferchlorid aufgelöst enthält, zeigt eine grofse Zahl Paare *heller Striche, welche durch* schwarze Striche von einander *getrennt sind, so wie* es die Fig. 80 zeigt. Es verhält sich

daher so, als ob Gruppen von Molekelschichten vorhanden wären, deren Entfernungen sich wie 1:2 verhalten, so dafs die Minima des einen Curvenstückes AB (etwa $d = 20 l_1$ entsprechend) auf die Maxima des anderen CD (etwa $d = 40 l_1$ bis $41 l_1$ entsprechend) fallen, welches der resultirenden Curve die Form EF giebt, und wobei die Grenze der Wahrnehmbarkeit etwa in ab genommen werden mufs.

Das Spektrum der Cyangasflamme, welche durch eine schmale Oeffnung betrachtet, purpurfarben mit grünlichgelber Einfassung erscheint, ist von mehreren, ziemlich gleichförmig vertheilten dunklen Zonen durchschnitten, welche durch Zonen von fast gleicher Helligkeit von einander getrennt sind.

Das Spektrum des salpetersauren Strontians zeigt aufser einer sehr grofsen Zahl Unterbrechungen eine sehr helle, scharf sich abschneidende Linie.

Nach Wheatstone's Untersuchungen besteht das Spektrum des aus Quecksilber gezogenen elektro-magnetischen Funkens aus sieben durch dunkle Zwischenräume getrennten Zonen, nämlich aus zwei dicht aneinanderliegenden orangefarbenen, einer hellgrünen, zwei sehr nahen bläulichgrünen, einer sehr hell purpurrothen und einer violetten.

Die aus Zink, Kadmium, Zinn, Wismuth und Blei im geschmolzenen Zustande gezogenen Funken gaben ähnliche Spektra, die sich aber in der Zahl, Lage und Farbe der Zonen unterschieden. Die Spektra vom Zink und Kadmium zeichneten sich durch eine rothe Linie aus, die im Spektrum aller übrigen Metalle fehlte.

Die Spektra blieben genau dieselben, wenn der Funke aus diesen Metallen durch die Volta'sche Säule gezogen wurde; auch änderten sie sich nicht, wie Wheatstone wenigstens beim Quecksilber fand, wenn der Funke im Vacuum der Luftpumpe, in der Torricellischen Leere, in Kohlensäure etc. gezogen wurde.

Combination verschiedenartiger Flammen.

Für die Identität des Grundes der Farben leuchtender und beleuchteter Körper spricht noch die Entdeckung [illegible]ckows, dafs sich das Licht gefärbter Flammen ebenso mit weifsem Licht ergänzt, wie zur Deckung gebrachte Complementarfarben.

So behält z. B. die Weingeistflamme ihre eigenthümliche Farbe, wenn der Docht aus zwei Strängen zusammengedreht ist, deren einer mit Chlorstrontiumlösung, der andere mit Chlorkupferlösung getränkt ist, während jene die Flamme für sich carminroth, die andere dieselbe smaragdgrün färben würde.

Ebenso verhält es sich, wenn man orangefärbende Chlorcalciumlösung mit blaufärbender Chlorkobaltlösung verbindet.

Alle vier Dochte verhalten sich wiederum, wie jedes dieser Paare, mag man die Dochte zusammendrehen, oder die Flammen so hinter einander stellen, dafs sie sich unmittelbar berühren.

Spektrum des Sonnenlichtes.

Die dunklen (Fraunhoferschen) Linien im Spektrum des Sonnenlichtes schreibt man der Absorption der Sonnen- und Erd-Atmosphäre zu. Die Unregelmäfsigkeit in der Vertheilung und Stärke der Linien deutet, wenn man sie nach dem angegebenen Princip erklären will, auf eine grofse Zahl in den verschiedensten Entfernungen von einander befindlichen Molekularschichten hin. Alsdann ist auch die Verschiedenheit des Spektrums bei auf- oder untergehender Sonne von dem Spektrum der Mittagssonne aus dem ungleichen Wege durch die Erdatmosphäre erklärlich, so wie die Abweichungen von der Fraunhoferschen Zeichnung des Spektrums, welche Brewster bei seinen Beobachtungen gefunden hatte. Die letzteren rühren nämlich, wie Poggendorff mit Recht vermuthet, von der sehr

ungleichen Höhe über der Meeresoberfläche, in wel Fraunhofer (in München) und Brewster (in Al in Schottland) ihre Beobachtungen anstellten. Sowohl Unterschiede in der Länge des Weges, welchen das l durch die Atmosphäre hindurch zu durchlaufen hat, als Unterschiede in der Dichtigkeit der letzteren, müssen lich von merklichem Einfluſs sein. Die Hauptabweic gen von dem Fraunhoferschen Spektrum bestanden in Hinzukommen dunkler Zonen und scharf begrenzter Li und in dem Vorhandensein von deutlichen Liniengrup an deren Stelle Fraunhofer nur einzelne Linien ang ben hatte.

Selbst die Jahreszeit scheint Brewsters Beobach gen zufolge von Einfluſs zu sein, und über das Verh bei untergehender Sonne, also bei Verlängerung des ges in der Atmosphäre drückt sich Brewster folgen maſsen aus:

„Die Atmosphäre wirkt sehr stark auf den in der l von *D* liegenden Theil und auf den Raum dicht an wenigst brechbaren Seite derselben. Sie erzeugt eine sc Linie in der Mitte der Doppellinie *D*, und durch Ve ſserung einer Gruppe kleiner Linien an der rothen von *D* bringt sie einen Streif hervor, fast so dunke die dreifache Linie *D* selbst. Im Allgemeinen mach alle Linien breiter; allein besonders die dunkelste, we ich *m* nenne, zwischen *C* und *D*. Sie entwickelt e Streif an der wenigst brechbaren Seite von *m*, wirkt ei thümlich auf mehrere Linien und erzeugt einen abge derten Streif an der brechbarsten Seite von *C*. Die nien *A*, *B* und *C* werden bedeutend breiter, und zwis *A* und *B*, so wie überhaupt in dem rothen Raume we Linien und Streifen entwickelt. — — — Ein sehr m würdiger schmaler Streif liegt an der brechbarsten Seite *C*. Ein anderer sehr breiter findet sich an der brecl sten Seite von *D*, dicht an einem scharf begrenzten breiten Streif von gelbem Licht, und entwickelt sich d die allgemeine Absorption des entsprechenden Theils darüber liegenden blauen Spektrum."

Der überaus grofse Unterschied zwischen der Intensität der Maxima und Minima, so wie der Umstand, dafs im blauen Ende des Spektrums die Linien enger sein müssen, als im rothen Ende, folgt schon aus der Rechnung bei der Annahme äquidistanter Schichten.

Zweite Abtheilung.

Entwickelung der Grundlagen der Absorptions-Theorie.

Absorptions-Erscheinungen im durchgelassenen Lichte.

Betrachten wir die Absorption als eine Lichtschwächung, welche durch partielle Reflexionen im Innern des absorbirenden Mittels erzeugt wird, und denken wir uns vorläufig zwei parallele Schichten reflektirender Moleküle, so verhalten sich diese Schichten wie die beiden Grenzflächen im Newton'schen Ringversuch. Es tritt nämlich aus der zweiten Schicht nicht blofs dasjenige Licht, welches von jeder Schicht einmal gebrochen ist, sondern auch Licht, welches zwischen den Schichten 2, 4, 6.... partielle Reflexionen erlitten hat, und vereinigt sich mit dem ersten zu einem interferirten Lichtbündel. Ist das Mittel homogen, bricht es also z. B., wenn es einfachbrechend ist, überall das Licht gleich stark; so werden die Brechungswinkel dem Einfallswinkel gleich, und die Strahlenrichtung wird beim Durchgang nicht geändert.

Behalten wir die Bezeichnung von p. 96 bei, so hat man als Ausdruck für die Intensität des austretenden Lichtes, insofern wegen der Gleichheit des Brechungs- und Einfallswinkels nicht mehr $R_2 = -R$, sondern $R_2 = +R$ ist, und $R = R_1$, $R' = R_1'$ wird, aus der Gleichung (40) Abschn. IV.

$$1)\quad I^2 = \frac{R'^4}{1 - 2R^2 \cos\Delta + R^4},$$

während $R' = 1 - R$ ist, und wo Δ wiederum der Phasenunterschied zweier, sich nur durch zwei Reflexionen zwi-

schen den Schichten unterscheidenden Strahlen ist, und von dem Abstand d der Schichten durch die Gleichung

$$\Delta = \frac{4\pi}{l} d \cos\alpha'$$

abhängt. Die Intensität erreicht daher ihr Maximum, wenn $2d\cos\alpha'$ gleich 0, l, $2l$, $3l \ldots$ ist, ihr Minimum, wenn $2d\cos\alpha'$ gleich $\frac{1}{2}l$, $\frac{3}{2}l$, $\frac{5}{2}l$, $\frac{7}{2}l \ldots$ ist.

Da $d\cos\alpha'$ für jede bestimmte Strahlenrichtung constant ist, und die Helligkeit sonach nur von der Wellenlänge abhängt, so wird jede Farbengattung anders afficirt.

Setzt man die Incidenz als senkrecht, also $d\cos\alpha' = d$ voraus, so wird I^2 von der brechenden Kraft des Mittels unabhängiger.

Unter dieser letzten Voraussetzung sind die Werthe von I in Fig. 76 durch eine Curve dargestellt (s. p. [illegible]).

Nehmen wir an, dafs von den Molekülen auch Licht unregelmäfsig (zerstreuend) reflektirt wird, so nimmt blofs R einen geringeren Werth an, und es wird an dem Gang der Werthe von I nichts Wesentliches geändert.

Setzt man hinter der zweiten Schicht eine dritte Schicht in der Entfernung d' voraus, und entspricht derselben der Phasenunterschied Δ', so wird die Intensität des Lichtes nach dem Austritt

$$I'^2 = \frac{I^2 R'^4}{1 - 2R^2 \cos\Delta' + R^4} = I^2 I_1^2,$$

und entsprechen einer vierten Schicht die Werthe d'' und Δ'', I'', so hat man

$$I''^2 = \frac{I^2 I_1^2 R'^4}{1 - 2R^2 \cos\Delta'' + R^4} = I^2 I_1^2 I_2^2,$$

und es kommt jedem der Faktoren I^2, I_1^2, I_2^2 ein besonderes Stück der Curve (Fig. 76) zu, durch deren Vereinigung man ein Bild des Ganges der Absorption construiren kann.

Ist der Werth von R für jede Schicht ein anderer, so wird dieser Gang im Allgemeinen wenig geändert.

Hierbei ist aber vorausgesetzt, dafs das Licht, nachdem *es eine oder* mehrere partielle Reflexionen zwischen zwei

auf einander folgenden Schichten erlitten hat, nicht in eine frühere Schicht zurückkehrt, um dort von neuem reflektirt wieder aus der hintersten Schicht heraus zu treten.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo eine solche Complication stattfindet, und zwar unter der Voraussetzung, dafs alle Schichten gleichweit (um d) von einander entfernt sind, und dafs das Mittel noch bei grofser Dicke sehr durchsichtig ist, wie die atmosphärische Luft.

Die Intensität des einfallenden Lichtes zur Einheit nehmend, wird die Vibrations-Intensität u derjenigen Strahlen, welche ohne Reflexion durch alle Schichten gedrungen sind, für m Schichten gleich R'^m. Was die Vibrationsintensität derjenigen Strahlen betrifft, welche den Raum d 2, 4, 6... mal durchlaufen haben, und welche beziehlich durch u_1, u_2, u_3... bezeichnet seien, so wird das System u_1 erzeugt durch $m-1$ Strahlen, welche zwischen zwei auf einander folgenden Schichten zwei Reflexionen erlitten haben, und denen daher der Werth $R'^m R^2$ entspricht, so dafs $u_1 = (m-1) R'^m R^2$ wird. Ferner wird u_2 erzeugt durch $m-1$ Strahlen, welche zwischen zwei auf einander folgenden Schichten 4 Reflexionen erlitten haben (denen der Werth $R'^m R^4$ entspricht), und $m-2$ Strahlen, welche zwei Reflexionen erlitten haben zwischen der ersten und dritten, der zweiten und vierten u. s. w. Schicht, und denen der Werth $R'^{m+2} R^2$ entspricht. Ist nun das Mittel sehr durchsichtig, so ist R sehr klein, und man darf die Systeme $R'^m R^4$ vernachlässigen, so dafs $u_2 = (m-2) R'^{m+2} R^2$ wird. Aus dem letzten Grunde braucht man auch in u_3 nur diejenigen $m-3$ Strahlen zu berücksichtigen, welche zwei Reflexionen zwischen der ersten und vierten, der zweiten und fünften etc. Schicht erlitten haben, so dafs $u_3 = (m-3) R'^{m+4} R^2$ wird. Ebenso erhält man

$$u_n = (m-n) R'^{m+2(n-1)} R^2.$$

Die Oscillationsgeschwindigkeiten der Systeme u_1, u_2, u_3 ... u_n werden daher

$$(m-1) R'^m R^2 \sin(\xi - \Delta), \quad (m-2) R'^{m+2} R^2 \sin(\xi - 2\Delta),$$
$$(m-3) R'^{m+4} R^2 \sin(\xi - 3\Delta), \ldots \quad (m-n) R'^{m+2(n-1)} R^2 \sin(\xi - n\Delta).$$

Die Summe derselben, U, wird also

$$U = R'^m R^2 \{ \sin\xi [(m-1)\cos\Delta + (m-2) R'^2 \cos 2\Delta + \ldots + (m-n) R'^{2(n-1)} \cos n\Delta] - \cos\xi [(m-1)\sin\Delta + (m-2) R'^2 \sin 2\Delta + \ldots + (m-n) R'^{2(n-1)} \sin n\Delta] \}.$$

Bringt man den Faktor von $\sin\xi$ auf die Form $A\cos\psi$, und den Faktor von $\cos\xi$ auf die Form $A\sin\psi$, so wird $U = AR'^m R^2 \sin(\xi - \psi)$.

Setzt man ferner $R'^2(\cos\Delta + \sqrt{-1}\sin\Delta) = h$, so ergiebt sich wegen $R'^{2a}(\cos a\Delta + \sqrt{-1}\sin a\Delta) = h^a$,

$$A(\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi) = (\cos\Delta + \sqrt{-1}\sin\Delta) \times [(m-1) + (m-2)h + (m-3)h^2 + \ldots + (m-n)h^{n-1}] = (\cos\Delta + \sqrt{-1}\sin\Delta) S,$$

während

$$S = (m-1)(1 + h + h^2 + \ldots + h^{n-1}) - (h + h^2 + h^3 + \ldots + h^{n-1}) - (h^2 + h^3 + h^4 \ldots + h^{n-1}) - \ldots h^{n-1}$$

$$= \frac{m-1}{1-h}(1-h^n) - \frac{1}{1-h}(h-h^n) - \frac{1}{1-h}(h^2-h^n) - \ldots - \frac{1}{1-h}(h^{n-1}-h^n)$$

$$= \frac{1}{1-h}[(m-1) - (m-1)h^n - (h + h^2 + h^3 + \ldots + h^{n-1}) + (n-1)h^n]$$

$$= \frac{1}{1-h}\left[(m-1) - (m-n)h^n - \frac{h-h^n}{1-h}\right]$$

ist. Wegen $n = m-1$ wird daher

$$S = \frac{(m-1) - mh + h^m}{(1-h)^2},$$

oder wenn die Zahl m der Schichten so grofs ist, dafs man h^m vernachlässigen und $m-1$ durch m ersetzen kann,

$$S = \frac{m}{1-h} = \frac{m}{1 - R'^2(\cos\Delta + \sqrt{-1}\sin\Delta)}.$$

Man hat folglich

$$A(\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi) = \frac{m(\cos\Delta + \sqrt{-1}\sin\Delta)}{1 - R'^2(\cos\Delta + \sqrt{-1}\sin\Delta)}.$$

Hier-

Hieraus ergiebt sich, wenn man $1-2R'^2\cos\Delta+R'^4=f^2$ setzt,

$$A=\frac{m}{f},\quad \sin\psi=\frac{\sin\Delta}{f},\quad \cos\psi=\frac{\cos\Delta-R'^2}{f},$$

so dafs

$$U=mR'^m R^2\frac{\sin\xi(\cos\Delta-R'^2)-\cos\xi\sin\Delta}{f^2}$$

$$=mR'^m R^2\frac{\sin(\xi-\Delta)-R'^2\sin\xi}{f^2}$$

wird.

Vereinigt man endlich hiermit noch das System u, dessen Oscillationsgeschwindigkeit $R'^m\sin\xi$ ist, so erhält man, wenn man die resultirende Oscillationsgeschwindigkeit V nennt,

$$V=R'^m\{(AR^2\cos\psi+1)\sin\xi-AR^2\sin\psi\cos\xi\}.$$

Bezeichnet man den Faktor von $\sin\xi$ durch $B\cos\varphi$, und den Faktor von $\cos\xi$ durch $B\sin\varphi$, so dafs

$$B^2=A^2R^4+2AR^2\cos\psi+1,$$

oder nach der Restitution der Werthe von A und $\cos\psi$,

$$B^2f^2=m^2R^4+2mR^2(\cos\Delta-R'^2)+f^2$$

$$=1+2\cos\Delta(mR^2-R'^2)+(mR^2-R'^2)^2,$$

wird: so erhält man, da $V=B\sin(\xi-\varphi)$ ist, für die resultirende Intensität

$$B^2=\frac{1+2\cos\Delta(mR^2-R'^2)+(mR^2-R'^2)^2}{1-2\cos\Delta R'^2+R'^4}.$$

Die Lichtstärke ist also am gröfsten für $\cos\Delta=+1$, und am kleinsten für $\cos\Delta=-1$, d. h. am gröfsten, wenn (bei senkrechter Incidenz) $2d$ gleich 0, l, $2l$, $3l$..., am kleinsten, wenn $2d$ gleich $\frac{1}{2}l$, $\frac{3}{2}l$, $\frac{5}{2}l$, $\frac{7}{2}l$ etc. wird, mithin unter denselben Bedingungen, unter welchen die Lichtstärke bei zwei Schichten ein Gröfstes oder Kleinstes wird.

Der gröfste Werth von B^2 ist

$$R'^m\frac{1+mR^2-R'^2}{1-R'^2}=R'^m\left(1+\frac{mR^2}{1-R'^2}\right),$$

der kleinste Werth

$$R'^m\frac{1-mR^2+R'^2}{1+R'^2}=R'^m\left(1-\frac{mR^2}{1+R'^2}\right),$$

also das Verhältniſs des gröſsten Werthes zum kleinsten

$$1+\frac{2mR^2}{1-R^2},$$

oder genähert:

$$1+\tfrac{1}{2}mR.$$

Da für groſse Werthe von m auch dieses Verhältniſs groſs wird, so müssen bei sehr groſser Dicke des Mittels im prismatischen Spektrum die dunklen und hellen Stellen sehr contrastiren.

Es ist nach dem Vorhergehenden nicht schwer, die Aufgabe allgemeiner zu lösen, nämlich für den Fall, daſs das Mittel undurchsichtiger ist, wobei also die mit höheren Potenzen von R multiplicirten Glieder in u_{2}, u_{3} ... mit berücksichtigt werden müssen, und für den Fall, daſs die Schichten ungleich von einander entfernt sind.

Absorptions-Erscheinungen im reflektirten Lichte.

Für die Intensität des reflektirten Lichtes erhält man, wenn zwei um d von einander entfernte Molekelschichten vorausgesetzt werden, aus Abschn. IV, 37

$$\frac{2R^2(1-\cos\Delta)}{1-2R^2\cos\Delta+R^4};$$

sie wird daher gleichfalls ein Maximum für $\cos\Delta=+1$, und ein Minimum für $\cos\Delta=-1$. Die Curve, welche den Gang der Intensität vorstellt, hat daher an denselben Stellen ihre Maxima und Minima, an welchen sie im durchgelassenen Lichte sich befinden; nur sind die Minima genau der Null gleich.

Die hieraus zu ziehenden Folgerungen weichen daher nicht wesentlich von denen für das durchgelassene Licht geltenden ab.

Siebenter Abschnitt.

Physiologische Optik.

Einrichtung des Auges.

Der Augapfel (*bulbus oculi*), dessen Form nahe sphärisch ist, befindet sich in der konischen, aus Knochen gebildeten Augenhöhle (*orbita*), und zwar in einem mit Fett stark durchwachsenen Zellgewebe. Den seitlichen Theil des Auges in der Augenhöhle, welcher nach der Nase zu liegt, wollen wir die innere, den entgegengesetzten die äufsere Seite nennen.

Die Bewegung des Auges wird durch sechs Muskeln vermittelt, von denen vier die geraden Muskeln (*musculi recti*), die beiden anderen die schiefen Muskeln (*musculi obliqui*) heifsen. Die geraden Muskeln geben, einzeln wirkend, die Bewegungen in horizontaler und vertikaler Richtung um den Mittelpunkt des Auges, indem ihre Anheftungspunkte oben, unten, an der inneren und an der äufseren Seite liegen, und ihre Richtung vom Anheftungspunkte aus direkt nach dem hinteren Ende der Augenhöhle gehen. Durch die gleichzeitige Zusammenziehung zwei benachbarter gerader Muskeln wird die Bewegung in schiefer Richtung möglich. Eine drehende Bewegung um die Augenaxe wird durch die schiefen Muskeln hergestellt. Der eine von ihnen, der obere schiefe Muskel, ist am oberen Theile des Augapfels etwas nach hinten zu (unter dem oberen geraden *Muskel*) angesetzt, geht schief aufwärts nach

der am oberen Theil der inneren Seite der Augenhöhle befindlichen Rolle (*trochlea*), welche die Form einer Öhse hat, und läuft nach dem Durchgange durch dieselbe nach hinten zu, so dafs durch eine Zusammenziehung dieses Muskels das Auge schief einwärts und abwärts gedreht wird. Die Drehung nach der entgegengesetzten Seite wird dem Auge durch den unteren schiefen Muskel mitgetheilt, welcher gleichfalls etwas nach hinten, und zwar zwischen dem oberen und äufseren geraden Muskel am Augapfel angesetzt, um die äufsere Seite desselben herum geht, sich um den unteren geraden Muskel schlägt, und auf der unteren Seite der Augenhöhle befestigt ist.

Was den Augapfel selbst betrifft, dessen Horizontal-Durchschnitt in Fig. 81 abgebildet ist, so besteht dessen äufsere Hülle 1) aus der weifsen und undurchsichtigen harten Haut (*sclerotica*) *aa*, deren vorderer Theil das sichtbare Weifse des Auges bildet, und 2) aus der durchsichtigen Hornhaut (*cornea*) *bb*, durch deren stärkere Wölbung ein leichter Vorsprung entsteht, und welche mit ihrem Rande in die harte Haut eingefügt ist.

Dicht unter der harten Haut, und mit ihr durch ein bräunliches Zellgewebe (*lamina fusca*) verbunden, befindet sich die Aderhaut (*choroidea*) *dd*, welche auf ihrer Innenseite mit einer Membran (*membrana pigmenti*) überkleidet ist. Diese Membran ist aus flachen, oft sechseckigen Zellen zusammengesetzt, welche schwärzliche Kügelchen, das sogenannte *pigmentum nigrum*, enthalten. Das Pigment wird im hohen Alter bräunlich, und fehlt den Albino's ganz. An der Stelle, wo sich die harte Haut mit der Hornhaut vereinigt, wird sie von einem schmalen weifsen Ringe, dem Strahlenbande (*orbiculus ciliaris*), umgeben, welcher die *sclerotica* mit ihr inniger verbindet. Von diesem Ringe aus erstrecken sich 70—90 strahlenförmige Fortsätze (*processus ciliares*) in das Innere des Auges hinein, und bilden den sogenannten Ciliarkörper (*corpus ciliare*).

Zwischen der Hornhaut und dem Ciliarkörper befindet *sich die* Regenbogenhaut (*iris*) cc, deren innere durch ein

Pigment schwarz gefärbte Seite auch Traubenhaut (*uvea*) heifst, und welche eine kreisförmige Oeffnung, die Pupille, hat. Sie ist der ringförmige gefärbte Theil des Auges, den man durch die durchsichtige Hornhaut hindurch wahrnimmt. Die Pupille liegt nicht genau in der Mitte der Iris, sondern etwa $\frac{1}{6}$ weiter nach der inneren Seite, und läfst sich durch eine Bewegung der Iris erweitern und verengern.

Der aus einer an dem hinteren Ende der Augenhöhle befindlichen Oeffnung kommende Sehnerv tritt etwa $\frac{1}{10}$ Zoll von der Augenaxe entfernt (bei *n*) nach der inneren Seite zu in den Augapfel, und breitet sich, nachdem er durch die *sclerotica* und *choroidea* hindurchgedrungen ist, zu einem feinen netzartigen Gewebe, der Netzhaut (*retina*) aus, welche sich an die *choroidea* anschliefst und bis zum Ciliarkörper reicht. Am Ende der Augenaxe, der Pupille gegenüber, zeigt sie einen gelben Fleck, dessen Mittelpunkt eine dünne, einer Oeffnung gleichende, Stelle ist, die man das Centralloch (*foramen centrale*) nennt.

Die Sehnerven, bestehend aus sehr feinen Primitivfasern, treten vor ihrem Eintritt in die Augenhöhlen im sogenannten Chiasma zusammen, und theilen sich daselbst theilweis in der Art, dafs die Fasern der rechten Seite des rechten und des linken Nerven zum rechten Auge, die der linken Seite des rechten und linken Nerven zum linken Auge gehen.

Nach Treviranus Entdeckung (*Beiträge zur Aufklärung der Erscheinungen und Gesetze des organischen Lebens. Bremen* 1835) und Gottsche's Untersuchungen (Pfaff's *Mittheilungen aus dem Gebiete der Medicin, Hft.* 3 *und* 4) besteht die Netzhaut aus drei Hauptschichten, einer äufseren breiartigen Körnerschicht, einer (darauf folgenden) Nervenfaserschicht, welche durch die Zertheilung des Sehnerven gebildet wird, und einer inneren Schicht, welche, eine Fortsetzung der vorigen, aus cylindrischen, nach dem Innern des Auges zu in Papillen sich endenden Fasern besteht. Ob jeder der letzten stabähnlichen Nervenglieder zu *einer eigenen* Faser der mittleren Schicht ge-

hört, oder ob mehrere aus derselben Faser entspringen, ist noch nicht ausgemacht. Die Gröfse der Papillen beim Kaninchen wurde zu 0,0033^{mm}, bei Vögeln zu 0,002—0,004, beim Frosch zu 0,0066 (die Dicke der Cylinder bei letzterem zu 0,0044) gefunden.

Im Innern des Auges hinter der Iris liegt die durchsichtige biconvexe Krystalllinse (*lens crystallina*) *B*, welche von einer Membran (*capsula lentis*) eingeschlossen ist, und aus über einander liegenden Blättchen besteht, welche nach Innen zu an Dichte und brechender Kraft zunehmen, und von durchsichtigen Fäserchen durchzogen sind. Sie ist völlig durchsichtig, wird aber in hohem Alter von der Mitte aus gelblicher. Im grauen Staare wird sie hart und undurchsichtig. Im punktförmigen Staar ist nur ein Punkt in der Mitte verdunkelt.

Durch die Linse wird der innere Raum des Auges in zwei ungleich grofse Kammern getheilt, von denen die kleinere, *A*, nach vorn liegt, durch die Iris in zwei mittelst der Pupillenöffnung zusammenhängende Räume abgetheilt ist, und die wäfsrige Feuchtigkeit (*humor aqueus*) enthält; die gröfsere, *C*, von der gallertartigen Glasfeuchtigkeit eingenommen wird. Dieselbe ist von einer zarten Haut (*hyaloidea*) umschlossen und durchzogen, so dafs der Glaskörper aus lauter kleinen Zellen zu bestehen scheint. Da wo sie sich der Linse nähert, fängt diese Haut an sich in Falten zu legen, welche den Faltenring (*corona ciliaris*) bilden, und in sich die Endigungen der *processus ciliares* aufnehmen.

Das Brechungsverhältnifs der wäfsrigen Feuchtigkeit ist nach Brewster 1,3366, das der gläsernen 1,3394, das der äufseren Schicht der Krystalllinse 1,3767, das der mittleren Lage derselben 1,3786, und das des Kernes 1,3990. Alle diese Media stehen daher in Bezug auf ihre brechende Kraft dem Wasser sehr nahe.

Was die Dimensionen des Auges und die Krümmungen der Theile desselben betrifft, so sind die neuesten und genauesten Messungen derselben von Krause angestellt.

Die Krümmungen wurden durch Abscissen und Ordinaten bestimmt, und zwar wurde zur Abscissenlinie für die Hornhaut die Sehne dieser letzten genommen, für die Linse deren Durchmesser, für die hintere Fläche des Glaskörpers einestheils die hintere Hälfte der Augenaxe, anderntheils der Durchmesser der hinteren Wölbung des Augapfels. Das Resultat im Allgemeinen war, dafs die meisten Krümmungen Curven höherer Ordnung sind; dafs nur die Vorderfläche der Linse elliptisch, die Hinterfläche parabolisch ist, und dafs die Wölbung der Netzhaut ein Ellipsoid bildet.

Die Verschiedenheiten der Dimensionen verschiedener Augen bemerklich zu machen, mögen folgende Messungen Krause's dienen, welche derselbe aufser anderen Pogg. Ann. XXXIX, p. 530 angiebt, und welche den beiden von ihm mit (II.) und (VII.) bezeichneten Augen angehören.

Augapfel

			II.	VII.
Axe	äufsere		11,05‴	10,65‴
	innere		10	9,4
Durchmesser	äufserer senkrechter		10,3	10,3
	innerer « «		9,4	9,45
	transversaler			10,75
	diagonaler grofser	äufserer	11,1	10,75
		innerer	10,2	9,6
	« kleiner		11,05	10,75

Hornhaut

		II.	VII.
Dicke	in der Mitte	0,35‴	0,53
	am Rande	0,5	0,63
Vorderfläche	senkrechte Sehne	4,8	4,2
	transversale «	5,3	4,7
	diagonale «	4,9	4,4
	Radius	4,12	3,86
	gröfster Bogen	80° 3′	75° 0′
Hinterfläche	Sehne	5,0‴	5‴
	Parameter	5,55	5,54

Blendung

		II.	VII.
Breite der Iris	innere Hälfte	1,5‴	1,6‴
	äufsere Hälfte	1,75	1,8
Pupille	Durchmesser	2,25	1,5
	Entfernung von der Hornhaut	1,15	0,9

Linse.

		II.	VII.
Durchmesser		4‴	4‴
Axe	der ganzen Linse	1,9	1,8
	der vorderen Hälfte	0,78	0,78
	der hinteren Hälfte	1,1	1,02
Vorderfläche	halbe grofse Axe	2	2,03
	halbe kleine Axe	0,91	0,95
	Entfernung von der Hornhaut	1,35	1
Hinterfläche	Parameter	4.99	4,09
	Entfernung von der Netzhaut	6,8	6,65

Hintere Wölbung der Netzhaut.

	II.	VII.
Halbe grofse Axe des Ellipsoids	5,05‴	5,05‴
Halbe kleine Axe des Ellipsoids	4,15	4,41

Das zum Grunde gelegte Maafs ist die pariser Linie. Der grofse Diagonal-Durchmesser des Augapfels ist von innen und oben nach aufsen und unten gerechnet, der kleine dagegen von aufsen und oben nach innen und unten. Die gröfste Breite der Hornhaut liegt nicht genau im transversalen Durchmesser des Augapfels, sondern etwas nach dem grofsen Diagonal-Durchmesser hingeneigt.

Vom Bilde auf der Netzhaut.

Die in das Auge tretenden Lichtstrahlen werden durch die verschiedenen brechenden Mittel, aus denen dasselbe besteht, von ihrer Richtung abgelenkt. Sehen wir von der Hornhaut und der Linsenkapsel wegen ihres geringen Einflusses ab, so sind es die wäfsrige Feuchtigkeit und die Krystalllinse, welche die Richtung der Strahlen in dem letzten Mittel, der Glasfeuchtigkeit bestimmen. Da sowohl die biconvexe Krystalllinse als die durch die innere Fläche der Hornhaut und der Vorderseite der Linsenkapsel zu einem Meniskus begrenzte wäfsrige Feuchtigkeit eine Sammellinse bildet, und die Glasfeuchtigkeit das Licht schwächer bricht, als die Linse, so werden die Strahlen, die von einem Punkte vor dem Auge ausgehen (vorausgesetzt, dafs derselbe aufserhalb der vorderen Brennweite der beiden linsenförmigen Mittel liegt), in der Glasfeuchtigkeit eine convergirende Richtung annehmen, und sich, falls diese Feuchtigkeit sich weit genug erstreckt und keine chromatische und sphärische Abweichung stattfindet, zu einem Bilde vereinigen.

Befindet sich der Lichtpunkt in einer solchen Entfernung vom Auge, dafs er demselben in der gröfsten Deutlichkeit erscheint, so fällt sein Bild nach der allgemeinen Annahme auf die Netzhaut.

Diejenige Linie, welche einen leuchtenden (oder beleuchteten) Punkt mit seinem Bilde auf der Netzhaut verbindet, heifse Richtungslinie.

Ist ein Punkt im Auge, durch welchen diese Richtungslinie geht, bekannt, so ist auch die Lage des Bildes auf der Netzhaut bekannt.

Der Erfahrung gemäfs gehen die Richtungslinien sämmtlicher Punkte, welche das Auge zugleich übersieht, durch einen und denselben im Auge liegenden Punkt, den man den Durchkreuzungspunkt nennt.

Die Existenz eines Durchkreuzungs-Punktes bewies Volkmann *durch folgende* Versuche, zu denen er sich

der Augen weifser Kaninchen bediente, weil das Fehlen des schwarzen Pigments bei diesen erlaubt, die Netzhautbilder durch die dünne *sclerotica* hindurch zu sehen.

Zieht man auf einer horizontalen Tafel durch einen Punkt *e* (Fig. 82) gerade Linien aa', bb', cc', dd', ee', setzt auf dieselbe ein präparirtes Auge *ABC* so, dafs die Augenaxe mit ee' zusammenfällt, stellt man ferner in einem dunklen Zimmer bei *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in einer gewissen Entfernung angezündete Lichter auf, und bringt bei a', b', c', d', e' feine Visire an, so läfst sich dem Auge stets eine solche Lage auf ee' geben, dafs beim Visiren durch a', b', c', d', e' nach *a*, *b*, *c*, *d*, *e* die Netzhautbilder der Flammen genau in den Visirlinien (in a_1, b_1, c_1, d_1, e_1) zu liegen kommen. Es mufs daher im Auge ein Durchkreuzungspunkt liegen, und zwar in einer durch *e* gehenden Vertikallinie.

Ein etwas abgeänderter Versuch ist folgender.

Bringt man auf einem Diopterlineal (Fig. 83) in *B* ein Diopter, in *D* eine in horizontaler Richtung drehbare Scheibe, in der durch die Diopteröffnung und den Drehpunkt gehenden Richtung in *C* ein Haarvisir, und in *A* eine Lichtflamme an, so läfst sich einem Auge *O* auf der Scheibe stets eine solche Lage geben, dafs bei jeder Drehung der Scheibe zugleich die Flamme und ihr Netzhautbild vom Visir halbirt wird. Da hierbei sich das Auge um die Augenaxe drehen läfst, so folgt, dafs sich nicht blofs die bei aufrechter Augenstellung in einer horizontalen Ebene befindlichen Richtungslinien, sondern sämmtliche Richtungslinien in einem Punkte schneiden.

Bringt man zwischen *O* und *A* eine zweite Flamme *E* an, so decken sich die Netzhautbilder von *A* und *E*, wie man auch die Scheibe drehen mag.

Das Auge, mit welchem Volkmann experimentirte, hatte in der Richtung der Augenaxe $7\frac{1}{4}'''$ Länge, und im Querdurchmesser $8'''$. Die Entfernung des Kreuzungspunktes von der Vorderfläche der Hornhaut war $3\frac{1}{4}'''$, also nicht weit vom Mittelpunkt des Auges.

Von der Eigenschaft der Richtungslinien ausgehend,

s die Bilder aller leuchtenden Punkte, welche sich in
iselben befinden, einander decken, bestimmte Volk-
nn die Lage des Kreuzungspunktes im menschlichen
ge auf folgende Weise.

Ein Brettchen *ABCD* (Fig. 84), welches bei *A* einen
sschnitt für die Nase enthielt, wurde in horizontaler Rich-
g unter dem Auge fest angesetzt, und darauf ein Punkt *c*
rt, und ein Punkt *d*, welcher von *c* verdeckt wurde, be-
chnet. Alsdann wurde die Linie *dca* gezogen (welche die
chtung der Augenaxe angiebt), *ce* senkrecht auf *da* er-
htet, und in *e* ein um *e* bewegliches Diopterlineal *ei* be-
tigt, dessen Ende *i* auf eine Kreistheilung *g* einspielte,
d welches mit einem Nonius *b* versehen wurde. Auf
n Nonius entsprachen 10 Theile 9 halben Graden der
eilung *g*, so dafs sich die Winkel bei *e* bis auf 3 Mi-
ten genau messen liefsen. *ca* wurde 6 Zoll, *ce* 1 Zoll
fs genommen, bei *c* und *e* Haarvisire, und bei *b* und *l*
optern angebracht.

Wird nun *ei* so bewegt, dafs das Visir *e* in der
tte der Diopter-Oeffnung *l* erscheint, während *c* in der
tte der Diopter-Oeffnung *b* verbleibt, so ist der Durch-
nittspunkt der Linien *da* und *ei* der Kreuzungspunkt.
zeichnet man den letzteren durch *m*, so ist *cm*, die Ka-
ete des Dreiecks *cem*, bekannt, da auf *g* der Winkel
e sich messen läfst.

Um nun die Lage von *m* im Auge zu bestimmen,
urde zwischen *a* und *b* ein Maafsstab *n* angebracht, und
n einem, von der Seite visirenden, Assistenten bestimmt,
ber welchem Theilstrich der vorderste Punkt der Horn-
ut sich befand.

Als Mittel aus den Messungen an 8 Personen ergab
ch die Entfernung des Kreuzungspunktes von dem Axen-
nkt der Hornhaut: 0,466″, also ein Weniges hinter der
nse.

Dafs die Bilder der in den Richtungslinien befindli-
en Punkte sich decken, bewies Mile direkt durch fol-
nden Versuch, welcher zugleich die Behauptung desselben,

dafs der K euzungspunkt mit dem Mittelpunkt der Hornhau skrümmung zusammenfalle, bestätigt.

Auf einem Brette wurde der Durchschnitt eines Auges möglichst genau gezeichnet, und durch den Mittelpunkt der Hornhautskrümmung drei Linien gezogen, von denen die mittlere der Augenaxe entsprach, und die seitlichen mit derselben Winkel von 15° bildeten. Die Punkte, in welchen die Netzhaut von den beiden letzten geschnitten wurde, und welche sich 4‴ von einander entfernt fanden, wurden auf die harte Haut eine chlichen Auges übertragen, in diesen Punkten zwei gemacht und die Aderhaut mit ihrem Pigment beh ortgeschoben. Wurde alsdann das Auge über der in einen Ring von Wachs gesetzt, und ein Wachsst ht vor demselben bewegt, so wurden die Spalten nur ert llt, wenn das Licht sich in den gezeichneten Direktionslinien befand.

Zur weiteren Bestätigung seiner Behauptung über die Lage des Kreuzungspunktes verschaffte sich Mile künstliche Augen von Glas von 10‴ Durchmesser, erwärmte den vorderen Theil und blies eine Erhabenheit an, welche die Hornhaut vorstellte. Ferner wurde die hintere Seite matt gemacht, um die nachgebildete Hornhaut ein Ring mit Ölfarbe aufgetragen, und die Glaskugel mit Wasser gefüllt. Bei sämmtlichen Augen, deren Hornhautshalbmesser von 2 bis 4‴ variirte, gingen die Richtungslinien, in denen nach einer Wachskerze visirt wurde, durch den Mittelpunkt der Hornhautskrümmung.

Nun ist zwar das Auge in der Wirklichkeit nicht mit einer homogenen Flüssigkeit gefüllt, und es geht daher nur der längs der Augenaxe sich fortpflanzende Strahl ungebrochen und in der Richtungslinie zur Netzhaut; allein der geringe Unterschied in den Brechungsverhältnissen der Media im Auge bewirkt, namentlich bei den Krümmun hältnissen der Krystalllinse, dafs die Richtung der Str auch bei gröfseren Neigungen gegen die Axe nur unbed tend geändert wird.

Nimmt man nämlich den Abstand der Vorderfläche

ıse von der Hornhaut zu 1,3‴, die Axe der Linse zu ‴, den Radius der Vorderfläche zu 4,2‴, den der Hinfläche zu 2,4‴ an, so wird, wenn der nach dem Corneatelpunkt gerichtete Strahl einen Winkel von 15° mit der e bildet, beim Eintritt in die Linse nur um $\frac{1}{20}$ des Breangswinkels nach der einen Seite hin, und beim Austritt ebensoviel nach der andern Seite hin abgelenkt, so dafs die Netzhaut fast an derselben Stelle trifft, als wenn die ıse gar nicht vorhanden wäre.

Vom Sehen.

Aeufserer Zusammenhang des Bildes der Netzhaut mit dem Gesehenen.

Sehrichtung.

Die Sehrichtungen haben nicht nur die Eigenschaft, s alle Punkte, welche in einer derselben liegen, auch er einzigen Richtungslinie angehören, sondern sie fallen h der Lage nach mit den Richtungslinien zusammen. ıe Folge davon ist, dafs uns die äufseren Gegenstände ihrer natürlichen Lage erscheinen, obgleich ihr Bild auf r Netzhaut eine verkehrte Lage hat.

Es fragt sich nun, ob die Sehrichtung sich mit der wegung des Auges ändert.

Ist es streng richtig, dafs die Sehrichtung mit der entechenden Richtungslinie zusammenfällt, so hängt jede nderung der Sehrichtung und mit ihr jede Ortsveränderung eines gesehenen Punktes von einer Ortsveränderung s Kreuzungspunktes ab, während der Kreuzungspunkt nur nn seine Lage bei einer Bewegung des Auges ändert, nn er aufserhalb des Drehpunktes des letzteren fällt.

Dafs der Drehpunkt des Auges in dessen Centrum lien, oder wenigstens nur unmerklich von demselben entnt sein kann, geht daraus hervor, dafs ein leise auf das

Auge gesetzter Finger keine Verrückung bei einer Augenwendung bemerkt.

Dennoch sehen wir die Gegenstände bei der Drehung des Auges unverrückt in ihrer Lage verbleiben, wie es auch folgender Versuch Mile's zu bestätigen scheint.

Ein Brett wurde mit Papier überzogen, auf demselben ein Quadrant *acbd* (Fig. 85) von 12″ Radius gezeichnet; Alsdann wurden in radialer Richtung auf dem Quadranten dünne 6″ lange und 1″ breite Metallblättchen befestigt, welche auf der rechten Seite roth, auf der linken blau und vorn schwarz gefärbt waren. Bei *a* wurde die Ecke des Brettes ausgeschnitten, so dafs sich das Papier daselbst umlegen liefs, um dem Auge Platz zu machen. Ferner wurde ein Ring von 1″ Breite und $1\frac{1}{2}$″ Durchmesser vorn so zugeschnitten, dafs er an den Rand der Augenhöhle angesetzt, denselben in einigen entgegengesetzten Punkten berührte, ohne die Bewegung des Auges zu erschweren. In einem Einschnitt *m* dieses Ringes wurde das Brett so weit eingeschoben, bis das nach *b* sehende Auge nur die schwarzen Vorderränder sahe, also *a* im Kreuzungspunkt für die genannte Augenstellung sich befand. Ueberdies wurden über einen bei *n* angebrachten Einschnitt Rofshaare parallel übergespannt, und dem Einschnitt gegenüber (bei *o*) ein Strich gemacht, damit ein Zweiter dasjenige Haar bemerken konnte, welches in der durch *o* gehenden und die Hornhaut berührenden Ebene lag, und dadurch die Entfernung des Kreuzungspunktes von dem vordersten Punkt der Cornea bestimmt werden konnte. Hat nun der Kreuzungspunkt eine von der Richtung des Auges abhängige Lage, so mufs bei einer Augendrehung neben den schwarzen Vorderrändern der Metallblättchen etwas von dem Blauen oder Rothen sichtbar werden, was indefs von den Personen, mit denen Mile den Versuch anstellte, nicht bemerkt wurde.

Das Gegentheil beweist das (gleichfalls von Mile angeführte) Faktum, dafs eine Lichtflamme, vor welcher eine *dicht ans* Auge gehaltene Karte so weit vorgeschoben wird,

dafs der Rand eben die Flamme bedeckt, wiedererscheint, sobald man das Auge wendet.

Der Widerspruch des Resultates des ersten Versuches gegen das des zweiten, so wie gegen das thatsächliche Auseinanderfallen des Drehpunktes und Kreuzungspunktes, verliert sein Auffallendes, wenn man bedenkt, dafs dieses Auseinanderfallen unmerklich sein mufs bei geringen Wendungen des Auges: wegen der sehr geringen Gröfse des Winkels zwischen den beiden Linien, welche von dem Lichtpunkt aus durch den Drehpunkt und den Kreuzungspunkt gehen; für gröfsere Wendungen: wegen der relativen Undeutlichkeit neben und hinter einander befindlicher Lichtpunkte, von welcher späterhin weiter die Rede sein wird.

Was das Verhältnifs der ins Auge fallenden Lichtstrahlen zur Sehrichtung betrifft, so ist die letztere eine ideelle Linie, welche nur dann mit einem Strahl zusammenfällt, wenn der Lichtpunkt in der Augenaxe liegt, weil nur in dieser Richtung ein Lichtstrahl seine Richtung nicht ändert.

Die von einem Punkte ausgehenden Strahlen, welche zur Bildung des Netzhautbildes mitwirken, bilden einen Kegel, dessen Ausdehnung von der Gröfse der Pupille abhängt. Werden Strahlen dieses Kegels durch einen dunklen Körper am Zutritt zum Auge gehindert, so bleibt der Punkt, wie von selbst klar ist, sichtbar und nur die Intensität nimmt je nach der gröfseren oder geringeren Menge der gehemmten Strahlen ab oder zu. Der Punkt kann nur dann verschwinden, wenn sämmtliche Strahlen abgehalten werden, oder wenn ein leuchtender oder beleuchteter Punkt zwischen Objekt und Auge in der Richtungslinie sich befindet, weil dann die Bilder beider Punkte zusammenfallen.

Hieraus erklärt sich, dafs ein Lichtpunkt verschwindet, wenn vor ihn ein (wenn auch noch so dünner) lichtaussendender Gegenstand in der Richtungslinie sich befindet, während er sichtbar bleibt, wenn man ein mit einer kleinen Oeffnung versehenes Kartenblatt vor das Auge hält, vor welchen Punkt der Pupille auch die Oeffnung treten mag. In dem letzten Falle wirft nämlich die Karte auf die

Durch eine kleine Oeffnung betrachtet, erscheinen sie schärfer begrenzt und breiter, weil die einfallenden Lichtkegel dadurch kleiner werden und daher kleinere Scheiben bilden. Helle Körper auf dunklem Grunde (wie die Mondscheibe) erscheinen aus demselben Grunde breiter. Hält man zwei Finger, die sich mit ihren Kuppen berühren, nahe vor das Auge, so scheinen die verschmälerten Finger von einander um ein Gewisses entfernt, und nur an der Berührungsstelle durch einen dunklen Kanal verbunden zu sein. Die Punkte des hellen Grundes, welche am Rande der dunklen Finger liegen, bilden nämlich auf der Netzhaut Scheibchen, und verschmälern und verkürzen die Finger durch Eingreifen in deren dunkleres Bild (oder vielmehr in deren Schatten), ausgenommen an der Berührungsstelle, da dieselbe kein Licht hindurchläfst. Allmälige Entfernung der Finger vom Auge verbreitert dieselben und verkürzt den Kanal, bis dieser in der Sehweite (welche für ein gewöhnliches Auge zwischen 6″ und 10″ liegt, bei Kurzsichtigen kürzer, bei Weitsichtigen länger ist) verschwindet.

Hält man die von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen so auf, dafs nur ein kleiner Bündel ins Auge gelangt, etwa durch ein Kartenblatt mit kleiner Oeffnung, und befindet sich diese Oeffnung nicht in der Sehrichtung, so treffen die Strahlen die Netzhaut in der Richtungslinie, wenn das Bild auf die Netzhaut fällt (d. h. wenn der Punkt in der Sehweite liegt); sie treffen dieselbe diesseit der Richtungslinie, wenn das Bild hinter die Netzhaut fällt (d. h. bei kleinerer Objektsweite); sie treffen dieselbe jenseit der Richtungslinie, wenn das Bild vor die Netzhaut fällt (d. h. bei gröfserer Objektsweite), weil sie in dem Ort des Bildes die Sehrichtung durchschneiden. Da nun die Stelle, in welcher die Netzhaut getroffen wird, ein deutliches Bild empfinden läfst, und zwar in der Richtung, welche die getroffene Stelle mit dem Lichtpunkt verbindet: so sieht man durch die Oeffnung der Karte, wenn sie nach dem Rande der Pupille hin gehalten wird, den Lichtpunkt an seiner wahren Stelle, wenn die Objektsweite der Sehweite gleich

htung einer Flamme wahr, von denen die beiden mittle- nach oben und unten hervorragten, so dafs ihrer 6 vorden zu sein schienen. Mir erscheint jede Flamme schon näfsigem Abstande fünffach; bei weiterer Entfernung wird h die Vermehrung in der vertikalen Dimension bemerk-, und der Complex von Bildern formt eine kreisförmige eibe, deren Rand durch die Grenzen der äufsersten Bil- ausgezackt erscheint. Das Ineinanderfliefsen der Gren- im Innern machte es unmöglich, die Gesammtzahl mit herheit zu bestimmen. Rings am Umfang zählte ich connt 15, mit welchem Auge ich die Flamme auch betrach- mochte, und zwar waren sie symmetrisch geordnet, in Art, dafs 6 oben, 3 unten, und 3 an jeder Seite sich anden. Sie scheinen eine ganz bestimmte Lage zum Auge haben, da sie bei einer Neigung des Kopfes zur Seite e entsprechende Bewegung längs des Umfanges der Tocheibe machen. Sieht man durch eine kleine Oeffnung, reducirt sich die Scheibe wieder auf ein einziges Bild.

Durch Befeuchtung des Auges mit Belladonnaextract d die Pupille erweitert und mehr oder weniger bewegsunfähig gemacht. Nach einer solchen Erweiterung wird Zahl der Bilder bedeutend vermehrt. Volkmann unchied bei einem Versuch dabei 7 bis 8 Bilder neben änder, und 4 in schiefer Richtung über einander, wähd Purkinje in der Höhendimension die Mehrzahl der der sah.

Dafs eine gleiche Vervielfältigung stattfindet, wenn das bjekt dem Auge zu nahe liegt, leugnet Purkinje; Volkann dagegen fand sie für sein Auge sehr deutlich auftend. Dieser erblickte, als er eine vom Tageslicht stark leuchtete Nadel dem Auge näherte, zuerst drei Bilder, n denen das mittlere über die seitlichen hervorragte, und lche sich bei weiterer Näherung wiederum theilten, so s fünf Bilder entstanden, deren Spitzen in einem nach ben convexen Bogen lagen. Ich selbst sah bei Wiederlung dieses Versuchs in ähnlicher Weise 7 deutliche Biler auftreten. Ein glänzender Punkt verhielt sich genau

so e in weiter Entfernung gesehene Flamme. Vervi gung zu naher Objekte wurde auch von s sic ersonen, die ich darauf aufmerksam machte s. Sie entspringt höchst wahrscheinlich aus der tur der Krystalllinse.

Umstand, dafs wir zu ferne Gegenstände d set als zu nahe, liegt in der geringen Verände der Vereinigungsweite der Strahlen, wenn der Lichtp aus der Sehweite ins Unbestimmte fortrückt (indem Einfallsstrahlen schon ir Sehweite nahe parallel si während die Vereinigu te um so bedeutender va je mehr sich der Lichtpunkt dem Auge nähert.

Was den Aplanatism s des Auges betrifft, so derselbe sehr durch die Kleinheit der Pupille, deren Di messer kaum gröfser als 1''' ist, begünstigt. Die Pu welche in der Richtung der Augenaxe liegen, sind d wenn sie nicht zu nahe liegen, abweichungsfrei, und den in der Sehweite vollkommen deutlich gesehen. zur Schwächung der sphärischen Abweichung mitwirl nimmt man die nach dem Mittelpunkt zu gröfser wer Brechkraft der Krystalllinse an; und in der That m die Randstrahlen, weil sie durch schwächer brechende T gehen, eine längere Vereinigungsweite haben, welche deshalb der Vereinigungsweite der Centralstrahlen kommt.

Ist der Winkel, den die Sehrichtung mit der A axe bildet, bedeutend, so wird auch die Undeutlichkei deutend, theils wegen der sphärischen Abweichung, i die Strahlen mehr auf den Rand der Krystalllinse h len, theils weil selbst die von den Centralstrahlen g deten Bilder nicht mehr genau auf die Netzhaut fa wenn auch die Objekte in der Sehweite liegen. V deutlich sehen wir daher nur die in der Mitte des sichtsfeldes befindlichen Gegenstände, und die Undeu keit nimmt nach dessen Rande hin zu. Da ferner die seitlichen Punkten kommenden Lichtkegel wegen der s fen Lage gegen die Pupille dünner sind, so nimmt

h dem Rande hin die Helligkeit ab, und das Gesichts-
l erhält durch das allmälige Uebergehen in das vollkom-
n Dunkle eine unbestimmte Begrenzung.

Diesem Umstande, dafs jeder seitliche Punkt selbst in Sehweite zum Bilde eine Lichtscheibe hat, so wie dem stande, dafs von hinter einander liegenden Punkten nur in der Sehweite befindliche zum Bilde einen Punkt hat, rieb Mile zu, dafs in dem Versuch (p. 222) bei der endung des Auges das Auseinandertreten der anfangs ter einander liegenden Punkte dem Blicke entgeht.

Streng genommen, sehen wir nur in der Richtung der genaxe befindliche Punkte in vollkommnerer Deutlichkeit, d wenn wir ein gröfseres Feld deutlich zu übersehen vermen, so liegt dies an der grofsen Beweglichkeit des Au-s, dessen Axe fast unwillkührlich von einem Punkt zum dern wandert, und an der Dauer des Eindrucks, welchen er kurz zuvor gesehene Punkt unserem Sinne hinterläfst. n überzeugt sich davon, wenn man das eine Auge schliefst, d alsdann das andere fest auf einen bestimmten Punkt htet, indem in diesem Falle alle übrigen Gegenstände im esichtsfelde undeutlich erscheinen. Man unterscheidet auf esen Grund ein direktes Sehen (in der Augenaxe) und n indirektes Sehen (in den übrigen Richtungen).

Merkwürdig ist die scheinbar grofse Empfindlichkeit für htschwache Gegenstände beim indirekten Sehen, deren erschel und South erwähnen. Während man nämlich nen hellen Stern betrachtet, werden oft sehr schwache erne in der Nähe sichtbar, welche man beim direkten hen nicht mehr zu erkennen vermag. Herschel erklärt es dadurch, dafs die durch starkes Licht weniger gehwächten und durch die Anstrengung, welche mit dem rekten Sehen verbunden ist, unangegriffenen Seitentheile r Netzhaut für schwache Eindrücke empfindlicher bleiben. rewster nimmt dabei die Gröfse der durch die sphärihe Aberration entstehenden Lichtscheibe zu Hilfe, insorn dadurch ein gröfserer Theil der Netzhaut afficirt wird.

Was den Achromatismus des Auges betrifft, so ist

derselbe nicht vollkommen, wie sich daraus erkennen dafs eine Lichtlinie, durch eine kleine vor dem Rand Pupille gehaltene Oeffnung betrachtet, farbig gesäum scheint, so wie daraus, dafs dunkle Gegenstände auf h Grunde, wie der Rahmen eines Fensterkreuzes, auf d nen Seite gelb, auf der andern Seite blau gefärbt sich wenn man einen Finger dicht vor dem Auge vorübe wegt, und zwar erscheint der rothe Rand auf der S nach welcher die Beweg— des Fingers gerichtet ist. chromatische Abweichung ist indefs so gering, dafs si Deutlichkeit des Sehens keinen Eintrag thut. Der (matismus wird, was den Ei flufs der Krystalllinse be zum Theil dadurch corrigirt, dafs von den Strahlen, w einen mäfsig grofsen Winkel mit der Augenaxe bilder Natur der Krümmungen der Krystalllinse zufolge die b bareren sich durch die Brechung an deren Vorderfläch Axe mehr zu nähern, dagegen an deren Hinterfläche von der Axe mehr zu entfernen streben, als die m brechbaren.

Der Einfachheit wegen wurde in dem Vorigen die aussetzung gemacht, dafs die Sehweite constant sei. I Wirklichkeit sehen wir zwar einen Gegenstand mit der kommensten Leichtigkeit nur in einer bestimmten, ode nigstens sehr wenig variabeln Entfernung vollkommen lich, allein mit mehr oder weniger Anstrengung läfs derselbe auch in gröfserem und geringerem Abstande dieser normalen Sehweite deutlich erkennen. Jedoc die Veränderlichkeit der Sehweite beschränkt (die in Grenze ist nicht leicht kleiner als 3″), und die Distan kleinsten und gröfsten Sehweite nicht für alle Men dieselbe. Bei den Weitsichtigen (Presbyopen) ist die Grenze weiter hinausgerückt, bei den Kurzsichtigen (pen) die zweite Grenze weiter zurückgerückt. Hier ändert sich auch die mittlere (normale) Sehweite. Ist selbe bei beiden Augen sehr verschieden, so er *Schielen.*

Die jedesmalige Gröfse der Sehweite hängt von der Aufmerksamkeit ab, mit welcher wir unsere Blicke auf einen bestimmten Punkt heften. Die Fähigkeit, durch gespannte Betrachtung eines näheren oder entfernteren Objektes die Sehweite zu verkürzen und zu verlängern, heifst das Einrichtungsvermögen des Auges. Ein solches ist nur möglich durch eine von einer Veränderung des Auges herrührende Aenderung der Strahlenrichtungen, und diese kann wiederum nur ihren Grund haben entweder in einer Veränderung der Hornhautskrümmung, oder in einer Veränderung der Linsenkrümmungen, oder in einer Ortsveränderung der Linse, oder endlich in einer Ortsveränderung der Netzhaut in Bezug auf die übrigen brechenden Theile des Auges, während die einzige sichtbare Veränderung des Auges in einer Erweiterung und Verengerung der Pupille besteht. Die letztere tritt nämlich bei der Betrachtung näherer Gegenstände, bei stärkerem Lichtreiz und bei der Bewegung des Auges ein; eine Erweiterung in den entgegengesetzten Fällen und beim Schliefsen des anderen Auges.

Die Gröfse der Pupille kann aber direkt keinen Einflufs auf die Veränderung der Sehweite haben, da sie nicht auf die Bildweite, sondern nur auf die Gröfse der einfallenden Strahlenkegel wirkt, und wenn auch die Verschmälerung dieser Strahlenkegel die Deutlichkeit vermehrt, so kann doch dadurch nicht der Ort des deutlichsten Sehens verrückt werden. Ueberdies könnte die Bewegung der Pupille nur bei der Betrachtung naher Gegenstände, wo sie sich verengert, nicht bei der Betrachtung ferner Gegenstände, wo sie sich erweitert, nützlich sein.

Auch die von Treviranus gegebene Erklärung genügt nicht, nach welcher der Umstand das allein Wirkende sein soll, dafs je nach der gröfseren oder kleineren Pupillenöffnung die Randstrahlen durch mehr oder weniger starkbrechende Theile der aus Schichten verschiedener Brechungskraft bestehenden Linse gehen; denn auch wenn man durch eine kleine *Oeffnung sieht,* und dadurch die Lichtkegel ver-

schmälert, behält man das Einrichtungsvermögen; und wenn man, wie beim Scheiner'schen Versuch, zwei kleine nahe Oeffnungen gleichsam für die Pupille substituirt, verschiebt sich bei der Betrachtung der beiden sich kreuzenden Bilder eines einfachen Fadens der dünnste Punkt (welcher genau in der Sehweite liegt), je nachdem man einen näheren oder entfernteren Punkt desselben fixirt, ungeachtet die Dimensionen der einfallenden Lichtkegel gleich bleiben.

Was die Mittel betrifft, durch welche die oben erwähnten Veränderungen des Auges erzeugt werden, so schreibt man die Aenderungen der Corneakrümmung und der Lage der Netzhaut den Augenmuskeln zu, welche durch Druck die Augenaxe verlängern, oder durch gleichzeitiges Zusammenziehen verkürzen sollen; die Ortsveränderung der Linse bei unveränderter Augendimension — der Bewegung der Iris, welche eine Bewegung der Ciliarfortsätze und hierdurch eine Bewegung der Linse nach sich ziehe; die etwanige Krümmungsänderung der Linse schreibt man endlich Muskelfasern in derselben zu, deren Anwesenheit indefs bis jetzt nur hypothetisch ist.

Die erste Ursache (welche Rohault, Bayle, Olbers, Home annahmen) würde die Existenz eines unveränderlichen Drehpunktes des Auges verneinen. Wäre nämlich die Lage des Drehpunktes veränderlich, so müfste sich dies durch das Volkmannsche Instrument in dem Versuch (p. 219) erkennen lassen, zumal wenn man mit Young annimmt, dafs eine Veränderung der Augenaxe um $\frac{1}{6}$ ihrer Länge nöthig sei. Das Visir *e* würde nämlich aufhören, in der Mitte der Diopteröffnung *l* zu erscheinen, wenn man mit dem Auge nicht mehr die Visire, sondern den entfernten Hintergrund fixirt. (Siehe Volkmann: *Neue Beiträge zur Physiologie des Gesichtssinnes*, 1836. *p.* 176).

Ueberdies sind weder die weichen Muskeln im Stande, den Augapfel durch seitliche Zusammendrückungen zu verlängern, noch kann man das weiche Fettpolster als hinlänglich widerstehend denken, um bei einer Contraction der *Muskeln* das Auge zu verkürzen, zumal da man nur bei

Betrachtung zu naher Objekte eine innere Anstrengung in der *orbita* fühlt, während doch blofs beim Weitsehen eine Verkürzung der Augenaxe stattfinden dürfte.

Die zweite Ursache einer zur Erklärung des Einrichtungsvermögens dienenden Augenveränderung (von Kepler, Scheiner, Porterfield, Camper etc. angenommen) läfst eine Prüfung theils hinsichtlich des indirekten Einflusses der Pupillenänderung, theils hinsichtlich des direkten Einflusses der Verrückung der Linse zu.

Besteht die Aenderung der Pupille blofs in Erweiterung und Verengerung, und hat eine solche immer dieselbe Wirkung, so mufs auch jeder Umstand, welcher eine Vergröfserung ihres Durchmessers zur Folge hat, die Sehweite verlängern. Nun scheint zwar die natürliche Erweiterung der Pupille in einem gewissen Verhältnifs mit der Entfernung des betrachteten Objekts zu stehen, allein da auch durch Schwächung des ins Auge dringenden Lichtes, so wie durch Belladonnaextrakt eine Erweiterung bedingt wird, so müfste in beiden Fällen die Weite, in welcher man mit der gröfsten Leichtigkeit deutlich sieht, in diesen Fällen zunehmen, während die Erfahrung eher für das Gegentheil spricht.

Auch fand Volkmann seine natürliche Sehweite (9″), für die er bei scharfer Beleuchtung 1‴ als Durchmesser der Pupille angiebt, gar nicht geändert, wenn er durch zwei Oeffnungen sah, die 2‴ von einander entfernt waren, also den Durchmesser der Pupille auf das Doppelte vermehrten, indem er eine Nadel in 9″ Entfernung noch einfach erblickte. Ebensowenig hat die durch Schliefsen des anderen Auges erzeugte Erweiterung der Pupille auf die Sehweite Einflufs.

Auf der anderen Seite dürfte auch eine kleine Verrückung der Linse von geringem Einflufs sein, da ihr Brechungsvermögen zu wenig von dem der übrigen Feuchtigkeiten des Auges abweicht.

Aus demselben Grunde scheint auch der von Volkmann *angeführte Gegenbeweis* minder schlagend, dafs der

Kreuzungspunkt der Sehstrahlen durch eine Verrückung der Linse zu sehr seine Lage ändern würde.

Da nun aus den mit Staaroperirten angestellten Versuchen (also mit Personen, denen die Linse fehlt) hervorgeht, dafs diesen das Einrichtungsvermögen ganz fehlt, oder dasselbe doch sehr beschränkt ist, so ist man berechtigt, der Linse den wesentlichsten Einflufs auf dieses Vermögen zuzutheilen. Da ferner eine Ortsveränderung der Linse unzureichend scheint, so bleibt es späteren Untersuchungen vorbehalten, die noch übrig bleibende (von Hunter, Young, Volkmann etc. angenommene) Erklärung, welche eine Gestaltsveränderung derselben voraussetzt, durch Nachweisung einer selbstständigen Beweglichkeit weiter zu begründen. Als eine Stütze für diese Annahme hat man den Umstand angeführt, dafs auch bei manchen niederen Organismen (bei den Mollusken und Zoophyten), denen Beweglichkeit nicht abgesprochen werden kann, bis jetzt keine Muskelfasern haben nachgewiesen werden können.

Als Gegengründe stellt Treviranus auf, dafs Contraktionen der Muskeln beständig mit Palpitationen ihrer Fasern verbunden sind, dafs dieses Erzittern mit der Dauer der Spannung zunehme, dafs in den Bewegungsorganen der erwähnten Thiere dieses Zucken sehr auffallend sei, und dafs endlich die Linsen durch kein Mittel, welches sonst auf die Muskeln erregend wirkt, wie namentlich durch die Elektricität, afficirbar wäre. Wird daher das Einrichtungsvermögen von einer Contraktilität der Linse bedingt, so mufs man den Fasern derselben eine gewisse Stetigkeit in ihren Bewegungen zuschreiben.

Sehen mit beiden Augen.

In Bezug auf die Oertlichkeit des Gesehenen vereinigen sich die Eindrücke, welche gleichliegende Stellen *)

*) Unter gleichliegenden Stellen sind hier solche zu verstehen, welche *gleiche* Winkel mit den resp. Augenaxen bilden, und in Ebenen liegen, *welche durch* die resp. Augenaxen gehen und einander parallel sind.

der Netzhaut empfangen, zu einem einzigen Eindruck. Da sich nun beim Sehen nach einem Punkt beide Augenaxen auf denselben richten, so erscheint derselbe einfach; dagegen sieht man diejenigen Punkte des Gesichtsfeldes doppelt, deren Richtungslinien verschiedenartige Stellen der Netzhaut treffen. Wegen der geringen Divergenz in der Nähe der Augenaxe und wegen der Undeutlichkeit in den von der Mitte des Gesichtsfeldes entfernteren Stellen, entgeht die Verdoppelung der neben einander gelegenen Punkte der Wahrnehmung. Deutlicher tritt sie hervor bei Punkten, die in gröfserer Entfernung hinter einander liegen. Hält man einen Stab nahe vor die Augen, so dafs man denselben, wenn man auf ihn hinsieht, einfach erblickt, und betrachtet darauf einen sehr entfernten dahinter liegenden Gegenstand, so sieht man zwei weit von einander getrennte Bilder des Stabes.

Ist der entfernte Gegenstand nicht zu breit, so sieht man dagegen, beim Blicken auf den Stab, von jenem zwei deutlich geschiedene Bilder. Sieht man ferner auf einen Gegenstand mit beiden Augen, so dafs man ihn einfach erblickt, so reicht eine durch einen leichten Druck mit dem Finger hervorgebrachte Verrückung der Axe des einen Auges hin, um ihn verdoppelt erscheinen zu lassen.

Was die Doppelbilder betrifft, so gehört das Bild der rechten Seite dem rechten, das der linken dem linken Auge an, wenn die Augenaxen sich hinter dem doppelt erscheinenden Objekt (zwischen Objekt und Auge) kreuzen; das linke Bild gehört dagegen zum rechten und das rechte zum linken Auge, wenn die Axen sich vor dem Objekte kreuzen.

Der Punkt, auf welchen beide Augenaxen gerichtet sind, ist aber nicht der einzig einfach erscheinende. Es giebt eine durch diesen Punkt gehende Fläche, das sogenannte Horopter, zu deren Punkten Richtungslinien gehören, welche gleichliegende Stellen der Netzhaut treffen. Der durch beide Augenaxen gehende Durchschnitt dieser Fläche ist ein Kreis, welcher durch die Kreuzungspunkte der *Richtungslinien* geht.

Sind nämlich (Fig. 86) *a* und *b* die beiden Kreuzungspunkte, *mn'* und *mn''* die Augenaxen, und *n* der einfach gesehene Punkt im Durchschnittspunkte beider, ist endlich *n* ein Punkt des Kreises *mab*, so sind die Winkel *n'an'* und *n''bn''* der Richtungslinien *an* und *bn* mit den resp. Augenaxen, gleich, da $\angle man = \angle mbn$ ist. Da ferner die Bilder auf der Netzhaut *n'* und *n''* in einer Ebene liegen, so befinden sich dieselben in gleichliegenden Punkten.

Heftet man die Aufmerksamkeit auf einen Gegenstand, so kehren sich die Augenaxen einander zu, und convergiren nach dem jedesmal betrachteten Punkt desselben. Verdeckt man vorher das eine Auge, so ist die Richtung der Axe desselben dieselbe, als wäre das Auge unverdeckt geblieben, mit einer geringen Abweichung nach aufsen.

Deckt man daher schnell das Auge auf, so sieht man den Punkt doppelt, und zwar so, dafs das rechte Bild dem linken, das linke dem rechten Auge zugehört, die Axen sich also in einem zu fernen Punkte schneiden. Hiervon abweichend ist J. Müller's Behauptung, dafs das Objekt einfach bleibe, also das geschlossene Auge sich genau nach dem offenen richte, wenn das Objekt in den Grenzen des deutlichen Sehens sich befinde, dafs es dagegen sich in die Richtung stelle, welche der äufsersten Grenze des Deutlich-Sehens angehöre, wenn man auf ein sehr entferntes Objekt, wie auf den Mond, blicke, indem dieser alsdann auf einen Augenblick doppelt erscheine. Von Volkmann ist diese Erscheinung geleugnet.

Mag nun aber das eine oder das andere richtig sein, so bleibt doch ein Zusammenhang zwischen dem Einrichtungsvermögen und der Augenstellung unverkennbar. Sieht man z. B. mit dem einen Auge *A* (Fig. 87) durch zwei Kartenöffnungen auf einen in solcher Entfernung befindlichen Punkt *a*, dafs derselbe einfach erscheint, und lenkt das zweite Auge *B* auf *a*, so bleibt *a* einfach; wendet man nun das Auge *B* nach *b*, so sieht man 3 Bilder, eins in *d* und zwei in *b*; wendet man die Axe *B* nach *c*, so sieht man wiederum 3 Bilder, eins in *e* und zwei in *a*.

In beiden Fällen ist also das Einrichtungsvermögen des Auges *A* thätig gewesen, und dem anderen Auge gefolgt.

Merkwürdig ist das von J. Müller beobachtete Unvermögen, beide Augen für dieselbe Entfernung einzurichten, wenn künstlich eine Verschiedenheit in den Grenzen des deutlichen Sehens für beide Augen hervorgebracht war. Träufelt man nämlich in das eine Auge Belladonnaextrakt, so werden die Grenzen des deutlichen Sehens für das gesunde Auge dem Auge näher gerückt. Man sieht alsdann in der Regel jeden Gegenstand doppelt, indem das gesunde Auge undeutlich sieht, wenn man das kranke Auge einrichtet, und umgekehrt das kranke Auge undeutlich sieht, wenn man das gesunde einrichtet, obwohl jedes Auge für sich im Stande ist, dies Objekt deutlich zu sehen.

---

2) *Innerer Zusammenhang des Netzhautbildes mit dem Gesehenen.*

Das Bedingende bei den Vorstellungen, welche wir durch die Sinne von der Aufsenwelt erhalten, ist der Reihefolge nach 1) die Fähigkeit der Aufsendinge, den Zustand der Sinnesnerven zu verändern, sei es unmittelbar oder durch ein vermittelndes Medium, wie nach den jetzigen Vorstellungen bei der Empfindung des Lichtes, der strahlenden Wärme, des Tones; 2) die Fähigkeit der Sinnesnerven, ihren Zustand durch die Einwirkung der Aufsendinge zu verändern, und ihre Fähigkeit, in Folge dieser Veränderung das Empfindungsvermögen anzuregen, und zwar entweder unmittelbar, oder mittelbar dadurch, dafs sie zuvor die empfangenen Eindrücke zu ihrem Ursprunge, dem Gehirn, leiten. 3) die Seelenthätigkeit, die Empfindung zur Vorstellung zu erheben, und diese durch Verknüpfung mit anderen Vorstellungen zu vervollständigen.

Das Wesen der hierbei wirkenden Kräfte, die Art, wie die eine Thätigkeit auf die andere einwirkt, und ob

unter den resultirenden Vorstellungen absolut richtige sind, wird uns wohl immer ein Geheimnifs bleiben. Es bleibt daher für uns nur übrig, die Abhängigkeit jener Thätigkeiten von einander, und ihre Funktionen näher zu untersuchen.

Was sich uns zuerst herausstellt, ist die Vermittlung der Verbindung unseres Ichs mit der Aufsenwelt durch die Nerven. Das Empfundene ist demnach zunächst nicht die Wirkung der Aufsenwelt selbst, sondern die Wirkung des durch sie erregten Nervenzustandes. Unsere Empfindung wird also nicht unmittelbar erregt von den Objekten, wenn wir dieselben sehen, hören, betasten, sondern von dem durch sie vermöge ihrer Eigenschaften erregten Nervenzustande. Erst durch die Seelenthätigkeit werden wir uns des Daseins eines wirkenden Körpers bewufst, und kommen zu Vorstellungen von diesem Körper, die eben deshalb nicht nothwendig richtige zu sein brauchen, die wir aber in Verbindung setzen mit anderen durch denselben Sinn oder durch andere Sinne erweckten Vorstellungen, und die wir für richtig halten, sobald diese Vorstellungen unter sich in Einklang treten.

Die erste Frage ist, ob der Zustand der Sinnesnerven unmittelbar zur Empfindung führt, oder ob dieselben erst den Eindruck zum Gehirn leiten, und die Erregung des letzteren erst empfunden wird, oder ob die Nervenenden und das Gehirn zugleich Theil an der Empfindungs-Erweckung haben.

Sollen die Nerven nur Leiter des Eindrucks zum Gehirn sein, so scheint es nöthig anzunehmen, dafs jedes Nervenfaserende nur einen einfachen Eindruck *) aufzunehmen fähig sei, und dafs die Faser gesondert zum Gehirn führe.

Was den unverzweigten Lauf der Nervenfaser vom Gehirn bis zur Papille betrifft, so ist derselbe bis jetzt

---

*) Unter einfachem Eindruck ist beim Gesicht der Eindruck zu verstehen, welchen ein einzelner gesehener Objektspunkt in dem Orte seines Netzhautbildes macht.

och nicht nachgewiesen. Findet ein solcher statt, so üfste man annehmen: 1) wegen der unverhältnifsmäfsigen leinheit des Durchmessers des Sehnerven bei seinem Einitt in das Auge in Vergleich mit der grofsen Ausbreitung er Netzhaut, „dafs jede Faser im Sehnerven aus sehr vien feinen Fäserchen zusammengesetzt ist.“ Man könnte ch hierbei überdies darauf berufen, dafs die Eindrücke af den Seitentheilen der Netzhaut undeutlicher, und daer die Papillen in diesen Theilen wahrscheinlich sparsaer sind. 2) „dafs jede Papille einer eigenen Netzhautser entspreche,“ wie es Treviranus zu sehen meinte, as aber von Joh. Müller noch nicht für ausgemacht gealten wird.

Um zu beurtheilen, ob die zweite Annahme statthaft i, nämlich ob jede Papille nur einen einfachen Eindruck fassen vermöge, müfste man die Gröfse des kleinsten npfindbaren Netzhautbildes und die kleinste Entfernung veier gesondert empfundener Netzhautbilder mit der Gröfse ad Distanz der Papillen vergleichen.

Soll ein Punkt uns sichtbar sein, so müssen von ihm is eine hinreichende Menge hinreichend intensiver Strahn ins Auge dringen. Die Menge der Strahlen hängt nun) von der Gröfse des Sehwinkels ab, d. h. von dem Vinkel, welchen die zu den äufsersten Enden des als Punkt esehenen Gegenstandes gehörigen Richtungslinien bilden,) von der Dichte und Intensität der von dem Objekt aushenden Strahlen. Da nun leuchtende Körper dichtere nd intensivere Strahlen auszusenden pflegen, so werden ieselben unter einem kleineren Sehwinkel sichtbar sein, ls beleuchtete; und in der That sieht man leuchtende Körer noch unter einem Sehwinkel, welcher kleiner als eine ekunde ist, während man für ein mäfsig stark erleuchtes Objekt den kleinsten Sehwinkel zu 30″ anzunehmen flegt. Nimmt man mit Volkmann die Entfernung des reuzungspunktes von der Hornhaut zu 0,466″, und demach dessen Entfernung von der Netzhaut zu 0,353″, so ist er entsprechende Durchmesser des Netzhautbildes, welcher

zu einem Sehwinkel von 30 Sekunden gehört, und welchen man als Maafs der kleinsten empfindbaren Netzhautstelle genommen hat, 0,00060″. Volkmann hält dieses Maafs für zu grofs, da ein nur mittelmäfsiges Auge noch ein Haar von 0,002″ Dicke in 30″ Entfernung zu erkennen im Stande sei, wonach der Durchmesser des Bildes 0,000023″ werden würde. Er selbst erkannte in 15″ Entfernung einen Spinnenfaden von 0,00011″ Dicke, dessen Bild daher nur 0,0000025″ Breite haben müfste, vorausgesetzt, dafs durchaus keine sphärische Abweichung stattfindet.

Merkwürdig ist die Beobachtung Ehrenberg's (Pogg. Ann. XXIV, p. 35), dafs die Grenze des Sehens mehr von der absoluten Gröfse des Objekts, als von dem Sehwinkel abhängt. Derselbe fand nämlich, dafs nur mit seltneren Ausnahmen ein weifses Quadrat auf schwarzem Grunde, so wie ein schwarzes Quadrat auf weifsem Grunde, eben noch für jedes Auge, es mag kurz- oder weit-sichtig sein, erkennbar ist, wenn dessen Seite $\frac{1}{36}$″ sei, und dafs bei gröfster Lichtcondensirung und bei gröfster Spannung der Aufmerksamkeit nur ein Quadrat von $\frac{1}{48}$″, aber ohne Schärfe, sichtbar sei. Bei weitem anders fand er die Grenze der Sichtbarkeit für Objekte, die in der Linearrichtung ausgedehnt sind, indem er gegen das Licht gehaltene undurchsichtige Fäden noch als erkennbar angiebt, wenn deren Dicke $\frac{1}{400}$″ ist. Legt man nun Ehrenberg's Aussage zum Grunde, dafs die Scharfsichtigsten das Objekt nie weiter als 6″, Kurzsichtige selten näher als 3″ halten mufsten, um es zu erkennen, so ergiebt sich als Ausdehnung des Netzhautbildes eines Quadrats: 0,00013″ bis 0,00023″, und als Ausdehnung des Bildes eines Fadens 0,000011″ bis 0,000028″.

Um die kleinste Entfernung zweier noch eben unterscheidbaren Netzhautbilder zu bestimmen, spannte Volkmann zwei 0,00020″ dicke und 0,0052″ von einander entfernte Spinnenfäden auf, und mafs die Entfernung, bei welcher beide anfingen getrennt zu erscheinen. Für sein Auge ergab sich als Entfernung der Bilder auf der Netzhaut 0,00025″, für zwei andere Personen 0,00014″, und für eine vierte

Per-

Person 0,00016″. Der Grund dafür, dafs diese Entfernungen bedeutend gröfser sind, als die Ausdehnung des oben angenommenen kleinsten Bilddurchmessers, könnte das nicht genaue Eintreffen des Brennpunktes auf der Netzhaut, die Aberration, und der Umstand sein, dafs wahrscheinlich der Reiz im Brennpunkte über die umliegenden Theile der Netzhaut fortgepflanzt wird.

Nun schliefst Volkmann aus dem Mifsverhältnifs der Gröfse des kleinsten Netzhautbildes und des Papillendurchmessers (der nach Treviranus etwa zwischen 0,00010″ und 0,00015″ liegt), dafs die Aufnahme eines Einzel-Eindruckes durch eine Papille unmöglich sei; doch ist eines Theils die Berechnung der Gröfse des kleinsten Bildes nur unter der Voraussetzung richtig, dafs der Focus genau auf die Netzhaut falle, und das Bild sich nicht durch Irritation und Aberration vergröfsere; andern Theils kommt es hier mehr auf die kleinste bemerkbare Entfernung an, und diese läfst sich wohl mit der Leitungsfunktion der Papillen vereinigen, wenn man die letzteren als sich einander berührend, wenigstens in der Gegend der Augenaxe, annimmt. Da nun die Entfernung der Papillen durch die Erfahrung zu bestimmen nicht wohl möglich ist, so läfst sich nichts Positives darüber behaupten; und es lassen sich daher wenigstens keine widersprechende Thatsachen gegen die oben supponirte Funktion der Papillen nachweisen. Für dieselbe spricht noch das von Lincke (*de fungo medullari. Lips.* 1834) erzählte Faktum, dafs ein Kranker einen Tag nach der Exstirpation eines seiner Augen mehrere Tage hindurch bei geschlossenem gesunden Auge vor der leeren Augenhöhle Lichter, Feuerkreise, tanzende Menschen und andere Bilder umherschweifen sah, obgleich dies nicht geradezu eine selbständige Thätigkeit der Sinnesnerven bei der Empfindung ausschliefst.

Lassen wir also unentschieden, welche Theile des Nervensystems das Empfindende in uns erregen, und betrachten wir weiter das Verhältnifs dessen, was empfunden wird, zur Vorstellung, *welche wir* mit der Empfindung verbinden.

Müller sagt in seiner Physiologie, das Empfundene sei der Nervenzustand, und an einer anderen Stelle, die Sinnesempfindung sei die Leitung einer Qualität, eines Zustandes eines Sinnesnerven zum Bewufstsein.

Mag man auch die erste Erregung der Sinnesthätigkeit durch den Nervenzustand Empfindung nennen, und sonach diesen Zustand das Objekt der Empfindung, und dehnt man auch den Akt der Empfindung auf die Leitung zum Bewufstsein aus, so hat man sich unter dem Geleiteten doch nicht den sinnlichen Zustand, sondern die nächste, nicht sinnliche Wirkung des sinnlichen Zustandes zu denken. Nennen wir lieber diese ebengenannte Wirkung, also den Ausdruck unseres Zustandes in der Seele, die Empfindung, so ist das, was durch sie im Bewufstsein gesetzt wird, nicht das äufsere erregende Ding, nicht das Gefühl der etwaigen vibrirenden Nervenbewegung, sondern ein von dem äufseren Dinge ausgegangenes, durch den Nervenzustand übertragenes Zeichen, welches das durch sie erregte Denken erst zu deuten hat.

An jede Empfindung schliefst sich als etwas Nothwendiges der Gedanke an ein derselben zum Grunde Liegendes an. Wir beziehen die Emfindung auf ein Empfundenes (ein Nichtich) und auf ein Empfindendes (das Ich). Bald herrscht dabei das sich Bewufstwerden des Ich vor, wie bei der Kälte-, Wärme-, Schmerz-Empfindung, bald das des Nichtichs, wie bei der Licht-, Ton-, Tast-Empfindung.

Diese Beziehung, in welcher das erste Auffassen des von der Empfindung Dargebotenen durch den Verstand noch mit der Empfindung innig verbunden ist, nennen wir Wahrnehmung. Das in der Wahrnehmung Erkannte ist aber nicht das Ich oder Nichtich selbst, sondern etwas an ihnen. Beim Sehen nehmen wir nicht die Dinge, sondern nur die Gestalt, die Farbe an ihnen wahr, aber es wird in uns dadurch der Gedanke an ein Substrat, an einen Träger der Gestalt, der Farbe rege, und wir machen uns in Folge dessen eine Vorstellung, ein Bild von dem Substrat. Das Vor-

gestellte sind also wieder nicht die Dinge selbst, sondern Bilder von den Dingen.

Die Beziehung auf ein Nichtich, d. h. das Aufsersichsetzen des Gesehenen, ist nicht von Allen für etwas durch eine innere Nothwendigkeit Hervorgerufenes angesehen worden. Müller hält dasselbe für etwas nicht der Sphäre der Sinnlichkeit Angehörendes, für etwas durch Uebung Erlerntes; Tortual, Volkmann, Bartels halten es dagegen für einen Akt der Sinnenthätigkeit. Volkmann bekämpft die erste Ansicht, scheint aber unter dem Ich nicht ganz das selbe zu verstehen, wie Müller. Dieser unterscheidet dabei das empfindende Ich von unserem Körperlichen, und leugnet keinesweges eine angeborene Unterscheidungsfähigkeit des empfindenden Ich von dem Empfundenen, sondern nur das Angeborensein des Unterscheidens der eigenen Körpertheile von den übrigen Gesichtsobjekten, so dafs beide Ansichten nur in der letzten Rücksicht von einander abweichen.

Eine Zwischenstufe zwischen dem Gefühl des Erregtseins und dem Sichbewufstwerden einer äufseren Ursache der inneren Empfindung ist nicht nachweisbar; ja, dafs sich das Thier so bald nach der Geburt zur Zitze der Mutter hinwendet, läfst sich nur als ein ohne vorhergegangene Uebung gewonnenes Bewufstsein eines Aeufseren deuten.

Ob das neugeborene Kind beim ersten Oeffnen des Auges schon die gesehenen eigenen Körpertheile von dem Aeufseren unterscheiden könne, ist hiervon ganz unabhängig und läfst sich weder bejahen noch verneinen; doch ist kein Grund vorhanden, warum die Körpertheile als Gesichtsobjekte vor den übrigen Aufsendingen einen Vorzug haben sollen. Das stets im Sehfelde Seiende und willkürlich Bewegbare, das Gefühlseindrücke Aufnehmende mufs sich jedoch natürlich bald als etwas von dem Uebrigen Verschiedenes uns darstellen.

Ort des Gesehenen. Der Bildpunkt auf der Netzhaut, von dem Niemand beim Sehen etwas weifs, ist die Ursache des *Bewufstseins* eines Punktes aufser uns. Welche

Stelle weisen wir ihm aber an, und warum weisen wir ihn an diese Stelle? Da die Netzhauterregung die Bedingung des Sehens ist, so mufs die Ortsanweisung von der Art der Erregung abhängen, und wir müssen, der Wellentheorie nach, die Schwingungsrichtung des Aethers, und die dadurch hervorgebrachte Art der Reizung des Nerven als Ursache annehmen. Wie diese Ursache die Wirkung haben könne, den Punkt in die Richtungslinie zu versetzen, gehört zum Unerforschlichen. Sagen wir, es geschieht durch die Sehrichtungskraft der Nerven, so haben wir einen Namen, wie für die Ursache des Fallens der Körper den Namen Gravitation, ohne uns über das Wesen der Kraft Rechenschaft geben zu können.

Die Sehrichtung ist aber erwiesenermafsen nicht, wie Brewster behauptete, die Normale der Netzhaut.

Mit Volkmann eine angeborene Beziehung auf den Kreuzungspunkt der Richtungslinien anzunehmen, ist gewagt, da sich ein natürlicher Zusammenhang zwischen diesem Punkte und den erregten Nervenstellen nicht leicht denken läfst.

Auch der Quelle des Tons setzen wir durch eine uns inwohnende Kraft in Folge der Richtung der die Gehörsnerven reizenden Luftschwingungen in eine, wenngleich viel unbestimmtere Richtung nach Aufsen. Das Undeutlichere der Gehörsrichtung liegt vielleicht daran, dafs die direkten Schwingungen zu sehr gestört werden durch die im Gehörgange reflektirten Schwingungen, und dafs auch einzelne Wellensysteme vernehmbar sind, während beim Licht nur die durch die Linse concentrirten Schwingungen wahrnehmbar werden, und nur da die Lichtempfindung erregen, wo sie alle nahe dieselbe Richtung erhalten. Hätte das Ohr einen der Linse analogen Apparat, so würde vielleicht die Gehörsrichtung so genau wie die Sehrichtung sein.

Gröfse und Entfernung des Gesehenen. Die Bestimmtheit der Sehrichtung macht ein Sehen des Nebeneinander möglich. Durch das Sehen zwei neben einander befindlicher Punkte in den ihnen von der inneren Ki

angewiesenen Richtungen ist zugleich ihre scheinbare Entfernung von einander gegeben, welche dem Sehwinkel proportional ist, und deshalb durch diesen gemessen wird. Sind die beiden Punkte äufserste entgegengesetzte Punkte eines Gegenstandes, so nennt man jene Entfernung die scheinbare Gröfse desselben. Wir sehen daher alle Gegenstände gleich grofs, welche gleiche Sehwinkel haben, und dasselbe Objekt erscheint uns um ebensoviel Mal gröfser, als es uns näher ist *).

Da die wahre Gröfse eines Objektes nur seine Relation zu einer gegebenen Einheit ist, und der Sinn uns nicht unmittelbar Aufschlufs über seine Entfernung von uns giebt, so können wir nur ein Urtheil über die wahre Gröfse erhalten, wenn wir zugleich in derselben Entfernung den Maafsstab, z. B. ein Objekt von bekannter Gröfse sehen. Haben wir auf irgend eine Weise ein Urtheil über die Entfernung von uns gewonnen, so läfst sich auch durch Uebung die wahre Gröfse schätzen.

Dafs die Entfernung eines gesehenen Punktes von uns rein Sache des Urtheils ist, erhellt unter andern aus der

---

*) Die Volkmann'sche Erklärung, dafs man zum Bewufstsein der scheinbaren Gröfse durch das Bewufstsein der gröfseren oder geringeren Menge der zwischen den Endpunkten des Bildes befindlichen empfindbaren Netzhautpunkte geführt werde, scheint etwas künstlich, zumal bei der wegen ihrer Kleinheit schwer vergleichbaren Distanz zweier benachbarten Netzhautpunkte. Wenn wir auch nach E. H. Weber's Untersuchungen an verschiedenen Körpertheilen verschieden (auf dem Rücken z. B. 2 Zoll) entfernte Punkte als Eins fühlen, so scheint mir daraus nicht mit Nothwendigkeit zu folgen, dafs wir die Entfernung zweier als doppelt gefühlten Punkte nach der Zahl der zwischen ihnen liegenden, als getrennt empfindbaren Punkte schätzen. Wir erkennen sehr gut, wenn auch mehr oder minder unbestimmt, den Ort eines gefühlten Punktes; die Oerter zweier als verschieden gefühlten Punkte sind also unmittelbar gegeben, und man hat daher einen Stützpunkt beim Urtheil über ihre Entfernung. Warum sollten wir also noch eine complicirte Operation durch Hinzuziehung nicht gefühlter Punkte hinzunehmen? Wenn zwei nahe gelegene (aber noch als zwei gefühlte) Punkte uns an einem Körpertheil einander näher, als an einem anderen vorkommen, so mag dies von der Ausdehnung des Gefühls über die beiden ganzen empfindbaren Stellen herrühren.

Vorstellung Unterrichteter von der Entfernung der Himmelskörper, so wie aus der Darstellbarkeit von Landschaften durch die Malerei.

Zur Beurtheilung der Entfernung dient bei bekannter Gröfse des Gegenstandes die Gröfse des Sehwinkels, unter welchem er erscheint, oder die aus dem Sehwinkel anderer bekannter Gegenstände, die wir in seiner Nähe wissen, geschlossene Entfernung.

Ein ungefähres Schätzen beruht, namentlich für sehr entfernte Objekte, auf der gröfseren oder geringeren Schärfe der Umrisse, da uns dieselben um so undeutlicher werden, je entfernter sie sind; und auf dem Grade der Helligkeit, wenn wir dieselbe mit der Helligkeit naher Objekte vergleichen, insofern mit der Entfernung die Zahl der Strahlen abnimmt, welche von einem Punkt aus ins Auge gelangen.

Die Bewegung eines Körpers erkennen wir entweder aus der Bewegung des Auges, wenn wir dasselbe so wenden, dafs das Bild immer an derselben Stelle der Netzhaut bleibt, oder aus der Bewegung des Bildes auf der Netzhaut bei ruhendem Auge.

Da derselbe Effekt hervorgebracht wird, wenn wir uns bewegen und das Objekt ruht, so kann man willkürlich die eine Vorstellung in die andere umsetzen. Sehen wir von einer Brücke herab auf den darunter fliefsenden Strom, so ist es nicht schwer, die Vorstellung zu erregen, als ob wir uns mit der Brücke bewegen und das Wasser still stehe, und wenn wir auf einem Strome fahren, die Vorstellung, als ob nicht der Kahn, sondern das Ufer sich bewege.

Aufrechtsehen. Dafs wir die Gegenstände aufrecht sehen, ist eine nothwendige Folge des Sehens in der Direktion der Richtungslinie. Selbst wenn wir das Netzhautbild selber empfänden, so könnte das Verkehrtsehen, wie J. Müller sehr klar in seiner *Physiologie* Bd. II, p. 357 auseinandergesetzt hat, nicht zum Bewufstsein kommen. Denn ein Widerspruch mit etwas Gesehenem könnte dadurch nicht eintreten, weil wir Alles durch die Netzhaut

sehen, und im Netzhautbilde Alles dieselbe relative Lage hat, wie im Sehfelde. Nur wenn wir das Netzhautbild mit dem Sehfelde zugleich sehen könnten, würden wir inne werden, dafs die Netzhaut etwas anderes oben nennt, als das Sehfeld. Die verkehrte Lage der Netzhautbilder liefse sich dann sehr gut mit dem scheinbaren Widerspruche dessen, was wir und die Gegenfüfsler oben und unten nennen, vergleichen. Ebensowenig würde ein Widerspruch mit dem Getast offenbar werden, weil wir die tastende Hand selbst verkehrt sehen.

Einfachsehen. Dafs wir diejenigen Punkte einfach sehen, deren Bilder auf gleichliegende Punkte der Netzhaut fallen, ist ein noch ungelöstes Räthsel. Rohault nahm an, dafs die zu gleichliegenden Punkten gehörigen Nervenfasern sich im Gehirn in demselben Punkte vereinigen; Wollaston suchte den Grund in der partiellen Kreuzung der Nervenfasern im Chiasma, und leitete daraus das sogenannte Halbsehen ab, welches darin besteht, dafs von betrachteten Gegenständen nur die eine Hälfte gesehen wird, indem er annahm, dafs der Hirntheil eines Nerven, welcher sich im Chiasma theilt, unthätig wird (Pogg. Ann. II, p. 281).

Beachtenswerth ist noch die Müller'sche Ansicht, nach welcher das Sehen in einer bestimmten Richtung nichts anderes ist, als die empfundene Beziehung des afficirten Netzhauttheilchens zur ganzen Netzhaut, d. h. seiner Lage zu der Lage des Mittelpunktes der Netzhaut. Bei dem Akt des Sehens mufs man hierbei ein solches Projiciren nach Aufsen (auf das Sehfeld) eintreten denken, dafs in der Projektion die einzelnen Punkte dieselbe relative Lage behalten, welche die Bildpunkte auf der Netzhaut haben. Wäre nun die Art der Projektion, d. h. die Divergenz der projicirenden Richtungen für jedes Individuum eine eigenthümliche, so reichte die Erklärung aus, denn zur Wahrnehmung der Form eines Objektes genügt die Kenntnifs der gegenseitigen Lage seiner Punkte; ist die Divergenz aber für jeden Menschen dieselbe, wie die Erfahrung bei der Messung der *Sehwinkel* beweist, so fehlt die Erklärung des

Gesetzes der Projektion, d. h. die Erklärung des Gesetzes der Sehrichtung. Was die scheinbare Gröfse betrifft, so adoptirt Müller die Volkmann'sche Ansicht vom Zählen der empfindbaren Netzhautpunkte. Soll aber die scheinbare Gröfse sich nicht mit dem Orte auf dem Sehfelde ändern, so müfsten die empfindbaren Nervenpunkte überall auf der Netzhaut dieselbe Entfernung von einander haben, unter günstigen Umständen müfste man also auch in den seitlichen Theilen des Gesichtsfeldes scharf sehen können, oder man müfste den verschiedenen Papillen eine quantitativ verschiedene Empfindlichkeit zuschreiben.

Müller leugnet die Vereinbarkeit des Einfachsehens homologer Netzhautpunkte mit der Annahme vom Sehen in bestimmten Richtungen, insofern die den beiden Augen correspondirenden Richtungslinien nur einen Punkt mit einander gemein haben, und deshalb nur dann einfaches Sehen eintreten könne, wenn man das Objekt in den Durchschnittspunkt setze, während doch die Entfernung vom Auge nicht durch den Sinn gegeben sei. Dies wäre ganz richtig, wenn man das Sehen in bestimmter Richtung als Ursache oder Mitursache des Einfachsehens betrachten müfste. Das Zusammenfliefsen der Empfindung zweier Bilder zu einer einzigen beruht aber offenbar auf etwas Innerem, von der Oertlichkeit auf der Netzhaut Abhängigem, und nur insofern mit der Sehrichtung Zusammenhängendem, als eine Kreuzung derselben nothwendiges Bedingnifs der Einheit des Objektes ist. Dafs wir daher bei der Thätigkeit beider Augen das Objekt in den Durchschnittspunkt der Richtungslinien versetzen, ist erst eine Folge des Einfachsehens.

Empfindung der Farben äufserer Gegenstände.

Im Vorigen wurde blofs von der Oertlichkeit des Gesehenen gesprochen; die sichtbaren Punkte unterscheiden sich aber nicht blofs durch ihre Lage, sondern auch durch das Qualitative des Eindrucks, nämlich durch die gröfsere oder geringere Helligkeit, und durch die Farbe. Jene hängt

von der Gröfse der die Empfindung erregenden Aetherschwingungen, also von der Gröfse des Nervenreizes ab, diese von der Schwingungszahl, also von der Art des Reizes.

Es frägt sich nun, ob der Aether durch das Licht in langsamere und schnellere Schwingungen versetzbar sei, als die dem äufsersten Roth und dem äufsersten Violett des Spektrums zukommenden, und ob also das Auge nur unempfindlich für langsamere und schnellere Schwingungen sei, oder ob die Vibrationsgeschwindigkeit von so bestimmten Grenzen eingeschlossen sei, wie es die Beschränktheit des Farbenspektrums glauben macht.

Für das erste spricht die in der Natur überall waltende Stetigkeit. Doch darf die Thatsache, dafs noch aufserhalb des Farbenspektrums Wirkungen auftreten, die mit den Lichtwirkungen in Zusammenhang zu stehen scheinen, nicht für einen Beweis dafür angesehen werden. Die erwähnten Wirkungen sind theils chemische Veränderungen, theils Wärmeentwickelung. Denkt man sich dieselben gleichfalls durch Undulationen, sei es des Aethers oder eines anderen Mediums, hervorgerufen, so läfst sich das Verhältnifs derselben zu den das Farbenspektrum erzeugenden Lichtschwingungen vergleichen mit dem Verhältnifs der Lichtschwingungen im gewöhnlichen Spektrum eines doppelbrechenden Prismas zu denen im ungewöhnlichen Spektrum. Es weichen nämlich die chemischen und die Wärmespektra nicht nur je nach der brechenden Substanz verschieden von dem Farbenspektrum dem Orte nach ab, sondern es sind auch, wie es wenigstens für die Wärme erwiesen ist, die Absorptionsverhältnisse anders, so dafs die Dicke des Prismas mit einwirkt.

Was die chemischen Wirkungen betrifft, so sind dieselben oft gerade aufserhalb des Farbenspektrums am stärksten, namentlich wird das gegen die Einwirkung der Sonnenstrahlen sehr empfindliche Chlorsilber aufserhalb des Violett meist am schnellsten geschwärzt. Die Abnahme der chemischen Wirkung giebt sich durch die Färbung zu erkennen. So wird nach Seebeck's Versuchen das letzt-

genannte Salz im Violett röthlich-braun, im Blau blau oder bläulichgrau, im Gelb weifs oder gelblichweifs, in und aufser dem Roth dagegen Roth. Nach Hefsler hängt die Schnelligkeit mit der das Chlorsilber geschwärzt wird, und die Lage des Maximums der Wirkung von der Substanz des Prismas ab. Beim Wasser und Weingeist erfolgte die Wirkung fast momentan, beim Terpenthin- und Cassiaöl in 12—13 Minuten, beim Flintglas in 2,3 Minuten, beim Kronglas in 1,5 Minuten. Das Maximum lag beim Spektrum des Weingeistes im Violett nahe am Blau, bei dem des Wassers mitten im Violett, bei dem des Cassiaöls 23''' aufserhalb des violetten Randes. Jenes deutet auf Absorptionsverschiedenheiten, dies auf Brechungsverschiedenheiten.

In Bezug auf die Wärmewirkungen entdeckte Herschel, dafs dieselben aufserhalb des Roth oft stärker sind als im Farbenspektrum selbst, und dafs die Wärme vom Violett zum Roth zunimmt. Engelfield fand bei einem Versuche die Temperatur im Blau zu 56°, im Grün zu 58°, im Gelb zu 62°, im Roth zu 72°, aufserhalb des Roth zu 79°. Seebeck entdeckte, dafs der Ort der gröfsten Wärme mit der Substanz des Prismas sich ändere. Für Wasser fand er ihn im Gelb (wo er sich auch nach Wünsch im Alkohol und Terpenthinöl befindet), für concentrirte Schwefelsäure, Salmiakauflösung und Aetzsublimat im Orange, für Kronglas und weifses Glas in der Mitte des Roth, für Flintglas jenseit des Roth. Endlich entdeckte Melloni den Einflufs der Dicke des Prismas. Bei einem Prisma von Steinsalz, welche Substanz auch nach seinen anderweitigen Untersuchungen in Bezug auf strahlende Wärme gleichmäfsig absorbirend wirkt, blieb das Maximum der Wärme in einem bestimmten Abstande vom Roth aufserhalb des Farbenspektrums, das Licht mochte auf die Kante oder auf die Basis des Prismas geleitet werden. Bei einem Prisma von gewöhnlichem Glase befand sich das Maximum aufserhalb des Roth, wenn das Licht auf die Kante fiel, dagegen in dem Roth, wenn es auf die Basis fiel, und an einem mittleren Ort, wenn es auf die ganze Fläche des Prismas fiel.

Bei einem mit Wasser gefüllten hohlen Glasprisma lag das Maximum bei auf die Kante fallendem Lichte im Orange zur Seite des Roth, bei auf die Basis fallendem Lichte im Gelb zur Seite des Grün.

Es kann demnach zur Zeit noch durch keine Thatsachen über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von Grenzen der Schwingungsverhältnisse entschieden werden. Für die analogen tonerzeugenden Luftschwingungen ist bisher noch keine Grenze aufgefunden, weder in Bezug auf das Mechanische der Schwingung, noch in Bezug auf die Empfindlichkeit der Gehörnerven. Dafs aber der Intervall zwischen den langsamsten und schnellsten empfindbaren Lichtschwingungen so klein gegen den der Erfahrung nach noch unbegrenzten Intervall im Bereiche des Tons ist, giebt noch keinen Grund ab, die Theorie zu verdächtigen; wenigstens ist es recht gut denkbar, dafs bei zu schnell auf einander folgenden Reizungen die Nerven nicht mehr zu reagiren vermögen. Wo die Grenze der Geschwindigkeit der Aufeinanderfolge ist, würde dann von der Natur der Empfindungsnerven abhängen.

Aehnlichkeit der Farben, wie die Aehnlichkeit der sich um eine Octave unterscheidenden Töne, können nicht vorkommen, wenn nicht das Bedingende derselben, eine Vervielfachung der Schwingungszahl innerhalb der Grenzen des Empfindbaren eintritt. Der Intervall zwischen den wahrnehmbaren Farben entspricht etwa einer Sexte. Könnten wir eine Farbe wahrnehmen, welche eine doppelt so grofse Schwingungsgeschwindigkeit hätte, als das Roth, wer weifs, ob die Farbe nicht eine grofse Uebereinstimmung mit dem Roth zeigen würde, und sollte nicht der dem Violett eigene Stich ins Rothe auf den Anfang einer Octavfarbe hindeuten? Der Intervall zwischen den Complementarfarben, deren Zusammenstellung uns angenehm afficirt, entspricht der grofsen Terz, und der Intervall zwischen dem mittleren Roth und dem mittleren (Roth enthaltenden) Violett ist eine Quinte. Es scheint also auch beim Licht ein Zusammenhang *zwischen der* Farbenempfindung und einer ein-

fachen Proportionalität der Schwingungen, wie beim Ton vorhanden zu sein.

Die Unvollkommenheit der Farbenempfindung einzelner Personen, welche eine Farbenverwechselung zur Folge hat, findet ihr Analogon in dem zuweilen vorkommenden Unvermögen, gewisse Töne zu unterscheiden. Die schon vorgekommene vollkommene Unempfindlichkeit für einzelne Farben, welcher nach den jetzigen Erfahrungen nichts beim Gehörsinn entspricht, liegt vielleicht in einer Absorption der Augenmedia.

Die vollständigsten Untersuchungen über individuelle Mangelhaftigkeit in der Farbenerkennung sind von Seebeck angestellt *). Da solche Personen, welche die Farben nicht richtig zu unterscheiden vermögen, auch die Namen der Farben unrichtig zu gebrauchen pflegen, so bediente sich Seebeck verschieden gefärbter Papiere (er hatte sich zu diesem Zweck 300 Proben verschafft), und gab sie den zu prüfenden Personen, um sie nach ihrer Aehnlichkeit zu ordnen; alsdann liefs er dieselben die Pigmente durch gefärbte Gläser betrachten, welche im Allgemeinen zu einer besseren Unterscheidung der Farben führten. Zur Vergleichung verschiedener Personen legte er überdies die von der einen geordneten Papierproben den anderen Personen vor, um das darin abzuändern, was sie nach ihrem Urtheil für nöthig fanden. Endlich liefs er sich die Farben des prismatischen Spektrums nennen, den Umfang des letzteren bestimmen, und legte ihnen die im polarisirten Licht erscheinenden Interferenzfiguren vor, um sich die Folge der ihrer Zusammensetzung nach genauer bekannten Farben in denselben angeben zu lassen. Die Beobachtungen an 12 Personen gaben ihm deutlich zu erkennen, dafs sie sich der Art der Farbenverwechselung nach in zwei von einander völlig geschiedene Klassen theilten.

Die Farben, welche die erste Klasse mehr oder weniger mit einander verwechselt, sind folgende:

---

*) Pogg. Ann. XLII, p. 177.

Helles Orange mit reinem Gelb.
Gesättigtes Orange, helles Gelblichgrün oder Bräunlichgrün mit Gelbbraun.
Reines Hellgrün, Graubraun mit Fleischfarbe.
Rosenroth, Bläulichgrün mit Grau.
Carmoisin, Dunkelgrün mit Haarbraun.
Bläulichgrün mit unreinem Violett.
Lila mit Blaugrau.
Himmelblau, Graublau mit Graulila.

Diese Klasse hat demnach für alle Farben einen nur mangelhaften Sinn. Am mangelhaftesten unterscheidet sie das Roth, und das damit zusammengehörige complementare Grün, welche beide Farben sie mehr oder weniger mit Grau verwechselt; nächstdem ist das Blau die am unvollkommensten vom Grau unterschiedene Farbe. Am besten ist sie für das Gelb empfänglich, obgleich auch dieses derselben dem Farblosen näher verwandt scheint.

Die prismatischen und Interferenzfarben, so wie die durchgelassenen Farben gefärbter Gläser, unterscheidet sie im Allgemeinen ungenauer, als die der undurchsichtigen Pigmente. Der Grund ist wahrscheinlich derselbe, aus welchem dem normalen Auge eine Beimischung von Grau (welches dem Roth der Individuen dieser Klasse entspricht) in undurchsichtigen Pigmenten merklicher ist, als eine Beimischung von farblosem Licht in den Farben durchsichtiger Körper. Eins der schwächsten Individuen erkannte im Spektrum nur zwei wesentlich von einander verschiedene Farben, welche es Roth und Blau nannte.

Mit Hilfe eines rothen oder grünen Glases unterscheiden die hierhergehörigen Individuen die Farben noch am besten, da Roth und Grün die auffallendste ihrer Verwechselungen ist, und die Gläser, indem sie die eine oder die andere dieser Farben schwächen, diese geschwächten Farben dunkler erblicken lassen. Das Spektrum erscheint ihnen von derselben Ausdehnung, wie den Personen vollkommener Farbenerkennung; auch ist für sie das Gelb die hellste der prismatischen Farben.

In der Anordnung der farbigen Papierproben wichen sie nur wenig von einander ab.

Die von der zweiten Klasse verwechselten Farben sind:

Hellorange, Grünlichgelb, Bräunlichgelb mit reinem Gelb.
Lebhaft Orange, Gelbbraun mit Grasgrün.
Ziegelroth, Nufsbraun mit Dunkelolivengrün.
Zinnoberroth mit Dunkelbraun.
Dunkelcarminroth mit Schwärzlichblaugrün.
Fleischroth, Graubraun mit Bläulichgrün.
Mattes Bläulichgrün mit Bräunlichgrau.
Unreines (etwas gelbliches) Rosa mit reinem Grau.
Rosenroth, Lila, Himmelblau mit etwas in Lila fallendem Grau.
Carmoisin mit Violett.
Dunkelviolett mit Dunkelblau.

Auch die Individuen dieser Klasse erkennen das Gelb noch am besten; sie unterscheiden Roth etwas besser, Blau etwas weniger vom Farblosen, wie die der ersten Klasse; allein Roth und Blau unterscheiden sie viel unvollkommener, namentlich haben sie für das Roth nur eine sehr schwache Empfindung.

Eine Folge des letzteren Umstandes ist, dafs ihnen das Spektrum kürzer erscheint, namentlich wird von ihnen das getrennte rothe Oval in dem Spektrum des mit Kobalt blaugefärbten Glases gar nicht bemerkt. Daher schreibt es sich auch, dafs das Roth ihnen dunkler erscheint, und deswegen mit dunklerem Grün verwechselt wird, als von der ersten Klasse, dafs durch die Unempfindlichkeit für das Gelbroth das farblose Licht dem Blau ähnlicher wird, und das bläuliche Roth dem Blau oder Violett näher kommt.

Da im Lichte der Dämmerung die rothen Strahlen zuerst verschwinden, so treten während derselben beide Klassen sehr nahe, und die Ordnung der Papierproben zeigten zu dieser Tageszeit nur geringe Unterschiede. Die hellste Stelle des Spektrums schien ihnen mehr oder weniger tief *im Grün* zu liegen. Das Glas, welches sie am meisten

befähigt, die Farben richtiger zu unterscheiden, war das orangefarbige.

Die früher beobachteten Fälle von Mangel an Farbensinn scheinen sich mehr oder weniger einer dieser beiden Klassen anpassen zu lassen, wenn man den Fall ausschliefst, welchen Huddart (*Phil. Trans.* 67) von einem Manne anführt, welcher nur dann, und zwar nur sehr geringe Unterschiede zwischen den Farben auffand, wenn er sie neben einander erblickte.

Merkwürdig ist, dafs beim weiblichen Geschlechte Stumpfsinn für Farben seltner und nur in geringerem Grade vorzukommen scheint, und dafs oft mehrere Personen derselben Familie einen ähnlich oder gleich unregelmäfsigen Farbensinn besitzen.

Dauer des Farbeneindrucks.

Betrachten wir ein von der Sonne beschienenes Stück weifsen Papiers, und schliefsen dann die Augen, so schwebt das Bild des Papiers noch eine Zeitlang uns vor. Schwingt man mit einer gewissen Schnelligkeit eine glühende Kohle im Kreise, so sieht man einen feurigen Kreis. Es verschwindet also ein Lichteindruck nicht plötzlich, wenn das gesehene Objekt zu wirken aufhört, der Reiz, welchen die Aetherschwingungen auf die Nerven ausgeübt haben, dauert noch eine Weile fort. Die Punkte des feurigen Kreises, den die schwingende Kohle bildet, sind uns sichtbar, weil der Eindruck, den die Kohle an einem Orte ihrer Bahn macht, noch nicht erloschen ist, wenn dieselbe zu diesem Ort zurückkehrt, um den Eindruck zu erneuern.

Die Dauer des Eindrucks hängt einestheils von der Stärke, anderntheils von der Natur der Farbe des Lichtes ab. Der Eindruck behält ferner nicht während seiner ganzen Dauer dieselbe Stärke, sondern nimmt allmälig ab; aber nicht gleichmäfsig, indem er eine kurze Zeit hindurch nach dem Verschwinden des Objekts seine ursprungliche Stärke zu behalten scheint, dann aber ein rasches allmälig lang-

samer werdendes Abnehmen eintritt. Die Dauer des ungeschwächten Eindrucks ist, wie die Gesammtdauer, von der Intensität des Lichtes und von der Farbe abhängig.

Betrachten wir nun diese beiden Momente, die totale Dauer des Eindrucks und den Gang seiner Abnahme etwas weiter.

Die totale Dauer wurde zuerst vom Ritter d'Arcy bestimmt, und zwar dadurch, dafs er die Zeit ermittelte, welche eine glühende Kohle zum Umschwung braucht, um eben noch einen geschlossenen Kreis sichtbar werden zu lassen. Er fand als Dauer 0,133 Sekunden.

Hiervon weichen jedoch die auf einem anderen Wege erhaltenen Resultate Plateau's stark ab. Dieser hatte d'Arcy'sche Bestimmungsmethode verlassen, weil er Folgendes an derselben auszustellen hatte:

1) Ist bei jener Versuchsweise wegen des allmäligen Verschwindens des Eindrucks der Moment seines völligen Erlöschens fast unbestimmbar. Es mufs nämlich der Moment beobachtet werden, in welchem eben der Eindruck in einem Punkte erloschen ist, wenn die Kohle zu ihm zurückkehrt, und dies ist nicht möglich, weil der schwache Glanz der verlöschenden Stelle mit dem Grunde zusammenfliefst.

2) Da der Kreis nicht überall gleich erhellt, sondern an den Orten am hellsten ist, welche die Kohle eben verlassen hat, so entsteht ein die Augen ermüdendes Vibriren, welches die Entscheidung, ob der Kreis geschlossen sei oder nicht, höchst unsicher macht.

3) Der Eindruck braucht, wie zum Verschwinden, so auch zum Sich-Bilden eine gewisse Zeit. Man bemerkt also erst den Ort der Kohle, wenn er denselben schon verlassen hat.

Plateau's Apparat hatte das mit d'Arcy's gemein, dafs er aus einem System vertikaler Räder bestand, welche so mit einander verbunden waren, dafs wenn das erste durch ein Gewicht in eine so langsame Bewegung versetzt wurde, dafs sich die Umläufe bequem zählen liefsen, das

letz-

letzte, welches einen Zeiger mit sich führte, an welchem der zu betrachtende Gegenstand befestigt war, eine bedeutende Geschwindigkeit annahm. Die Geschwindigkeit wurde durch die Gröfse des Gewichtes regulirt, und die Zahl der Umläufe aus der Umlaufszahl des ersten Rades und aus der Zahl der Zähne an den Rädern und Getrieben bestimmt, während aus der Umlaufszahl des letzten Rades für eine bestimmte Zeit sich die Zeit eines einzelnen Umlaufs ergab. Um den schwächsten Eindruck noch möglichst genau zu erkennen, brachte er hinter dem Zeiger eine mit schwarzem Sammet überzogene Pappscheibe an; um den Fehler möglichst zu beseitigen, welcher aus der von dem Lichtzittern in dem hellen Kreise herrührenden Augenermüdung entspringt, zog er das Mittel aus vielfach wiederholten Versuchen. Um endlich der Zeit, welche bis zur Bildung des Eindrucks verfliefst, seinen störenden Einflufs zu benehmen, nahm er zum Objekt einen gebogenen Streifen Papier, welcher einen Quadranten des durch ihn zu bildenden Lichtkreises einnahm. Da zwischen den Durchgängen der beiden Enden des Streifens durch einen Punkt des Kreises $\frac{1}{4}$ der Umlaufszeit verfliefst, so mufs man dieses Viertel von der beobachteten Umlaufszeit abziehen. Die Länge des Objekts macht überdies den Eindruck vollständiger, und die zitternde Bewegung im Kreise dadurch geringer, dafs die Umlaufszeit um ein Viertel vergröfsert wird.

Plateau stellte seine Versuche mit gelbem Papier, welches durch Gummigutt, mit rothem, welches durch Carmin, und mit blauem, welches durch Berlinerblau gefärbt war; und fand als Mittel aus 6 Versuchen für die Eindrucksdauer des Weifs, des Gelb, des Roth, des Blau beziehlich 0,35″ 0,35″ 0,34″ 0,32″.

Beschleunigt man die Umdrehung so weit, bis der Kreis gleichförmig erhellt ist, so erhält man die weit kürzere Zeit, während welcher der Eindruck seine ursprüngliche Stärke behält. Aus der Kleinheit der von d'Arcy gefundenen Zeit vermuthet Plateau, dafs derselbe diese letzte Dauer beobachtet habe.

Zur genaueren Messung der Dauer des ungeschwächten Eindrucks befestigte Plateau an dem letzten Rade eine in 24 gleiche Sektoren getheilte Papierscheibe (Fig. 88), färbte die alternirenden Sektoren mit der zu prüfenden Farbe und schnitt die übrigen heraus. Hinter die Scheibe wurde eine mit schwarzem Sammet überzogene Papptafel gestellt. Die Farbe zieht sich bei dem Herumdrehen etwas ins Graue, weil der Eindruck bei dem raschen Vorüberführen der gefärbten Theile nicht vollständig ist. Wenn der Kreis gleichförmig gefärbt erscheint, so ist der 24te Theil der Umlaufszeit die Dauer, in welcher der Eindruck nicht merklich abnimmt. Als Mittel für das Weifs, Gelb, Roth, Blau ergab sich beziehlich:

0,191″ 0,199″ 0,232″ 0,295.

Man sieht, dafs das Verhältnifs dieser Zahlen das entgegengesetzte von dem vorigen ist, und da man, wie wir späterhin sehen werden, berechtigt ist, den Eindruck des Weifs für stärker als den des Gelb, den des Gelb für stärker als den des Roth, und den des Roth für stärker als den des Blau zu halten, so folgt das Gesetz: dafs die stärksten Eindrücke am längsten dauern, aber auch am schnellsten abnehmen. Das Licht verhält sich in dieser Hinsicht, wie die Wärme, indem die heifsesten Körper sich am schnellsten abkühlen, aber bis zur Annahme der Temperatur der Umgebung die meiste Zeit erfordern.

Die langsamere Abnahme schwächerer Eindrücke geht noch aus folgenden, von der Natur der Farbe unabhängigen Versuchen Plateau's hervor.

Theilt man zwei Scheiben *A* und *B* (Fig. 89) so in abwechselnd schwarze und weifse Sektoren, dafs auf beiden die Breite der weifsen Sektoren dieselbe, die der schwarzen aber auf *A* gröfser als auf *B* ist, so erfordert, wie man leicht begreift, die Scheibe *A* eine gröfsere Geschwindigkeit zur Erzeugung eines gleichförmigen Eindrucks, allein der Eindruck der Scheibe *A* ist geringer; für *A* mufs daher dem obigen Gesetze gemäfs die Eindrucksdauer *gröfser sein*, wie es der Versuch auch bestätigte, in welchem

sich, wenn die Breite der schwarzen Sektoren auf *A* und *B* sich wie 4:1 verhielt, die Dauer des ungeschwächten Erscheinens in dem Verhältnifs 0,76:1 stand.

Wiederholt man den Versuch mit zwei so in schwarze und weifse Sektoren getheilten Scheiben *A* und *B* (Fig. 90), dafs auf *A* die Breite der schwarzen Sektoren geringer, als die der weifsen auf *B*, die der weifsen geringer, als die der schwarzen ist, so ist die Umlaufszeit beider Scheiben dieselbe, die Dauer des ungeschwächten Eindrucks also bei *A* kleiner, als bei *B*; mithin hält der schwächere von *B* erzeugte Eindruck länger an.

Relative Stärke des Eindrucks der verschiedenen Farben.

Theilt man eine Scheibe in gleiche Sektoren, färbt sie abwechselnd mit zwei verschiedenen Farben, so läfst sich die relative Eindrucksstärke dieser Farben vergleichen, wenn man sie so geschwind dreht, dafs ein gleichmäfsiger gemischter Farbenton entsteht. Es ist nämlich diejenige Farbe die am stärksten wirkende, welche in der Mischung vorherrscht. Dasselbe läfst sich erreichen, wenn man die Sektoren verschieden breit macht, und zwar in solchem Verhältnifs, dafs beim Umdrehen weder die eine noch die andere Farbe vorherrscht. Die Farbe der breitesten Sektoren ist alsdann die am schwächsten wirkende. Da hierbei nur mit Pigmentfarben, also nicht mit homogenen Farben operirt werden kann, und da sich überdies die Sättigung der verschiedenen aufgetragenen Farben nicht genau vergleichen läfst, so liefert das Breitenverhältnifs der Sektoren nichts Numerisches, sondern nur das Verhältnifs der Eindrucksstärke im Allgemeinen.

Plateau erhielt Farbenmischungen, welche zu keiner der beiden Farben sich vorzugsweise hinneigten: mit Gelb und Blau, als er die blauen Sektoren viermal breiter als die gelben machte; mit Roth und Blau, als er die blauen Sektoren viermal breiter als die rothen machte; mit Roth und Gelb, als er den Sektoren das Verhältnifs 5:3 gab.

In Absicht auf die Eindrucksstärke folgen sich also die Farben in der Ordnung: Weifs, Gelb, Roth, Blau, wie es oben behauptet wurde.

Hiermit stimmt die Erfahrung überein, dafs in derselben Folge der Sehwinkel gröfser wird, unter welchem die resp. Farbe noch sichtbar ist.

Als kleinsten Sehwinkel fand Plateau für die oben genannten Farben, indem er die Entfernung mafs, in welcher kleine an einer schwarzen Tafel geheftete Papierscheiben von einem Centimeter Breite nur noch als kaum bemerkbare Wolken erschienen, im Schatten

18″ 19″ 31″ 42″,

und im Sonnenschein

12″ 13″ 23″ 26″.

Dafs der Erfahrung gemäfs das Roth die Augen mehr ermüdet, als das Gelb, kann nicht als Widerspruch gelten, da die Ermüdung des Organs, wie beim Gehör, keine nothwendige Folge der Stärke der Empfindung zu sein braucht.

Einflufs der Farbeneindrücke auf einander.

Dreht man eine Scheibe, die in Sektore von zwei verschiedenen Farben getheilt ist, so erfolgt auf der Netzhaut ein regelmäfsiger Wechsel ungleich schneller Schwingungen, welche gemischte Farbeneindrücke hervorbringen, die aber je nach der gröfseren oder geringeren Schnelligkeit des Wechsels, und je nach dem Gröfsenverhältnifs der Sektoren verschieden sind. Geschieht die Drehung so langsam, dafs der Farbenton nicht gleichförmig ist, so erfolgt ein Flimmern, in welchem sehr lebhafte Farben auftauchen, welche sowohl von den angewendeten Farben, als von deren Mischung verschieden sind. Gelb und Blau bringen z. B. sehr lebhaftes Weifs und Orange; Gelb und Roth ein sehr schönes Grün hervor.

Auf die Entstehung der einen oder der anderen Farbe hat die Sättigung der Farben und die Breite der Sektoren *grofsen Einflufs*. Zu einem durch Gelb und Blau erzeug-

ten schönen Weifs wird z. B. erfordert, dafs das Blau sehr intensiv ist, und 5 bis 6 Mal gröfsere Sektoren als das Gelb einnimmt; zum Orange mufs das Gelb intensiver, und das Blau blafs sein. Das Gelb und Roth mufs sehr intensiv sein, wenn die resultirende Farbe ein schönes Grün sein soll.

Geschieht die Drehung so rasch, dafs der Farbenton gleichförmig wird, so ist die sich bildende Farbe auch nicht immer der aus der Mengung der Pigmente entstehenden ähnlich. Stark aufgetragenes Gummigutt und Berlinerblau, welches bei der Mengung ein schönes Grün geben würde, giebt, wenn man das Breitenverhältnifs so nimmt, dafs weder das Blau noch das Gelb vorwaltet, ein vollkommenes Grau, ohne ein Spur von Grün. Nimmt man das Blau sehr blafs, so wird ein schwacher Strich ins Grün bemerkt. Die Verbindung von Gelb und Roth, und von Blau und Roth giebt dagegen fast dieselbe Farbe, wie das Gemenge der Pigmente.

Der Einflufs, welchen die Farbe der Sektoren auf die Mischung hat, hängt nicht blofs von dem Breitenverhältnifs der Sektoren, sondern auch von dem Sättigungsverhältnifs der aufgetragenen Farbe ab, und es giebt für jede Farbe einen gewissen Grad der Helligkeit, für welchen ihr Einflufs ein gröfster wird. Färbt man z. B. die einen Sektoren mit gleichförmigem Roth, die anderen mit stufenweise vom Centrum nach dem Umfang hin dunkler werdendem Blau, so erblickt man bei der Drehung concentrische violette Ringe, von denen einer der mittleren sich am meisten ins Blaue zieht, während nach dem Umfange und nach dem Centrum hin das Roth sich allmälig geltender macht. Der Ton des Blau, welcher dasselbe am meisten vorherrschen läfst, ist einer der blässeren, welcher mit dem dunkelsten Blau des Himmels übereinstimmt. Auch der wirksamste Ton des Roth ist blafs, und nur das Gelb wirkt um so stärker, je intensiver es ist. Ueberdies ändert sich der einflufsreichste Ton einer Farbe nicht, wenn der Ton des gleichmäfsig gefärbten Sektors sich ändert. Den Versuchen Pla-

teau's gemäfs ist auch der Ton des überwiegendsten Blau derselbe, die zweite Farbe mag Roth oder Gelb sein, und es ist demnach wahrscheinlich, dafs dasselbe Gesetz für das Roth und Gelb, so wie für die übrigen Farben gelte.

Von anderer Art ist der Einflufs, welchen zwei verschiedene Farbeneindrücke auf einander ausüben, von denen der eine auf ein Auge, der andere auf homologe Netzhautstellen des zweiten Auges wirkt.

Zuvörderst möge das einfach gesehene Bild eines fixirten Gegenstandes betrachtet werden, welches von jedem Auge durch eine anders gefärbte durchsichtige Substanz angesehen wird. Hält man z. B. vor das eine Auge eine blaue, vor das andere eine gelbe Oblate, so sieht man beide Farben abwechselnd auftauchen, aber nicht in ihrer ursprünglichen Reinheit, sondern nüancirt. Nach Müller ist diese Nüance nur eine Erhellung oder Verdunkelung, je nachdem die unterdrückte Farbe heller oder dunkler ist; nach Weber und Volkmann wird die Qualität der Farbe geändert, wobei sich der letztere theoretischerseits auch darauf beruft, dafs das völlige Schliefsen des einen Auges bei der ersten Annahme eine merkliche Verdunkelung hervorbringen müsse, was der Erfahrung widerspreche. Abgesehen von der Nüance, in welcher jede Farbe auftritt, ist wenigstens so viel gewifs, dafs homologe Netzhautstellen verschiedene Farben verschieden empfinden können, und dafs die Empfindung des helleren Lichtes die des schwächeren zu schwächen oder ganz aufzuheben vermag.

Dies geht auch aus dem von Volkmann angeführten Faktum hervor, dafs man gleichzeitig zwei verschieden gefärbte Lichtscheiben erblickt, wenn man das prismatische Spektrum auf ein mit zwei kleinen Löchern versehenes Brett so fallen läfst, dafs auf jedes der letzteren eine andere Farbe fällt, und mit dem einen Auge durch das eine, mit dem anderen Auge durch das andere sieht. Sind die Farben Gelb und Blau, so nähern sich die gelbe und blaue Lichtscheibe beim nach Innen Schielen einander, und beim Decken beider erscheint ein gelber sehr glänzender Fleck,

welcher mit einem matteren Heiligenschein umgeben ist, in dem sich gelbe und blaue Strahlen in radialer Richtung gesondert unterscheiden lassen. Die innerste Zone des Heiligenscheins bleibt einfarbig, und zeigt sich abwechselnd gelb und gelbgrün.

Aus einem anderen, von Volkmann angestellten Versuche scheint als Gesetz zu folgen, dafs der Farbeneindruck an einer Stelle der Netzhaut nur dann von dem Farbeneindruck an der homologen Stelle des anderen Auges modificirt wird, wenn diese Stellen in der Augenaxe liegen.

Sieht man nämlich mit dem einen Auge durch ein gelbes, mit dem andern durch ein blaues Glas nach einem Punkt einer weifsen Wand, so erscheint derselbe in einem nüancirten Gelb. Von den Doppelbildern, welche ein gleichzeitig den Augen näher gehaltenes Objekt zeigt, erscheint dagegen das eine rein blau, das andere rein gelb, obgleich der Stelle *a* des einen Auges, welche das blaue Bild des Objekts empfindet, eine homologe Stelle *b* des anderen Auges entspricht, welche durch gelbes Licht erhellt wird, und umgekehrt.

Erscheinungen, welche in der Dauer des Lichteindrucks ihren Grund haben.

Von den vielen Erscheinungen, welche sich aus der Dauer des Lichteindrucks erklären, und welche zu den sogenannten optischen Täuschungen gehören, mögen folgende erwähnt werden.

1) Die stroboskopischen Scheiben. Zeichnet man das Bild einer sich bewegenden Figur in allen Stadien ihrer Bewegung, betrachtet das Bild, welches dieselbe im ersten Stadium darstellt, und bringt nach und nach an dessen Stelle die übrigen Bilder in der Ordnung, wie die Stadien auf einander folgen, so wird man nur ein einziges Bild zu sehen glauben, welches alle diese Stadien durchgeht, sich also zu bewegen scheint, sobald die Bilderverwechselung so rasch geschieht, dafs der Eindruck eines

Bildes noch nicht erloschen ist, wenn es durch das folgende ersetzt worden ist.

Zeichnet man diese Bilder auf den Umfang einer Scheibe hinter einander, und giebt derselben eine schnelle drehende Bewegung, so wird jene Täuschung eintreten, wenn man nur eine Stelle des Umfanges fixirt, also wenn man z. B. durch eine Oeffnung sieht, durch welche sich nur ein Bild übersehen läfst. Derselbe Effekt wird hervorgebracht, wenn man an dem Rande der Scheibe über jedem Bilde eine Oeffnung anbringt, die bemalte Seite einem Spiegel zukehrt, und durch die bei der Drehung vorübereilenden Oeffnungen auf die katoptrischen Bilder der Figuren in dem Spiegel hinsieht. Ist die Drehung schnell genug, so bilden die Oeffnungen einen durchsichtigen Ring, welcher die scheinbar sich bewegenden Figuren im Spiegel erkennen läfst. Die scheinbare Bewegung wird eine continuirliche, und zwar eine periodische, sobald das letzte Stadium sich dem ersten wiederum anschliefst. Dabei verändern die Figuren ihren Ort selbst nicht, da sie genau der jedesmaligen Oeffnung gegenüberstehen. Zeichnet man aber die Bilder so, dafs jedes folgende Bild sich etwas weiter von der Mitte der darüber befindlichen Oeffnung entfernt ist, so stehen dem Auge nicht mehr immer dieselben Theile der Figur gegenüber, und es tritt zugleich eine scheinbare fortschreitende Bewegung ein. Enthält z. B. die Scheibe n Oeffnungen und $n+1$ Figuren, so ist der Winkelabstand zweier Oeffnungen, wenn P die Peripherie ist, $\frac{P}{n}$, und der Winkelabstand zweier Figuren $\frac{P}{n+1}$; also hat sich die Figur in der Zeit, welche vom Vorübergang einer Oeffnung bis zu dem der nächstfolgenden verfliefst, um den Winkel $\frac{P}{n}-\frac{P}{n+1}=\frac{P}{n(n+1)}$ fortbewegt, und macht daher einen ganzen Umlauf, wenn die Scheibe $n+1$ Umläufe gemacht hat. Diese Scheiben, welche man stroboskopische nennt, *wurden* von Stampfer und gleichzeitig von Plateau *erfunden.*

2) Das Horner'sche Dädaleum ist ein hohler Cylinder, welcher mit gleichweit von einander entfernten Oeffnungen versehen ist, und sich in eine rotirende Bewegung um seine Axe (mittelst einer Scheibe, auf welcher er befestigt ist) versetzen läfst. Auf der Innenfläche zwischen die Oeffnungen gezeichnete in auf einander folgenden Stadien befindliche Figuren geben dem durch die Oeffnungen sehenden Auge bei der Drehung den Anblick eines sich bewegenden Bildes. (Pogg. Ann. XXXII, p. 650.)

3) Scheinfiguren. Wenn sich ein heller schmaler Gegenstand auf dunklem Grunde mit einer gewissen Schnelligkeit bewegt, so erscheint vermöge der Eindrucksdauer die Fläche, welche durch die successiven Lagen desselben gebildet wird, in einem gewissen Grade erhellt. Bewegt sich nun gleichzeitig ein zweiter heller Gegenstand vor dem ersten nach einem anderen Gesetz, so bildet dieser gleichfalls einen Schleier, welcher den ersten mehr erhellt, insofern jeder Punkt successiv durch den ersten und den zweiten Gegenstand Licht erhält. Hiervon machen diejenigen Punkte eine Ausnahme, in denen sich die Gegenstände während ihrer Bewegung decken, und welche, da sie nur das Licht von dem vorderen ins Auge lassen, dunkler gegen den übrigen Grund erscheinen. Geschehen die Bewegungen so, dafs die Deckungspunkte stetig ihre Lage ändern, so bilden dieselben eine dunkle Curve. Sind die Bewegungen periodisch und zwar so, dafs nach Verlauf einer gewissen Zeit sich wiederum dieselben Punkte decken, so wird auch die Curve periodisch; ist diese Zeit kürzer, als die Dauer des Lichteindrucks, und geschieht die wiederholte Deckung zweier immer an demselben Ort im Raume, so erscheint die Curve als feststehend.

Dasselbe tritt ein, wenn beide Gegenstände dunkel sind und der Grund hell ist, oder wenn der hintere Gegenstand hell und der vordere eine in einer schwarzen Fläche ausgeschnittene Figur ist, nur dafs in diesen beiden Fällen die Deckungscurve heller als der Grund ist.

Stellt man sich z. B. gegen ein gezähntes Rad so, dafs *die Zähne der vorderen* Hälfte die der hinteren decken,

und dreht man alsdann dasselbe schnell um seine Axe, so sind die Deckungspunkte die Orte, an welchem sich die Zähne in ihrer ursprünglichen Stellung befanden. Die Zähne erscheinen daher unbeweglich.

Ist der hintere Gegenstand ein sich um seine Axe drehendes Rad, dessen Speichen erhellt sind, und ist der vordere eine sich vor demselben mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich selber parallel bewegende vertikale Spaltöffnung so bilden die Deckungspunkte Curven, welche das Ansehen gekrümmter Speichen haben, so wie es etwa die Fig. 91 zeigt. Am einfachsten ist der Fall, in welchem die Spaltöffnung mit den Punkten des Radumfanges gleiche Geschwindigkeit hat.

Bewegt sich z. B. der Rand *fbik* (Fig. 92) so, dass die Bewegung in der Richtung von *f* nach *b* geschieht, sind ferner *ae*, *ad*, *ac*, *ab* die successiven Lagen der Speiche *af*, und nimmt die Vertikalöffnung *fb* zu denselben Zeiten resp. die Lagen 1,1; 2,2; 3,3; 4,4 an, so sind die Durchschnittspunkte *i*, *g*, *h*, *a* Punkte der Deckungscurve. Die Bögen *fe*, *ed*, *dc*, *cb* sind respective den Entfernungen der Linien *fb*; 1,1; 2,2; 3,3; 4,4 gleich. Nimmt man *ad* zur Abscissenaxe, *h* zum Anfangspunkt der Coordinaten, und setzt man $ha = \alpha$, so ist $ng = an \tan g\, dac$, also wegen $hn = dc = x$ und $ng = y$,

$$y = (\alpha - x) tg\, x$$

die Gleichung der Deckungscurve. Dies ist die unter dem Namen der Quadratrix des Dinostrates bekannte Curve.

Da es einerlei ist, ob das Rad sich um eine unbewegliche Axe dreht und die Spaltöffnung sich fortbewegt, oder ob die letztere feststeht, und das Rad aufser der Rotationsbewegung eine fortschreitende Bewegung hat, so sieht man dieselbe Erscheinung, wenn man durch die Stäbe eines Gitters auf ein fortrollendes Rad sieht. Dies ist die von Roget (*Phil. Trans.* 1825) zuerst beschriebene und erklärte Erscheinung.

Bewegen sich zwei Räder rotirend nach entgegengesetzten Richtungen und mit gleicher Geschwindigkeit um

eine feste Axe, und steht man so, daſs die Centra sich decken, so glaubt man ein Rad mit unbeweglichen geradlinigen Speichen zu erblicken; decken sich die Centra nicht so erblickt man feststehende Curven. Sind in dem letzten Falle die Geschwindigkeiten und deren Richtungen gleich, so sind die Curven Kreise, welche durch die beiden Drehpunkte gehen; sind die Richtungen entgegengesetzt, so sind es Hyperbeln, welche durch die Drehpunkte gehen. Sind die Richtungen gleich und ist dabei die Geschwindigkeit des einen Rades doppelt so groſs als die des andern, so ist die Curve eine Focale*), deren Scheitel im Drehpunkt des schnelleren Rades, und deren Vielfachspunkt im Drehpunkt des andern liegt. Decken sich die Speichen in ihrer ursprünglichen Lage, so geht die betreffende Focale in einen von einer geraden Linie durchzogenen Kreis über.

Wenn man statt der geradlinigen Radspeichen gekrümmte Papierstreifen nimmt, so läſst sich durch Umdrehung jede mögliche Curve (z. B. das Profil eines Menschen, ein Wort u. s. w.) erzeugen. Ist die eine bewegliche Curve gegeben, so läſst sich leicht durch geometrische Construction die dazu nöthige Form der zweiten Curve bestimmen.

Farbenerscheinungen, welche die Empfindung der Farben äuſserer Gegenstände begleiten.

Irradiation. Erhält eine Stelle der Netzhaut einen Lichteindruck, so theilt sich dieser Eindruck den nächst anliegenden Theilen mit. Ein heller Gegenstand auf dunk-

---

*) Focale nennt man die Curve, in welcher die Brennpunkte aller derjenigen Kegelschnitte liegen, die man erhält, wenn man durch einen Punkt der Oberfläche eines Kegels Schnitt-Ebenen legt, die auf der durch die Kegelaxe und jenen Punkt bestimmten Ebene senkrecht stehen. Bezieht man die Gleichung der Curve auf rechtwinklige Coordinaten, nimmt die Kegelaxe zur Axe der x, rechnet die Abscissen vom Scheitelpunkt ab, und nennt a die in der Ebene der Focale liegende Halbaxe derjenigen Ellipse, welche die Kegelaxe senkrecht schneidet, b die zweite Halbaxe, und c die Abscisse ihres Mittelpunktes, so ist die Gleichung der Focale

$$(ay-cx+2ac)(x^2+y^2)-b^2(ay+cx)=0.$$

lem Grunde erscheint daher in einiger Entfernung merklich gröfser. Diese Mittheilung des Nervenzustandes an die umliegenden Theile nennt man Irradiation. Kleine Gegenstände auf anders gefärbtem Grunde verschwinden daher mehr oder weniger schnell, tauchen alsdann wieder hervor, um von neuem periodisch zu verschwinden und aufzutauchen. Dies tritt um so leichter ein, wenn die Farbe des Gegenstandes von der des Grundes sich wenig unterscheidet. Auch geschieht das Verschwinden schneller, wenn das Bild auf seitliche Theile der Netzhaut, und es geschieht fast augenblicklich, wenn es auf die Eintrittstelle des Sehnerven fällt. Dies plötzliche Verschwinden, welches zuerst von Mariotte bemerkt wurde, gab anfänglich zu der Meinung Anlafs, dafs jene Eintrittsstelle ganz unempfindlich sei. Um es zu beobachten, darf man nur z. B. auf eine schwarze Tafel zwei Kreidepunkte in horizontaler Richtung in einiger Entfernung von einander machen, sich um etwa den fünffachen Abstand beider Punkte von der Tafel entfernen, das eine Auge schliefsen, und mit dem anderen auf den nach Innen zu liegenden Punkt richten. Der zweite Punkt verschwindet alsdann sogleich gänzlich.

Durch farbige Gegenstände erweckte Empfindung der Complementarfarbe. Betrachtet man mattweifse (oder graue) Gegenstände, z. B. Papierschnitzel auf einem reinen und hellen farbigen, z. B. rothen Grunde, so erscheinen dieselben in der dem Grunde complementaren Farbe. Man nennt diese Farbe auch wohl die zufällige Farbe des Roth. Daher kommt es auch, dafs von den beiden Bildern eines Blattes weifsen Papiers, welche durch Reflexion auf der vorderen und hinteren Fläche eines hellfarbigen Glases entstehen, das erste die complementare Farbe des zweiten zeigt. Das von der Hinterfläche reflektirte Licht ist nämlich farbig, da es die Dicke des Glases zweimal durchlaufen hat, das von der Vorderfläche reflektirte Licht dagegen ist weifs, erscheint aber durch den Einflufs des gleichzeitig das Auge afficirenden farbigen Lichtes in der zufälligen oder complementaren Farbe. Am deut-

lichsten treten beide Farben hervor, wenn man die Reflexion an der Hinterseite (und somit die Deutlichkeit des durch sie gebildeten Bildes) dadurch vermehrt, dafs man das Glas auf Quecksilber legt oder hinten mit Spiegelfolie überzieht. Dagegen verschwindet das hintere Bild, und das vordere wird farblos, wenn man die Hinterseite schwärzt, weil dadurch die Reflexion dort aufgehoben, oder wenigstens sehr geschwächt wird. Schwärzt man nur einen Theil des Glases, so läfst sich Beides vereinigt sehen, die complementaren Doppelbilder, wenn man die Reflexion an dem ungeschwärzten Theil geschehen läfst, das einfache ungefärbte Bild der Vorderseite, wenn man das Glas so neigt, dafs die Reflexion in dem geschwärzten Theile geschieht *).

Dieselbe Ursache hat die zuweilen erscheinende complementare Färbung, welche die durch Irradiation erzeugte Aureole eines auf weifsem Grunde befindlichen farbigen Gegenstandes umgiebt.

Endlich gehört hierher die Erscheinung der farbigen Schatten. Die Erscheinung besteht darin, dafs, wenn auf einer von farbigem Licht erhellten Fläche durch die schattengebende Wirkung eines Körpers ein Raum gebildet wird, in welchem jenes Licht zerstört ist, dieser Raum eine der Flächenfarbe complementäre Färbung zeigt, sobald er von schwächerem farbigen oder von weifsem Licht erleuchtet wird. Die Intensität der Schattenfärbung nimmt mit der Entfernung vom Schattenrande ab.

---

*) Osann erklärte (Pogg. Ann. XXVII, p. 694) die Farbe des vom Fensterglase reflektirten Bildes einer auf gefärbtem Grunde liegenden Papierscheibe, welches zur Farbe des Grundes complementar erschien, für objektiv, d. h. er hielt das reflektirte Licht selbst für complementar gefärbt, weil er die Farbe auch bemerkte, wenn er das vom farbigen Papier reflektirte dadurch vom Auge abhielt, dafs er das Bild der weifsen Scheibe durch eine mit einer Oeffnung versehene Papierscheibe betrachtete. Fechner erklärt dies seinen eigenen Versuchen widersprechende Resultat daraus, dafs Osann mit grünlichem Fensterglase operirt habe, welches die beiden complementaren (grünlichen und röthlichen) Bilder erzeugt habe, von denen das grünliche oder röthliche mehr hervorträte, je nachdem man mehr auf das Grün oder auf das Roth reflektire.

So erscheint z. B. in dem röthlich-gelben Licht der Morgen- und Abendsonne der Schatten, besonders der schmäleren Körper, bläulich, und in dem rothen Lichte, womit die Gegenstände in der Taucherglocke unter dem Wasser gefärbt werden, grün.

Läfst man von zwei in einiger Entfernung von einander stehenden Kerzen Licht auf einen Stab fallen, so wirft derselbe auf einer dargebotenen weifsen Fläche zwei graue Schatten. Hält man aber vor die eine Flamme ein gefärbtes Glas, so erscheint der von der bedeckten Flamme erleuchtete Schatten in der Farbe des Glases, der von der unbedeckten Flamme erleuchtete dagegen deutlich in der complementaren Farbe. Substituirt man für die bedeckte Kerzenflamme brennenden Phosphor, so wird der von diesem letzteren, also von dem intensiveren Lichte, erhellte Schatten gelb, der vom Kerzenlicht erleuchtete blau. Ist das eine Licht eine brennende Kerze, das andere gedämpftes Tageslicht, so ist der von jenem Lichte beleuchtete Schatten gelb, der andere blau. Kommt das Licht von zwei verschiedenen Stellen des Himmels, von denen die eine tief blau, die andere weifslich ist (wie es sich in einem Zimmer beobachten läfst, welches durch zwei Fenstern erleuchtet wird, die verschiedenen Himmelsgegenden zugewendet sind), so ist gleichfalls der eine Schatten blau, der andere gelblich gefärbt. Dasselbe tritt ein, wenn man durch eine in einem dunklen Zimmer angebrachte Oeffnung dem direkten (weifsen) Sonnenlicht und dem (blauen) Himmelslicht gleichzeitig Zutritt gestattet. Das von einer der Oeffnung gegenüberstehenden Wand reflektirte Sonnenlicht scheint den einen Schatten gelb zu färben, während der andere vom blauen Licht des Himmels blau gefärbt ist.

Die Schattenfärbung erhält ihre gröfste Intensität und Schönheit, wenn man, wie es Fechner gethan hat, im Fensterladen eines dunklen Zimmers neben einander zwei Oeffnungen anbringt (Fechner nahm sie quadratisch von 6 Zoll Breite, und 2 Fufs von einander entfernt), in welche sich gefärbte Glasscheiben einschieben lassen, und die

durch einen Schieber beliebig verengert werden können, um dasjenige Intensitätsverhältnifs des eindringenden Lichtes hervorzubringen, welches die Schattenfarben in ihrer gröfsten Deutlichkeit zeigt. Will man die Versuche mit Tageslicht anstellen, so darf man nur die eine Oeffnung ganz frei lassen, und durch den Schieber so weit beschränken, bis der complementare Schatten das Maximum seiner Intensität zeigt. Will man endlich die Versuche mit Kerzenlicht anstellen, so darf man nur die eine Oeffnung ganz verschliefsen, die andere mit farbigem Glase versehen und die Kerze ins Zimmer stellen. Schliefst man die eine Oeffnung mit einem dunklen, die andere mit einem hellen Glase von derselben Farbe, so wird derjenige Schatten der complementare, welcher von dem durch das dunklere Glas dringenden Lichte erleuchtet wird.

Dafs die Farbe des von stärkerem Lichte erhellten Schattens durch Reflexion farbiger Strahlen gebildet wird, also objektiv ist, dafs dagegen der vom schwächeren Lichte erleuchtete nur complementar erscheint in Folge des intensiveren Lichteindrucks an den benachbarten Netzhautstellen, dafs seine Farbe also subjektiv ist, geht daraus hervor, dafs die Farbe des letztgenannten Schattens verschwindet, wenn man auf denselben durch eine innen geschwärzte Röhre sieht, um das Auge vor dem Eindruck der herrschenden Farbe zu bewahren. Hat man diesen Eindruck schon empfangen, ehe man durch die Röhre sieht, so wirkt derselbe fort, und der durch sie betrachtete Schatten behält seine Complementarfarbe; er behält sie sogar noch, wenn man während des Hindurchsehens durch die Röhre das farbige Glas durch eins von anderer Farbe ersetzt. Nimmt man alsdann die Röhre fort, so verwandelt sich die Farbe plötzlich in die Complementarfarbe des neuen Glases. Die Färbung des vom intensiveren Lichte beleuchteten Schattens verschwindet dagegen zum Beweise seiner Objektivität, durch die Röhre betrachtet, nicht, und färbt sich nun mit dem Wechsel des Glases, durch welches das ihn erhellende Licht dringt.

Wird eine Oeffnung verschlossen, so erscheint der Schatten schwach complementar; durch die Röhre betrachtet, nimmt er aber die Farbe des Glases an, und wandelt seine Farbe mit dem Wechsel des Glases um. Sie ist also objektiv und rührt von dem von den Wänden reflektirten Lichte her.

Hält man die Röhre nach der Grenze des Schattens hin, so dafs die eine Hälfte des Gesichtsfeldes die objektive, die andere die complementare subjektive Farbe hat, so färbt sich das ganze Feld mit jener oder mit dieser Farbe, je nachdem man die eine oder die andere Oeffnung schliefst. Das sich Ausbreiten der objektiven Farbe ist in der Ordnung, das sich Ausbreiten der subjektiven Farbe beruht auf den weiter unten behandelten Erscheinungen der Nachbilder.

Einen neuen Beleg für die Subjektivität der zweiten Farbe, so wie für die Nothwendigkeit des Vorhandenseins zweier Lichter geben folgende von Dove angegebene sehr leicht anzustellende Versuche.

Legt man ein hellfarbiges Glas auf eine Metallplatte, und läfst auf dasselbe durch weifses Tageslicht den Schatten eines schmalen Gegenstandes fallen, so wird der Raum des auf die Vorderfläche geworfenen Schattens nur das von der Hinterfläche reflektirte Licht zum Auge lassen, und daher in der (objektiven) Farbe des Glases erscheinen, während über der Stelle, wo der auf die Hinterfläche geworfene Schatten sich befindet, die Vorderfläche das auffallende weifse Licht reflektirt, welches aber auf das Auge den Eindruck der Complementarfarbe macht. Die Farbe des übrigen Glases, welches aus dem von beiden Flächen reflektirten Lichte zusammengesetzt ist, läfst nur undeutlich die Farbe des Glases erkennen. Sieht man nun durch ein Nicol unter dem Polarisationswinkel des Glases so auf die Schattenbilder, dafs das von der Vorderfläche reflektirte Licht nicht zum Auge dringen kann, so nimmt der Grund die Farbe des objektiven Schattens an (da das vom Metall re-

iektirte Licht nicht am Durchgange durch das Nicol geidert wird), und es bleibt nur der zweite complementar wesene jetzt seine Farbe verlierende Schatten unterscheidr. Hält man überdies ein farbiges Glas vor das Auge, lches die Farbe des auf dem Metall liegenden Glases sorbirt, so verschwinden beide Schatten.

Nimmt man statt eines schattenwerfenden Körpers ei-ı mit einer kleinen Oeffnung versehenen Schirm, so bt sich der Unterschied der objektiven und subjektiven rbe deutlich zu erkennen, wenn man die beiden Bilder 'ch ein Prisma betrachtet, indem nur das objektiv ge-ıte ein durch Absorption modificirtes Spektrum giebt *).

Zu den hier betrachteten Erscheinungen einer subjek-n Complementarfärbung gehört auch folgende, welche chner (Pogg. Ann. XLIV, p. 245) erwähnt.

Drückt man bei der Betrachtung irgend eines weifsen ;enstandes das eine Auge etwas seitlich, so dafs ein dop-es Bild desselben entsteht, so erscheint dasjenige Bild, ches dem gedrückten Auge zugehört (mag es das rechte r linke sein), stets röthlich, das andere dagegen stets ılich. Er fügt indefs hinzu, dafs nur einige seiner Zu-er dieses Phänomen, welches er stets und zwar sehr schieden wahrnähme, bemerkt hätten, während andere ıe Färbung hätten erkennen können, wie überhaupt ver-.edene Personen eine verschiedene Empfänglichkeit für Wahrnehmung subjektiver Farben haben.

'benerscheinungen, welche der Empfindung der Farben äufserer Gegenstände folgen.

Diejenigen Theile der Netzhaut, welche durch einen ›igen Gegenstand afficirt werden, verhalten sich, wenn der Wirkung desselben schnell entzogen werden, so ob das von dem Gegenstande kommende Licht noch

---

*) Ueber die farbigen Schatten vergleiche man Pohlmann (Pogg. . XXXVII, p. 319).

fortwirke, mit dem Unterschiede, dafs die Farben in di complementaren übergehen, und sich mit der Farbe mischen welche direkt die Netzhautstelle erleuchtet. Das ursprüngliche (objektive) Bild wollen wir das **Urbild**, das darauf in seine Stelle tretende das **Nachbild** nennen.

Die Farbe des Nachbildes wird um so intensiver, je anhaltender und stärker der vorhergängige Eindruck ist, und ihre relative Helligkeit hängt von den Eindrücken ab, welche gleichzeitig die nebenliegenden Theile der Netzhaut empfangen, oder mit andern Worten: von der Farbe des Grundes, auf welchem das Urbild und das Nachbild betrachtet werden.

Um den letzten Einflufs an einem durchgeführten Beispiel zu zeigen, mögen die von **Fechner** (Pogg. Annal. XLIV, p. 532) zusammengestellten Erscheinungen hier folgen, welche man erblickt, wenn man ein grünes Objekt auf weifsem, dunklem und rothem Grunde, so wie ein weifses und schwarzes Objekt auf grünem Grunde betrachtet hat.

1) Hat man ein **grünes Objekt auf weifsem Grunde** anhaltend betrachtet, so erblickt man, wenn man das Auge abwendet, ein Nachbild, welches heller als das übrige Gesichtsfeld ist, von welcher Farbe auch der Grund sein mag, auf den man hinblickt. Die Farbe des Nachbildes ist ein reines Roth, wenn der Grund, auf den man hinsieht, roth, weifs, oder schwarz ist, und zwar am lebhaftesten im ersten, am dunkelsten im letzten Fall. Ist der Grund grün, so vereinigt sich dessen Farbe mit dem Roth zu einem weifslichen Tone. Der Grund selber erhält einen grünen Schein, wenn er weifs oder schwarz ist, und wird intensiver, wenn er grün ist.

2) Hat man ein **grünes Objekt auf schwarzem Grunde** betrachtet, so erscheint das Nachbild dunkler als der Grund, und zwar schwärzlich auf grünem Grunde tief schwarz mit rother Nüance auf schwarzem, dunkelr weifsem, und tief roth auf rothem Grunde, während Grund selbst beziehlich hellgrün, dunkel mit einem S ins Grün, grünlich, weifslich roth erscheint.

3) Hat man ein grünes Objekt auf rothem Grunde betrachtet, so ist das Nachbild roth, und der Grund, auf welchem man dasselbe erblickt, scheint stark grün oder mit Grün überlaufen zu sein, je nachdem er weiſs oder schwarz ist; auf grünem Grunde behält dieser Grund seine Farbe, und das Nachbild ist schwärzlich oder weiſslich mit einem Stich ins Rothe, je nachdem das objektive Grün heller oder dunkler als das objektive Roth war. Ist dagegen der Grund roth, so zeigt das Nachbild ein reines Roth, und der Grund erscheint dunkler (und zwar graulich) oder heller (und zwar weiſslich überlaufen), je nachdem das objektive Grün dunkler oder heller als das objektive Roth war.

4) Hat man ein weiſses Objekt auf grünem Grunde betrachtet, so erscheint das Nachbild dunkler als das übrige Sehfeld, und zwar zeigt sich dasselbe schwärzlich-grün in lebhaft rothem Felde bei weiſsem Grunde, schwärzlich auf sehr lebhaft rothem Felde bei rothem Grunde, grün in dunklem mit Roth überlaufenem Felde bei schwarzem Grunde, und sehr rein grün im weiſslich-grünen Felde bei grünem Grunde.

5) Hat man ein schwarzes Objekt auf grünem Grunde betrachtet, so wird das Nachbild heller als die Umgebung, und zwar blendend weiſslichgrün in stark rothem Felde bei weiſsem Grunde; weiſslich in sehr rein rothem Felde bei rothem Grunde; hell weiſslichgrün in stark roth überlaufenem Felde bei schwarzem Grunde; sehr licht weiſslichgrün in schwärzlich überlaufenem Felde bei grünem Grunde.

Ist der Grund, auf welchem man die Nachbilder betrachtet, von irgend einer anderen Farbe, so zeigen Nachbild und das übrige Sehfeld dieselbe Farbe, welche sie bei weiſsem Grunde zeigen würden, nur mit einer Nüance von der Farbe des Grundes.

Sieht man auf ein Papier, dessen rechte Hälfte roth, und dessen linke Hälfte grün gefärbt ist, und zwar abwechselnd auf die *eine* und die andere Farbe, so erblickt man,

wenn man dies etwa eine Minute lang fortgesetzt hat, nach dem Schliefsen des Auges, ein schwarzes Feld, an welches zur Rechten ein gleich grofses grünes, zur Linken ein rothes sich anschliefst. Durch das abwechselnde Betrachten der Complementarfarben wird nämlich das Auge ähnlich wie vom Weifs afficirt, und giebt daher ein schwarzes Nachbild. Während man aber auf das grüne Feld blickt, wird der eine seitliche Theil der Netzhaut vom Roth noch besonders afficirt, und ebenso der andere seitliche Theil vom Grünen, wenn man das Rothe betrachtet. Die Seitenfelder empfinden daher nach dem Schliefsen des Auges an den Seiten die Complementarfarben, wie es der Versuch lehrt.

Die Nachbilder blendend heller Objekte nennt man **Blendungsbilder**. Sie zeichnen sich durch ihre Dauer und durch ihren Farbenwechsel aus. Blickt man z. B. in die auf- oder untergehende Sonne, oder auf den erhellten Fleck eines weifsen Papiers, welcher von den durch eine Oeffnung im Laden eines dunklen Zimmers dringenden Sonnenstrahlen gebildet wird, und sieht alsdann ins Dunkle, so erscheint das Blendungsbild gelblich und erhält alsbald einen purpurfarbenen Rand. Diese Purpurfarbe verdrängt nach und nach die helle Mitte und der Rand wird blau. Dies Blau verdrängt wiederum den Purpur, und der Rand wird dunkel. Endlich schreitet das Dunkel langsam gegen die Mitte vor, und das Blendungsbild verliert sich allmälig. **Göthe** giebt an, dafs, wenn er 5 Sekunden den Sonnenfleck betrachtet, constant erst nach 13″ das Blendungsbild purpurfarben, nach 29″ blau, und nach 48″ schwarz werde. Durch Oeffnen und Schliefsen des Auges vermochte er die Dauer der Blendfarben bis auf 7 Minuten zu verlängern.

Betrachtet man das Blendungsbild in einem mäfsig erhellten Zimmer, so wird es zuerst schwarz und erhält einen grünen Rand, dem nach der Mitte vorschrei[tenden] Grün folgt ein schmutziges Gelb, welches endlich wie[der] durch Weifs ersetzt wird.

Dafs jedes Auge einer gesonderten Farbenempfin[dung]

fähig ist, bestätigt sich auch durch die Färbung, welche die Blendungsbilder zeigen, wenn homologe Stellen der Netzhaut von verschiedenen Farben afficirt werden.

So sah Volkmann, als er in das eine Auge prismatisches Gelb, in das andere prismatisches Blau leitete, das Blendungsbild (nach Schliefsung der Augen) nach einander in folgender Weise: zuerst als grüne Scheibe mit rothem Rande; dann als hellblaue Scheibe mit rothem Rande; als grüne Scheibe mit hellrothem Rande; als hellblaue Scheibe mit dunkelrothem Rande; als eine abwechselnd grüne und blaue Scheibe; als rothe Scheibe mit gelbem Rande; als lila Scheibe mit dunkelviolettem Fleck in der Mitte; als dunkelgrün von hellblau umgeben, und endlich als schmutzig hellblau von schmutzigem Grün umgeben.

Als er dagegen in beide Augen prismatisches Blau fallen liefs, erschien eine hellblaue Scheibe, zuerst auf schwarzem Grunde, dann mit rothem Rande, der aus Zinnober in Purpurroth überging, und sich immermehr nach innen verbreitete, bis die ganze Scheibe purpurroth war.

Fiel in beide Augen prismatisches Gelb, so trat eine gelbe Scheibe mit zinnoberrothem Rand auf, alsdann verwandelte sich das Gelb in Maigrün, und wurde nach und nach vom Roth des Randes verdrängt, bis die Scheibe purpurroth wurde und einen blauen Rand erhielt.

Man sieht also, dafs die Blendungsbilder bei der Zusammenwirkung des Blau und Gelb ein Kampf der Blendungsbilder des Blau und des Gelb zu sein scheint. Ganz anders verhält sich das Blendungsbild der Mischungsfarbe. Als Blendungsbild des prismatischen Grün sah nämlich Volkmann: eine grüne Scheibe auf ponso-rothem Grunde, welcher allmälig dunkler wurde und einem violetten Rande Entstehung gab. Das Violett überzog alsdann nach und nach die ganze Scheibe, welche sich mit einem gelben Heiligenschein umgab.

Was die Dauer der Nachbilder betrifft, so richtet sich dieselbe nach Plateau's Versuchen nach der Eindrucksdauer der Farbe des Urbildes.

Was die Ansichten über den Grund dieser Erscheinungen betrifft, so sind die hauptsächlichsten folgende:

1) Die subjektive Complementarfärbung entsteht durch den Contrast. — Diese Erklärung ist nicht viel mehr, als ein Name für die Erscheinung. Sie postulirt nämlich einen Gegensatz zwischen gewissen (den complementaren) Farben; und dafs jede Farbe ihren Gegensatz hervorrufe. Für einen Gegensatz in den Netzhautständen läfst sich aber nach keiner der bestehenden Theorieen ein natürlicher Grund finden. Das Vorhandensein eines Gegensatzes kann also nur aus jenen Erscheinungen selbst (aus dem Hervorrufen der einen Farbe durch die andere) erst abstrahirt sein.

Das einzige Band, welches nach der Wellentheorie zwischen den complementaren Farben Statt findet, wäre die Rationalität des Verhältnisses der Schwingungsdauer. Wollte man nun nach der Analogie mit den Erscheinungen im Reiche des Tons ein Mitklingen der Complementarfarbe annehmen, so bliebe immer noch das Paradoxon zu erklären übrig, dafs der mitklingende, wegen seiner Schwäche im direkten Lichte nicht wahrnehmbare Farbenton nachhaltiger wirkt, als das kräftige direkte Licht.

Göthe nimmt den Gegensatz als Axiom. Er spricht sich unter andern über die Nachbilder in seiner Weise folgendermafsen aus: „Von den farbigen Bildern bleibt der Eindruck im Auge, nur dafs uns die zur Opposition aufgeforderte und durch den Gegensatz eine Totalität hervorbringende Lebendigkeit der Netzhaut anschaulicher wird."

Durch den Contrast erklärt man sowohl die Aufeinanderfolge der Complementarfarben (bei der Erscheinung der Nachbilder), als das Nebeneinander-Auftreten derselben (bei der Erscheinung der farbigen Schatten).

2) Durch den Reiz, welchen eine Farbe auf eine Stelle der Netzhaut ausübt, wird dieselbe für die Empfindung dieser Farbe abgestumpft, und empfindet daher nach dem Verschwinden des Objekts nur noch die übrigen Farben des dargebotenen Lichtes, also die Complementarfarbe, wenn dasselbe weifs ist. — Den Einwand **Plateau's**, dafs

das Nachbild auch in völlig dunklem Zimmer wahrgenommen werde, wo kein Licht vorhanden sei, welches sich in empfundenes und nicht empfundenes zerlegen könnte, sucht **Fechner** dadurch zu beseitigen, dafs er behauptet, im Auge könne selbstthätig Licht entwickelt werden, und beruft sich dabei auf die Thatsache, dafs auch in der Dunkelheit uns oft Lichtphantome vorzuschweben scheinen. Dies innere Licht ist, wie er vermuthet, auch bei offenem Auge in erhelltem Raume thätig, und werde nur durch das starke Tageslicht so überwogen, dafs es unmerklich wird. Auf schwarzem objektiven Grunde trete übrigens auch objektives Licht hinzu, da auch der schwärzeste Körper noch Licht reflektire, was man daran sehe, dafs im finsteren Zimmer das durch ein Loch im Fensterladen dringende Sonnenlicht selbst die schwärzeste Fläche, da wo es hintrifft, zu erhellen vermöge.

Diese auf die Nachbilder sich beziehende Erklärung läfst sich auch auf die übrigen behandelten subjektiven Farben, namentlich auf die farbigen Schatten ausdehnen, wenn man annimmt, dafs die nebenliegenden Theile der Netzhaut an der Erregung Theil nehmen, und dafs sich die abstumpfende Wirkung des Reizes nur da geltend machen könne, wo der objektive Eindruck nicht fortdauert, und wo nur schwächeres Licht wirkend auftritt. Aus der Schwäche des inneren Lichtes bei der Anwesenheit des allemal bedeutend stärkeren objektiven Lichtes würde zugleich das Ausbleiben der subjektiven Farbe, wenn kein zweites farbiges (oder weifses) Licht vorhanden ist, erklärlich werden.

3) **Plateau** statuirt wiederum einen Gegensatz in den Farben, und läfst die durch einen Lichteindruck gereizte Netzhaut durch eine Folge von entgegengesetzten Zuständen gleichsam oscillatorisch zur Ruhe gelangen. Er setzt hierdurch alle subjektiven Farben-Erscheinungen mit der Dauer des Lichteindrucks in Verbindung. Was die Nachbilder betrifft, so gehe die Empfindung der objektiven Farbe nach der Beseitigung des Objektes abnehmend alle Stufen der Stärke durch (Erscheinung der Eindrucksdauer), gehe dann in die entgegengesetzte der Complementarfarbe

über, die nach ihrem allmäligen Verschwinden wiederum eine Empfindung der direkten Farbe zur Folge habe etc. Zuweilen erhebe sich die Empfindung nicht mehr bis zum erneuerten Auftreten der objektiven Farbe, so dafs nach einem direkten Eindruck nur ein abwechselndes Erscheinen und Verschwinden der entgegengesetzten Farbe bemerkbar sei.

Plateau beruft sich hierbei unter andern darauf, dafs er, nachdem er das eine Auge geschlossen und mit dem andern durch eine innen geschwärzte Röhre eine Minute lang auf ein hell erleuchtetes rothes Feld gesehen, auf einem weifsen Grunde viermal das grüne Nachbild habe verschwinden und einem rothen Bilde weichen sehen. Doch auch diese Erscheinung ist, wie Fechner (Pogg. Annal. XL, p. 530) behauptet, anderer Erklärungen fähig, die er in Zukunft zu geben verspricht.

Die Oscillationen, welche in einem wiederholten Auftreten und Verschwinden des Nachbildes bestehen, schreibt Fechner einer zufälligen Ursache zu. Jede Bewegung des Auges oder der Augenlieder, und selbst eine Bewegung des übrigen Körpers, so wie überhaupt Alles, was mittelst der Gefäfse und Nerven einen Einflufs auf das Auge ausübt, ist nämlich im Stande, das Nachbild zum Verschwinden zu bringen oder zu schwächen; es erscheint aber von neuem, wenn nach einer solchen Bewegung das Auge wieder auf die frühere Stelle gerichtet ist. Durch fortgesetzte Uebung, sich jeder Augenbewegung zu erwehren, gelang es Fechner, die Nachbilder ununterbrochen vor Augen zu behalten.

Es ist sogar möglich, auf mechanischem Wege die Helligkeit der Nachbilder zu vermehren. Richtet man z. B. das Auge auf ein Fensterkreuz, welches auf dem hellen Himmelsgrund dunkel erscheint, so ist dasselbe nach dem Schliefsen des Auges noch eine kurze Zeit lang sichtbar, und geht dann in ein helles Kreuz mit dunklen Scheiben über. Kneipt man nun die Augenlieder zusammen und läfst sie schnell wieder nach, so verschwindet das Bild und zeigt

sich sogleich wieder in erhöhtem Glanze. Durch wiederholtes Zusammenkneipen und Wiedernachlassen läfst sich das Kreuz fast blendend hell erhalten. Wegen des ungleichen Verhaltens der verschiedenen Farbenstrahlen wird aber das Helle nicht rein weifs, und das Dunkle nicht rein schwarz, sondern farbig. Der Grund dieses abwechselnden Erscheinens und Verschwindens ist die Ungleichheit der Menge des Lichtes, welche durch die Augenlieder hindurch ins Auge dringt; denn die Erscheinung findet nicht statt, wenn man nach dem Betrachten des Fensters in ein dunkles Zimmer geht.

Die Irradiation und das Nebeneinander-Auftreten der Ergänzungsfarben leitet Plateau aus demselben Princip her, auf welchem die Nachbilder beruhen. Er läfst nämlich nicht blofs in der Zeit (nach einander), sondern auch im Raume (neben einander) die Oscillationen erfolgen, welche den Normalzustand der Netzhaut einleiten.

Eine Zusammenstellung aller bisher gegebenen Erklärungen über die subjektiven Farben gab Plateau in den *Annales de chimie et de physique T. LIII, p. 337 etc.*

Lichterscheinungen, welche nicht durch leuchtende oder erleuchtete Gegenstände erzeugt werden.

In dem Vorhergehenden sind nur solche Lichterscheinungen betrachtet worden, die einer äufseren Lichtquelle ihren Ursprung verdanken; denn auch die besprochenen subjektiven Farben setzen einen von Aufsen herstammenden Lichteindruck voraus.

Es giebt aber auch Lichterscheinungen, welche ganz unabhängig von der Wirkung lichtverbreitender Körper sind, und welche daher schliefsen lassen, dafs der Nervenzustand, welcher die Lichtempfindungen hervorruft, nicht ausschliefslich von den hypothetischen Aetherschwingungen erzeugt wird.

Die merkwürdigsten dieser Erscheinungen sind folgende:

1) Die elektrischen Figuren. Wenn man beide Pole einer galvanischen Säule mit der Schleimhaut des Auges oder der Augenlieder, oder wenn man den einen Pol mit einem Augenliede, den andern mit der Schleimhaut des Mundes in Verbindung setzt, so sieht man beim Oeffnen und Schliefsen der Kette Lichtblitze, und zwar ist nach Purkinje's Versuchen der blitzartige Lichtschein hell violett, wenn er vom Kupferpol herrührt, und nebelartig und von gelblicher Farbe, wenn er vom Zinkpol herrührt.

2) Das Flimmern vor den Augen nach dem Gebrauche narkotischer Mittel, namentlich der Digitalis, welches sich nach stärkerem Gebrauche zu bestimmteren Gestalten entwickelt.

3) Die Lichtfiguren, welche durch einen Druck auf die Netzhaut erzeugt werden. Schon Newton erwähnt in seiner Optik (*L. III, Quaestio XVI.*) des Faktums, dafs man beim Drücken auf die Ecke eines Auges an dem Orte, welcher der Druckstelle gegenüber liegt, eine pfauenaugenähnliche Erscheinung sähe. Sie dauert so lange, als der Druck anhält, und läfst sich sowohl im Dunkeln (von welchem Fall Newton allein spricht), als im Hellen, selbst bei offenem Auge erblicken. Bei schwachem Druck sieht man, wie Brewster angiebt, nur einen hellen Lichtfleck, selbst wenn man schon mehrere Stunden in der Dunkelheit war; bei stärkerem wird der Lichtfleck dunkel, bis er zuletzt schwarz wird, und ist von einem hellen Lichtring umgeben. Bei noch stärkerem Druck wird die Mitte des dunklen Fleckes heller, und wenn die Augen geschlossen sind, sieht man dem Bilde diametral gegenüber einen anderen hellen Fleck. Brewster folgert hieraus, dafs mit einer Ausdehnung der Netzhaut momentane Blindheit, und mit einer Compression derselben Lichtempfindung und gröfsere Empfänglichkeit für Lichtreiz verbunden sei.

Beim Druck auf das Auge weiche nämlich die Flüssigkeit des Auges aus und bilde einen Ring um die Druckstelle, und der Druck dehne von innen nach aufsen den *unter dem* Finger befindlichen Theil der Netzhaut aus,

während der Flüssigkeitsring umher die unterliegende Netzhautstelle zusammendrücke. Bei Vermehrung des Druckes leiste der gegenüberliegende Theil der Netzhaut Widerstand und so werde an beiden Enden der Druckaxe eine Compression bewirkt, welche die helle Mitte des ersten Flecks, und die lichte Stelle auf der Gegenseite erzeuge. Daher entständen auch die beiden leuchtenden Halb- oder Vollkreise, welche man nach der Nasengegend hin sieht, wenn man den Augapfel mit seinen eigenen Muskeln bewegt, weil die Netzhaut an der Stelle afficirt werde, wo die Muskeln den Augapfel ziehen. Endlich würden dadurch auch die Lichtfunken erklärt, die man zuweilen beim Niesen sieht.

Die Lichterscheinung, welche man erblickt, wenn man gleichzeitig auf beide Augen drückt, und zwar in den inneren Ecken oder in den äufseren, so dafs entweder beide Augen sich zu nähern oder von einander zu entfernen streben, beschreibt Quetelet folgendermafsen:

Zuerst erscheint ein bläulich-rother Schein, welcher bald darauf gelblich-weifs wird. Fast zu derselben Zeit trennt sich dieses Licht in kleine Rhomben, die regelmäfsig auf einem System gerader Linien vertheilt sind, welche sich in einem Punkt schneiden, und einen Raum einnehmen, der nicht über 90° beträgt. Diese gerade Linien gehen sehr schnell in hyperbolische Linien über, welche zur Axe die vertikale das Lichtfeld halbirende Richtung haben, und deren gemeinschaftliche Brennpunkte von zwei röthlichen Flecken eingenommen werden. Alsdann verschwinden auch diese, und der Grund dieses glänzenden Gemäldes zeigt ein wellenartiges Bewegen. Läfst der Druck nach, so sieht man nur noch einen von gelblichem Lichte umgebenen schwarzen Fleck, welcher mit vielen rothen Strichen bedeckt ist, die sich mit grofser Schnelligkeit bewegen. Läfst man die Augen bedeckt, so wird der Fleck mit seinem Lichtringe röthlich, und verschwindet, nach und nach schwächer werdend, erst nach geraumer Zeit.

Purkinje sah ferner zuweilen beim Druck auf das

Auge, namentlich des Morgens, auf hellem Grunde ein dunkles Bild der Netzhautgefäfse, welches mit seinen Zweigen sich über das ganze Sehfeld verbreitete. Dieselbe Figur läfst sich auch erzeugen, wenn man in einem dunklen Zimmer mit einem Kerzenlicht in etwa 6 Zoll Entfernung vor den Augen hin und her fährt. Hält man dabei beide Augen offen, so erscheint die baumartige Figur doppelt und zwar schwarz auf röthlich-braunem Grunde, und so, dafs die Aeste der dem einen Auge angehörenden Figur in die Aeste der andern Figur eingreifen. Es scheinen also hierbei durch die Erleuchtung nur die von den Adern unbedeckten Netzhauttheile erregt zu werden.

4) Die Lichterscheinungen, welche ihren Ursprung in einer Bewegung des Blutes in den Gefäfsen der Netzhaut zu haben scheinen. So sah Joh. Müller z. B. oft die vorher erwähnte Aderfigur hell auf dunklem Grunde nach dem Ersteigen einer Treppe, wenn er plötzlich in einen dunklen Raum trat, so wie beim plötzlichen Untertauchen des Kopfes im Flufs. Offenbar ist es hier der Druck, welchen die vom stärkeren Blutandrang geschwellten Adern auf die Netzhaut ausüben.

Wahrscheinlich rührt es auch von Blutbewegungen her, wenn man nach der Betrachtung einer hellen Fläche, wie z. B. des Himmels, einer Schneefläche, einer hell erleuchteten weifsen Papierfläche, ein unregelmäfsiges Durcheinander und Vorüberfahren von Punkten oder eine wirre Bewegung, wie von Dämpfen erblickt.

Eine ähnliche Bewegung dunkler geschwänzter Körper in den verschiedensten Richtungen durch einander sieht man auch zuweilen bei Vollblütigkeit oder bei Congestionen nach dem Kopfe, wenn man sich gebückt hat, und alsdann schnell sich wieder aufrichtet.

Endlich gehört hierher die bei Congestionen nach dem Kopfe zuweilen bemerkte, mit dem Pulse isochrone Veränderung der Helligkeit des Gesichtsfeldes.

5) Die scheinbare Bewegung der vor uns befindlichen Gegenstände, nach einer anhaltenden Drehung des Körpers

im Kreise, welche selbst dann eintritt, wenn wir beim Drehen die Augen geschlossen haben.

6) Die Lichterscheinungen, welche sich entwickeln, ohne dafs man eine äufsere oder innere Ursache angeben kann. Man sieht nämlich zuweilen bei geschlossenen Augen einen mehr oder weniger starken Schimmer, der sich bald von der Mitte aus in Form von Kreiswellen ausbreitet, und bald mehr wolkenartig oder fleckig erscheint *).

---

*) Eine ausführliche Darstellung der subjektiven Lichterscheinungen findet man in Purkinje's *Beobachtungen und Versuche zur Physiologie der Sinne*, *I. Prag* 1823. *II. Berlin* 1825.

Achter Abschnitt.

Meteorologische Optik.

Die optischen Erscheinungen, in welchen die Atmosphäre eine Rolle spielt, sind theils solche, in denen dieselbe unmittelbar als brechendes oder reflektirendes Mittel wirkt, theils solche, in denen sie nur der Träger auf das Licht wirkender Theilchen ist, theils solche, in denen sie nur als durchsichtiges Mittel wirkt, durch welches hindurch wir die äufseren Gegenstände sehen.

Zur ersten Klasse gehören die Absorptions-Erscheinungen der Atmosphäre; zur zweiten das Wasserziehen der Sonne, die Höfe, die Regenbogen; zur dritten die Erscheinungen der irdischen und astronomischen Strahlenbrechung.

Absorption der Atmosphäre.

Vermöchten die Lufttheilchen das Licht nicht zu reflektiren, so würden uns selbst im Sonnenschein nur die Sonne und die von der Sonne beschienenen Seiten der Gegenstände um uns her sichtbar sein; im Schatten würden wir nur dann etwas erkennen, wenn in ihn reflektirtes Sonnenlicht von umherliegenden Objekten fiele, und der Himmel würde uns dunkel erscheinen.

Das Tageslicht, und die von demselben herrührende Erleuchtung der von der Sonne nicht direkt beschienenen Gegenstände verdanken wir also der Reflektirbarkeit der Lufttheilchen.

Absorbirte nun die Luft alle Farbenstrahlen gleichmäfsig, so würde uns der Himmel weifs erscheinen. Er erscheint uns aber bei reiner Luft blau; es müssen also von den reflektirten Strahlen die blauen die am wenigsten absorbirten sein. Auf hohen Bergen hat der Himmel ein dunkleres Aussehen wegen der geringeren Menge der reflektirenden Theilchen, und das Blau ist tiefer wegen der gröfseren Reinheit der oberen Luft. Die Anwesenheit von Wassergas macht die Luft durchsichtiger und das Blau gesättigter, gerade so, als ob das Gas durch Ausfüllung leerer zwischen den Lufttheilchen befindlicher Räume eine gröfsere Gleichartigkeit und somit eine Abnahme des partiell reflektirten Lichtes erzeugte. Befinden sich dagegen Dunstbläschen in der Luft, so wird dies partiell reflektirte Licht stärker, und die Luft undurchsichtiger. Je nach der Menge des Wasserdunstes wird der Himmel blafsblau, oder indem er das von den oberen Lufttheilchen reflektirte Licht ganz abhält, weifs oder grau. Ebenso, wie in dem reflektirten Lichte das Blau vorherrscht, so herrscht im gebrochenen Lichte dessen Complementarfarbe, das gelbliche Roth vor. Hieraus erklärt sich die Erscheinung der Morgen- und Abendröthe.

Ist der Himmel rein blau, also die Luft sehr frei von Wasserdünsten, so ist auch am Abend und Morgen das von der Sonne kommende Licht, welches wegen der gröfseren Strecke, die es durch die Luft hindurch zu durchlaufen hat, ins Röthliche fällt, um so weniger mit Weifs gemischt, und die Röthe nimmt beim Sinken unter den Horizont zu, beim Steigen über den Horizont ab. Aus der bei Tage herrschenden Bläue des Himmels läfst sich also schon auf die Abendröthe schliefsen. Die Stufenfolge der Farbe des Abendhimmels (bei reiner Luft) ist beim Sonnenuntergang Weifs, Gelb, Röthlich. Durch das zwischen dem Gelb und Blau des Himmels befindliche Weifs blickt zuweilen etwas Grün hindurch. Befinden sich leichte Wölkchen am Osthimmel, so erscheinen diese schon roth, während der Abendhimmel noch gelb ist, da das von ihnen

reflektirte Licht schon eine gröfsere Strecke durch die Luft zurückgelegt hat. Ist der ganze Himmel mit einem dünnen Wolkenschleier überdeckt, so ist er mit einem leichten Purpur überzogen, dessen Grenze vom Ostpunkte ab immer höher hinaufrückt, je tiefer die Sonne unter den Horizont sinkt, und welcher dem von Osten her heraufdringenden Dunkel weicht. Leicht erklären sich die goldgelben und dann feuerrothwerdenden Ränder der Schicht-Wolken, so wie der trübe Purpurglanz der dichteren Wolken. — Die Erscheinung der Morgenröthe ist dieselbe, nur in umgekehrter Folge.

Was die Polarisationsart des Tageslichtes betrifft, so ist das von den Wolken her kommende Licht unpolarisirt, während das vom blauen Himmel reflektirte von einer gewissen Entfernung von der Sonne ab schon deutlich den Charakter, den ihm die Reflexion eingeprägt hat, trägt. Es ist nämlich nach einer durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Ebene polarisirt, und zwar erreicht die Menge des polarisirten Lichtes ihr Maximum in einem Abstande von 90° von der Sonne. In der Nähe der Sonne steht, wie Arago behauptet, die Polarisations-Ebene senkrecht auf der durch die Sonne gehenden Richtung, und der Zwischenpunkt, wo die Polarisation verschwindet, kann durch die Gegenwart von Wolken verschoben werden. Das von den Wolken durchgelassene Licht ist polarisirt, wenn man sich eine gewisse Strecke von denselben befindet, indem die zwischenliegende Luftschicht polarisirend wirkt. Auch das Mondlicht enthält eine ziemlich bedeutende Menge polarisirtes Licht, welches sich besonders leicht im ersten Viertel erkennen läfst.

Wasserziehen.

Wenn sich die Sonne hinter einem Gewölk befindet, welches durch einige Oeffnungen die Sonnenstrahlen hindurchläfst, so werden helle Streifen sichtbar, sobald die *Strahlen* auf Wassertröpfchen fallen, welche das Licht zu

um

uns reflektiren. Diese Streifen, deren Erscheinung man mit dem Namen Wasserziehen zu bezeichnen pflegt, lassen uns also den Weg der durch die Wolkenlücken dringenden Sonnenstrahlen erkennen. Sie sind wegen der grofsen Entfernung der Sonne einander parallel, scheinen uns aber, da sich ihre Distanz perspektivisch verjüngt, zu convergiren, und zwar auf der einen Seite nach dem Punkte hin, wo die Sonne steht, auf der anderen Seite unter günstigen Umständen nach einem der Sonne entgegengesetzten (180° von ihr entfernten) Punkte hin. Diese Erscheinung tritt am häufigsten bei niedrigem Sonnenstande ein, namentlich bemerkt man eine Convergenz nach dem der Sonne entgegengesetzten Punkte nur, wenn die Sonne schon untergegangen ist, oder unterzugehen im Begriff steht.

Sind die Streifen vollständig, so müssen sie in Meridianen liegen, deren Pole die beiden Convergenzpunkte sind.

Sind nämlich (Fig. 93) *cd* und *ef* zwei parallele Streifen, *g* und *h* die Punkte derselben, welche von der Sonne 90° abstehen, und sind *ahb* und *agb* Kreise, welche durch das Auge des Beobachters, *O*, durch die Sonne und durch *g* und *h* gehen, so werden die Punkte des Streifens *ef* in dem Bogen *ahb* und die Punkte des Streifens *cd* in dem Bogen *agb* gesehen, und diese Bögen schneiden sich in einer mit *ef* und *cd* parallelen Linie *ab*, da *g* und *h* von *O* gleichweit entfernt zu nehmen sind. Die Streifen scheinen also Meridiankreise zu bilden, deren Pole *a* und *b* nach der Sonne und dem derselben entgegengesetzten Punkte gerichtet sind.

Wegen des Durchmessers der Sonne erscheinen die Streifen garbenförmig.

Kleine Höfe.

Kleine Höfe (*coronae*) nennt man die farbigen Ringe, von denen zuweilen leuchtende Körper, wie die Sonnen- und Mondscheibe umgeben erscheinen. In der Regel ist nur eine Farbenfolge sichtbar, und nur unter sehr günstigen

Umständen zeigen sich drei oder vier. Der leuchtende Körper ist zunächst von einem graulich-blauen Kreise umgeben, an den ein weifslicher, dann ein gelber und endlich ein rother Ring sich schliefst. Ist noch eine zweite Farbenfolge bemerkbar, so ist dieselbe: Violett, Blau, Grün, Gelb, Roth; bei einer etwaigen dritten Folge ist nur ein verwaschenes Gelb und Roth, und bei einer vierten mattes Grün und Roth unterscheidbar. Wegen der blendenden Helle der Sonne sind sie um dieselbe sehr schwer zu erkennen; sehr deutlich si[illegible] man sie aber um das im Wasser sich spiegelnde Sonnenbild.

Dafs die Ringe das Blau nach Innen kehren, deutet auf eine zum Grunde liegende Lichtbeugung. Da die Höfe um Sonne und Mond nur si[illegible]bar sind, wenn die Luft mit leichten Dünsten er[illegible] i[illegible]er wenn dünne Wolken vor ihnen vorbeiziehen, so [illegible]gt es sehr nahe, sie der Beugung durch die Dunstkügelchen in der Atmosphäre zuzuschreiben, und in der That lassen sich die Höfe reproduciren, wenn man durch ein leicht angehauchtes Glas die Sonne, den Mond oder sonst eine Flamme betrachtet. Am gröfsten erscheinen die so erblickten Höfe bei recht leisem Hauche, weil die niedergeschlagenen Dunstbläschen dann sehr klein sind.

Um die lichtbeugende Wirkung der Dunstbläschen zu bestätigen, legte Fraunhofer zwischen zwei Plangläser eine Menge runder Stanniolscheibchen von 0,027 pariser Zoll Durchmesser, und betrachtete durch dieselben mittelst eines Fernrohrs eine runde Lichtöffnung. Er erhielt auf diese Weise Höfe von drei Farbenfolgen. Die Erscheinung blieb dieselbe, wenn er statt des undurchsichtigen Stanniols durchsichtige Glaskügelchen nahm, welche er auf ein Planglas streute. Er liefs zu diesem Behuf das durch eine Oeffnung dringende Licht mittelst eines Spiegels auf die horizontal liegende Glasplatte reflektiren, und sah ein Fernrohr auf das Bild der Oeffnung, welches au[illegible] Reflexion in einem zweiten auf der anderen Seite der G[illegible] platte befindlichen Spiegel gebildet wurde.

Hierher gehört auch der Versuch von Dove, welcher durch ein quadratisches Glasgitter (von 1140 Furchen auf einem pariser Zoll) mittelst eines Taschenperspektives nach einer Lichtflamme sehend, aufser der kreuzförmigen Beugungsfigur, welches das Gitter liefert, in schönem Glanze die Figur V mit den schiefen Winkelspektra erblickte, wenn die dem Gitter entgegengesetzte Glasseite angehaucht wurde, so dafs sich die angehauchte Seite genau wie ein zweites Gitter verhielt. Wurde die gefurchte Glasseite angehaucht, so blieben nicht sowohl die neuen Spektra aus, als auch das ursprüngliche Kreuz ganz verdunkelt wurde.

Die Sonnen- und Mondhöfe werden um so schöner, je gleicher die Dicke der Dunstkügelchen ist; sie werden um so gröfser, je kleiner ihr Durchmesser ist. Aus dem Durchmesser der Höfe läfst sich daher umgekehrt auf die Dicke der Dunstbläschen schliefsen.

Die hofartigen Ringe, welche man um den Schatten seines Kopfes sieht, wenn derselbe auf eine Wolke oder auf dichten Nebel fällt, erklärt Fraunhofer dadurch, dafs die Sonnenstrahlen durch die den Kopf umgebenden Dunstkügelchen gebeugt, und alsdann von den in der Nähe des Schattens befindlichen Dunstbläschen reflektirt würden.

Grofse Höfe und die mit diesen zusammenhängenden atmosphärischen Lichterscheinungen.

Grofse Höfe (*halones*) nennt man gröfsere regenbogenartig gefärbte Kreise, in deren Mittelpunkt die Sonne oder der Mond liegt. Der Durchmesser des am häufigsten erscheinenden ist ungefähr 44°, der eines anderen 88°, und zwar kehren sie sämmtlich ihre rothe Seite dem leuchtenden Himmelskörper zu. Aufser diesen ist von Hevelius einmal ein weifslicher Hof von 180° Durchmesser gesehen worden.

Mit diesen Ringen zugleich treten oft andere durch das Gestirn gehende weifse Kreise, und die Höfe berührende farbige Bögen auf, und in den Durchschnittspunkten

der Kreise oder in deren Nähe bilden sich intensivere Flecke von der Gröfse des leuchtenden Gestirns, welche man Nebensonnen und Nebenmonde nennt. Diese Flecke sind wie die Höfe regenbogenartig gefärbt oder weifs, je nachdem sie in dem Durchschnitt eines Hofes oder in der Durchkreuzungsstelle weifser Kreise stehen.

Eine der vollständigsten Erscheinungen war die von Lowitz beschriebene, welche am 29. Juni 1790 in St. Petersburg gesehen wurde *).

Statt des kleinsten Hofes (von 22° Halbmesser) erschienen dort zwei sich oben und unten durchschneidende Kreise *bcde* (Fig. 94) (einigemal sind sogar drei beobachtet worden). Diese wurden umgeben von dem doppelt so grofsen Hofe *fghik*.

Berührende mit dem Roth der Sonne zugekehrte Farbenbögen waren 1) bei *e* der Bogen *kei* (zuweilen findet sich ein ähnlicher bei *c*), 2) bei *g* der Bogen *qgr* (welcher oft gesehen wird, selbst wenn der Hof *fghik* fehlt), 3) bei *r* und *u* die sehr selten vorkommenden Bögen *srs* und *tut*, welche von *g* 120° entfernt lagen. Von den weifsen Kreisen, welche stets mit dem Gestirn von gleicher Breite sind, wurde beobachtet 1) ein horizontaler durch die Sonne gehender Kreis, welcher der gewöhnlichste ist, und in der Regel mit den Höfen verbunden zu sein pflegt. 2) zwei selten vorkommende Kreise, welche, 30° von der Vertikal-Ebene entfernt, sich unter einem Winkel von 60° im Horizontalkreise der Sonne gegenüber schnitten, und sich in dem blendend hellen Theil der kleineren Höfe bei *c* begegneten. Brandes vermuthet auf Grund anderer Beobachtungen, wo diese Kreise sich in der Sonne selbst durchkreuzten, dafs dies auch hier bemerkt sein würde, wenn sie deutlich genug hätten verfolgt werden können. Sehr häufig ist noch ein durch die Sonne gehender weifser Vertikalkreis, welcher oft allein oder mit dem Horizontalkreise zu einem Kreuz verbunden selbst ohne Höfe beobachtet wurde.

*) *Nov. Act. Acad.* Petrop. Tom. VIII, p. 384.

Von den Nebensonnen, welche sämmtlich in dem Horizontalkreise sich befanden, lagen zwei farbige bei *m* und *n* etwas aufserhalb des kleineren Hofes, von welchen zwei farbige Bögen, die sonst nie weiter beobachtet sind, *mp* und *no* ausgingen; zwei andere weifse in gröfserer Entfernung von der Sonne, wahrscheinlich da, wo der nicht gesehene dritte Hof von 90° Halbmesser den Horizontalkreis geschnitten haben würde; und eine fünfte weifse Nebensonne der Sonne gegenüber im Durchschnittspunkte der drei weifsen Kreise. Die letzten drei Nebensonnen nennt man wegen ihrer Lage gegen die Sonne auch wohl Gegensonnen (*anthelii*).

Die Nebensonnen werden wegen ihrer gröfseren Helligkeit oft ohne Kreise und Bögen, oft blofs mit dem Horizontalkreise oder mit dem durch die Sonne gehenden weifsen Kreuz gesehen.

Was die Theorie dieser Erscheinungen betrifft, so mögen nur die befriedigenderen Erklärungsarten hier angeführt werden.

Am gangbarsten ist die Ableitung aus der Wirkung in der Luft schwebender Eiskrystalle auf das Licht. Schon Mariotte erklärte die Höfe aus der Brechung in Eisprismen, und diese Erklärung wurde von Venturi und Fraunhofer weiter ausgebildet. Den weifsen Horizontalkreis und den Vertikalkreis erklärte Fraunhofer aus der Beugung durch Eisprismen, eine Erklärung, welche sich mit dem gleichzeitigen Auftreten beider Kreise nicht wohl vereinigen läfst. Venturi erklärt sie durch Reflexion an jenen Prismen. Und ebenso erklärt Brandes die übrigen durch die Sonne (oder den Mond) gehenden weifsen Kreise. Die Berührungskreise läfst Fraunhofer durch Brechung der von den Punkten des Horizontalkreises kommenden Strahlen entstehen, Venturi dagegen durch Brechung in den Zuspitzungen der sechsseitigen Eisprismen, und Brandes durch Brechung in Seitenflächen horizontaler dreiseitiger Prismen.

Hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit des Schwebens von *Eistheilchen in der Luft* beruft man sich auf das häufigere

Vorkommen der Erscheinung im Winter und in nördlichen Gegenden, auf die flimmernden Schneeenadeln, die man zuweilen im Winter selbst bei heiterem Himmel wahrnimmt, und auf die Kälte der höheren Luftregionen, welche auch im Sommer die Erscheinung möglich mache. Die erforderliche Nähe der Eisnadeln unter sich hat wegen der Entfernung, in welcher man sie voraussetzt, nichts Auffallendes.

1) Die weifsen durch die Sonne gehenden Kreise. Denkt man sich eine durch die Mitte der Sonne und das Auge gehende Ebene, und prismatische Eisnadeln, deren Axen senkrecht gegen diese Ebene gerichtet sind, so verhalten sich dieselben wie ein cylindrischer Spiegel. Sind die Nadeln in sehr grofser Menge vorhanden, und haben ihre Seitenflächen unterschiedslos alle möglichen Lagen, so befinden sich eine grofse Zahl in solcher Stellung, dafs die von der Sonne ausgehenden Strahlen von ihnen ins Auge reflektirt werden. Es werden daher eine unzählige Menge Sonnenbilder sichtbar, welche sämmtlich von der oben gedachten Ebene halbirt werden, und einen leuchtenden Bogen oder einen leuchtenden Kreis bilden, welcher die Breite der Sonne hat.

Ist die Ebene vertikal, so erscheint der Kreis gleichfalls vertikal. Um dies als Grund des Vertikalkreises anzunehmen, mufs man die Nadeln sich von einem leichten in horizontaler Richtung fortwehenden Winde fortgeführt und in die horizontale Lage gebracht denken. Es läfst sich auch denken, dafs aufser den Nadeln auch dünne Eistäfelchen (sehr niedrige Prismen von breiter Grundfläche) vorhanden sind, welche im Fallen bei ruhiger Luft ihre Flächen vertikal kehren. Doch ist zu erinnern, dafs diese Erklärungsart einen gegen die Vertikal-Ebene senkrechten Luftzug voraussetzt. Ist derselbe schief gegen diese Ebene gerichtet, so hört der Kreis auf, durch das Zenith zu gehen. — Warum erscheinen aber nie solche Kreise? Oder fehlt es nur an Beobachtungen derselben? — Soviel ist indefs gewifs, dafs Vertikalkreise meist nur dann erscheinen, wenn die Sonne (oder der Mond) im Horizont steht, in welchem Falle bei leichter Neigung der Prismen gegen die

Vertikal-Ebene schiefe Kreise in der Nähe des Gestirns nur unmerklich vom Vertikalkreise abweichen würden.

Ist die Ebene 30° gegen die Vertikal-Ebene geneigt, so erhält man einen der geneigten Kreise in der von Lowitz beschriebenen Erscheinung. Zur Erklärung dieser Kreise nahm Brandes die Zwillingsform der Eisnadeln zu Hilfe, in welcher sich dieselben unter Winkeln von 60° an einander setzen. Das eine Individuum stelle sich beim Fallen vertikal, und dadurch erhalte das zweite die nöthige Neigung gegen den Horizont. Damit ist zugleich das gleichzeitige Erscheinen eines zweiten Kreises erklärt, welcher, auf der andern Seite des Vertikalkreises liegend, mit diesem einen Winkel von 30°, also mit dem ersten schiefen Kreise einen Winkel von 60° bildet, und diesem im weifsen Horizontalkreise begegnet. Die Erscheinung dieser Kreise erfordert aber, dafs die Ebene, in welcher sich die beiden Krystall-Individuen befinden, senkrecht gegen die Vertikal-Ebene sei; dafs also etwa ein leichter Luftzug senkrecht gegen die letzte Ebene existire. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so hören die Kreise auf, sich im Horizontalkreise zu schneiden. — Warum sind nun solche Kreise nie bemerkt? — Die in Rede stehenden Kreise sind übrigens nur sehr sparsam beobachtet, und es fehlt auch an genaueren Messungen ihrer gegenseitigen Neigung.

Haben die Eisnadeln eine vertikale Lage, haben sie also die Lage, welche sie im Fallen bei ruhiger Luft annehmen, so mufs ein horizontaler weifser Kreis erscheinen, und diese natürlichste Lage der Krystalle stimmt auch sehr gut mit der Häufigkeit der Erscheinung.

Das gleichzeitige Erscheinen des horizontalen und des vertikalen Kreises liefse sich allenfalls aus der Annahme herleiten, dafs in der einen Luftschicht ein Luftzug herrsche, während eine andere in vollkommener Ruhe sich befinde. Die Annahme von Eistäfelchen macht diese Bedingung unnöthig.

2) Höfe. Soll der erste Hof genügend durch Brechung in *Eisprismen* erklärt werden, so mufs man anneh-

men, daſs eine hinreichende Menge derselben mit ihrer Axe senkrecht auf der vom Auge nach der Sonne gehenden Richtung stehe.

Ist ABC (Fig. 95) der Durchschnitt eines dieser Prismen, sa ein Sonnenstrahl, und, wenn das Licht homogen ist, abO die Richtung, welche derselbe durch die Brechung annimmt, so sieht ein in O befindliches Auge ein Sonnenbild in der Richtung Ob. Ist ferner $OS \parallel as$, so ist bOS der Winkelabstand des Bildes von der Sonne. Dreht man nun das Prisma um die Kante A, und rückt es zugleich höher oder niedriger so, daſs der austretende Strahl wiederum nach O gelangt, so ändert sich auch der Winkel bOS, so wie die Neigung der Ebene bOS gegen den Horizont, und es entstehen höhere oder niedrigere Sonnenbilder, die sich zu einem hellen gleichfarbigen Schein vereinigen. Liegt aber das Prisma so, daſs die Ablenkung durch die Brechung, also der Winkel bOS ein Kleinstes wird, so kann man dasselbe selbst um einige Grade drehen, ohne daſs der Winkel bOS merklich sich ändert. Von den Stellen, welche dem kleinsten Werth von bOS entsprechen, werden daher die meisten Prismen Licht ins Auge senden, und diese Stellen müssen also vorzugsweise stark erhellt erscheinen. Da diese Stellen alle einen gleichen Abstand von der Sonne haben, so bilden sie einen Kreis, dessen Radius der kleinsten Ablenkung, welche wir durch φ bezeichnen wollen, gleich ist. Unter einem kleineren Winkel als φ kommt gar kein Licht durch Brechung ins Auge, und es muſs daher der Kreis nach innen scharf begrenzt sein und am stärksten gegen den Grund contrastiren.

Ist nun das Licht weiſs, so erscheinen statt eines einfarbigen Ringes verschiedenfarbige, von denen der rothe der kleinste ist, da φ für diese Farbe den geringsten Werth hat. Nun ist aber nach p. 120 die kleinste Ablenkung, insofern der brechende Winkel in Eisprismen 60° ist, gegeben durch:

$$\sin \tfrac{1}{2}(\varphi + 60) = n \sin 30^0,$$

also, wenn man für die mittleren Strahlen $n = 1{,}31$ annimmt, $\varphi = 21^0\ 50'\ 20''$, und für die rothen Strahlen, $n = 1{,}306$ annehmend, $\varphi = 21^0\ 32''$. Dieser Winkel stimmt sehr gut mit der Erfahrung, da sämmtliche Messungen Werthe zwischen 21^0 und $23\frac{1}{3}^0$ geben.

Hierzu kommt, dafs Arago das Licht des Hofes senkrecht gegen seinen Halbmesser polarisirt fand, ein Beweis, dafs er von gebrochenem Lichte gebildet wird.

Dafs, wenn die Prismen alle möglichen Lagen haben, eine hinreichende Zahl zur Bildung des Hofes vorhanden sein mufs, folgt daraus, dafs erst eine Aenderung des Winkels saC um 8^0, so wie auf der anderen Seite eine 10^0 betragende Abweichung des Winkels, den die Kante A mit der Richtung OS bildet, vom Rechten eintreten mufs, wenn der Ringhalbmesser um einen halben Grad zunehmen soll.

Endlich ist das contrastirende Dunkel an der Innenseite des Ringes ein Beleg für die Richtigkeit der Erklärung.

Wenn durch diejenigen Prismen, welche die Sonnenstrahlen um ein Kleinstes ablenken, der durch das gebrochene Licht erhellte Theil des Himmels nach innen (d. h. nach der Sonne zu) eine schärfere Begrenzung erhält, so mufs eine zweite Begrenzung da stattfinden, wo diejenigen gebrochenen Strahlen herkommen, die um ein Gröfstes abgelenkt sind. Dies sind diejenigen Strahlen, welche unter einem Winkel von nahe 90^0 eintreten oder austreten. Die Prismen haben in diesem Fall die Lage $A'B'C'$ oder die Lage $A''B''C''$ (Fig. 95).

Da für die mittleren Strahlen, wenn man $n = 1{,}31$ setzt, der zu einem Einfallswinkel von 90^0 gehörende Brechungswinkel $49^0\ 46'$ ist, so hat man zur Bestimmung der Ablenkung in der Formel p. 120, nämlich in

$$\sin(D + i + \alpha) = \sin\alpha + 2n \sin\tfrac{1}{2}i \cos(\alpha' + \tfrac{1}{2}i)$$

nur $\sin\alpha = -1$, $\alpha' = -49^0\ 46'$ und $i = 60$ zu setzen, welches für die Ablenkung $43^0\ 28'$ liefert. Für die rothen Strahlen, $n = 1{,}316$ setzend, ergiebt sich $43^0\ 9'$.

Dieser Winkel stimmt sehr gut mit dem Halbmesser

des **zweiten Hofes**. Doch eine kleine Aenderung der Lage des Prismas bringt in dem Ablenkungswinkel eine bedeutende Abänderung hervor, das gebrochene Licht wird also dort nicht durch gleichfarbiges von den Prismen abweichender Lage unterstützt, so dafs aus dem weifslichen Licht, das zwischen beiden Höfen sich befindet, nur das äufserste, dem Blau und Violett entsprechende hervortauchen würde. Jene Prismen liefern daher nur einen blauen Ring, deren innerer Rand vom weifslichen Brechungslicht, und deren äufserer Rand vom direkten Himmelslicht erleuchtet wird.

Um das sehr deutliche Roth im Hofe zu erklären, hat man nach anderen Schneeformen gesucht, welche das von den erwähnten Prismen stammende Licht verstärken sollten. **Venturi** nahm den 6seitigen Schneestern (Fig. 96) zu Hilfe, und liefs die Sonnenstrahlen in solchen Richtungen $Sdefg$ gebrochen werden, dafs $eb = fb$ wird. Um aber den erforderlichen Ablenkungswinkel zu erhalten, mufste er den Winkel der Prismen (bei a und c) von 60^0 auf $55-56^0$ herabsetzen, eine Annahme, die man nicht leicht statuiren möchte.

Weniger willkührlich ist die Voraussetzung, welche **Brandes** macht, dafs das Licht des zweiten Hofes von Strahlen gebildet werde, welche, nachdem sie von einem Prisma unter dem Winkel der kleinsten Ablenkung gebrochen worden sind, eine neue Brechung unter demselben Winkel von einem anderen Prisma erlitten haben. Bei dieser Supposition bringt eine selbst 10^0 abweichende Lage des einen oder des anderen Prismas nur einen unerheblichen Unterschied hervor, so dafs das so entstehende Farbenlicht getrennt und intensiv genug ist, um deutlich gefärbte Ringe sichtbar zu machen. Auch fallen die Strahlen ziemlich genau mit den entsprechenden Strahlen gröfster Ablenkung zusammen. Legt man z. B. die Strahlen zum Grunde, deren Brechungsverhältnifs

1,302; 1,306; 1,310; 1,314; 1,320

ist, so erhält man als Halbmesser der Ringe, welche durch Brechung bei gröfster Ablenkung entstehen,

42° 51′; 43° 9′; 43° 28′; 43° 47′; 44° 15′,

und als Halbmesser der Ringe, welche durch Brechung in zwei Prismen entstehen:

42° 30′; 43° 4′; 43° 40′; 44° 17; 45° 12′.

Den dritten Hof schreibt man einer totalen Reflexion im Innern der Prismen zu. Fällt nämlich (Fig. 95) das Licht unter einem Winkel von 13° 28′ ein, so werden die mittleren Strahlen nach der Brechung in a''' bei b''' total unter einem Winkel von 49° 46′ reflektirt, und der Ablenkungswinkel $b'''OS$ wird 86° 20′, welcher mit dem Halbmesser des dritten Hofes übereinstimmt. Der einzige Einwurf ist, dafs der Hof weifs gewesen sein soll, während er der Annahme zufolge farbig erscheinen müfste.

3) Die Nebensonnen und Nebenmonde. Die Nebensonnen und Nebenmonde, welche sich da befinden, wo die Höfe von weifsen Kreisen geschnitten werden, bedürfen weiter keiner Erklärung, da nothwendig das Licht des Hofes von dem schneidenden Kreise stärker erhellt werden mufs, so dafs dieselben selbst dann erscheinen, wenn die Höfe und Kreise nicht sichtbar sind. Zuweilen stehen aber die Nebensonnen und Nebenmonde im Horizontalkreise etwas aufserhalb der Höfe. Dies findet nur bei hohem Stande des Gestirns statt, und Venturi schreibt sie daher der nicht in dem Hauptschnitt der (vertikalen) Prismen erfolgenden Brechung zu. Brandes berechnete den aus dieser Annahme folgenden Abstand der Nebensonne von der Sonne für das Minimum der Ablenkung. Bezeichnet man diesen Abstand durch φ, den Azimuthalabstand von der Sonne durch φ', und die Sonnenhöhe durch h, so sind die von ihm gefundenen Bestimmungsgleichungen:

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}\cos(120 - 2\varphi'), \quad \cos\varphi' = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 h}}{2n\cos h}.$$

Dies giebt für $h = 30°$, $\varphi = 24° \, 47'$ und für $h = 45°$, $\varphi = 29° \, 42'$, und daher als Abstand vom Hofe respective 2° 57′ und 7° 52′.

Hieraus erhellt die Möglichkeit zweier Nebensonnen neben *den normalen* im Hofe selber sich befindenden, *wenn die Sonne* nicht in der Nähe des Horizonts steht,

indem jene durch genau vertikale Prismen, diese durch Prismen, deren Axe gegen die Brechungs-Ebene senkrecht steht, erzeugt werden. In der That sind auch von Cassini einmal die beiderlei Nebensonnen in einem gegenseitigen Abstande von 4° beobachtet worden.

Ganz Aehnliches läfst sich von den Nebensonnen des zweiten und dritten Hofes sagen.

4) Berührungskreise. Nach Fraunhofer's Meinung bilden die von helleren Stellen des Horizontalkreises kommenden Strahlen wie die direkten Sonnenstrahlen Höfe um sich, deren obere (oder untere) Durchschnittspunkte Kreise bilden, welche die wahren Höfe in ihrem obersten (oder untersten) Punkte berühren. Dies setzt aber voraus, dafs diese Berührungskreise dem Horizontalkreise parallel sind, welches entschieden für die untersten nicht der Fall ist, und selbst für die oberen Bögen nicht genau genug stimmt. Brandes hat sie aus der Brechung durch horizontale Prismen abgeleitet, die schief gegen die durch Sonne und Auge gehende Vertikal-Ebene liegen. Dies führt auf Bögen, die nicht genau von Kreisform sind; die Resultate bedürfen daher noch einer Bestätigung durch künftige genauere Beobachtungen.

Die Berührungskreise *srs* und *tut* (Fig. 94) lassen sich auf dieselbe Weise durch Eisnadeln erklären, welche an den vertikalen unter einem Winkel von 60° angesetzt sind.

Aufser den bisher erwähnten Bögen ist zuweilen ein elliptischer Bogen bemerkt worden, welcher zwischen dem ersten und zweiten Hofe liegend, seine concave Seite der Sonne zukehrt, und den oberen Berührungskreis des ersten Hofes überspannt.

Regenbogen.

Die Regenbogen werden nur alsdann gesehen, wenn herabfallender Regen von der Sonne beschienen wird, und haben ihren Mittelpunkt stets in einem von der Sonne 180° *abstehenden* Punkte. Sie befinden sich daher immer der

Sonne gegenüber. Der gewöhnliche oder Haupt-Regenbogen hat stets seine rothe Seite nach aufsen, seine blaue Seite nach innen gekehrt. Aufser ihm sieht man zuweilen einen zweiten gröfseren, mit ihm concentrischen Regenbogen, Neben-Regenbogen genannt, dessen Farben in umgekehrter Ordnung folgen. Endlich reihen sich an den inneren Rand des ersten und an den äufseren Rand des zweiten Regenbogens oft noch eine gröfsere oder geringere Anzahl schmälerer und kürzerer Bögen, die aber meist nur einen Wechsel von Grün und Violett zeigen, und welche man mit dem Namen überzähliger Regenbogen belegt hat. Befindet man sich auf einem hohen Standpunkte, so sieht man den Bogen sich über die Felder und die auf denselben befindlichen Gegenstände forterstrecken — ein Beweis, dafs es die Regentropfen, nicht die Wolken sind, welche ihn erzeugen.

Der Haupt-Regenbogen entsteht durch eine zweimalige Brechung und eine einmalige Reflexion in den Regentropfen.

Stellt nämlich *ABD* (Fig. 97) einen Regentropfen vor, dessen Mittelpunkt in *C* liegt, und *SA* einen der auf denselben fallenden Sonnenstrahlen, so wird, wenn *SA* nach *D* hingebrochen, von dort nach *B* reflektirt wird und in der Richtung *BO* austritt, für ein in *O* befindliches Auge in der Richtung *OB* ein Bild des Punktes *S* der Sonne sichtbar sein.

Zieht man nun *Os* parallel mit *SA*, so ist *Os* die Richtung, in welcher derjenige Punkt liegt, welcher dem Punkt *S* der Sonne gegenüber steht, und *BOs* ist der Winkelabstand dieses Punktes von dem in *OB* gesehenen Bilde. Dreht man ferner die Figur um *Os* als Axe, so nimmt der Tropfen *ABD* nach und nach die Stelle solcher Regentropfen ein, auf welche die von *S* kommenden Strahlen, unter demselben Winkel einfallend, nach *O* hingelangen. Wirken nun alle Tropfen, welche solche Lagen haben, zusammen, so sieht man in *O* einen erhellten Kreis, dessen Radius *BOs* ist.

Fällt ferner von *S* aus ein anderer Sonnenstrahl, wel-

cher natürlich mit *SA* parallel ist, in *a* auf, und nimmt derselbe nach der Brechung in *a* den Weg *adbo*, so sieht auch in *o* ein Auge ein Bild des Punktes *S* in der Richtung *ob*, und sein Winkelabstand von dem Gegenpunkt des Punktes *S* ist, wenn $os_1 \mp Sa$ ist, gleich bos_1, also kleiner als vorher. Sollte nun in *O* ein Bild von *S* gesehen werden, welches von Strahlen gebildet wird, die unter denselben Winkel *SaC* auf die Wassertropfen fallen, für welches also der obgedachte Winkelabstand bos_1 ist, so müssen die Tropfen eine niedrigere Lage haben; und befinden sich rings um *Os* solche Tropfen in einem Kreise, dessen Radius bos_1 ist, so sieht man innerhalb des vorerwähnten Kreises einen kleineren concentrischen Ring.

Da es nun aufser *A* und *a* noch unzählige andersliegende Punkte auf *ABD* giebt, in welchen die parallel mit *SA* einfallenden Sonnenstrahlen auf eine gleiche Weise gebrochen und reflektirt werden, so erscheinen in *O* eine unzählige Menge concentrischer Ringe, die sich an einander reihen, und einen hellen breiten Ring bilden, dessen innere Grenze da ist, wo *BOS* seinen kleinsten, und dessen äufsere Grenze da ist, wo *BOS* seinen gröfsten Werth erreicht. Man überzeugt sich leicht, dafs *BOS* bis zu Null abnehmen kann, dafs also die innere Grenze fortfällt, und nur eine grofse helle Scheibe erscheinen wird. Es ist aber der gröfste Werth von *BOS* um so gröfser, je geringer die Brechbarkeit der Strahlen ist. Enthält also das einfallende Licht Strahlen von allen möglichen Farben, wie das Sonnenlicht, so wird die von dem rothen Licht entstehende Scheibe die gröfste sein, und die der übrigen Farben überragen, so dafs die Scheibe, deren Inneres durch die Farbenüberdeckung weifs sein mufs, mit einem rothen Rande gesäumt erscheinen wird.

Ist aber *SA* diejenige Strahlenlage, für welche *BOS* einen gröfsten Werth hat, so fällt für einen mäfsig weit von *SA* entfernten Strahl *Sa* der Punkt *d* mit *D* noch sehr nahe zusammen (da Maxima und Minima die Eigenschaft haben, dafs in ihrer Nähe die Variationen am lang-

samsten erfolgen); die reflektirten Strahlen werden daher bei *B* fast ebenso austreten, wie sie bei *A* eingefallen sind, d. h. die in der Nähe von *B* austretenden Strahlen werden nahe parallel sein, und das in *BO* austretende Licht bedeutend verstärken. Der Rand der oben erwähnten Scheibe wird folglich von sehr dichten Strahlen gebildet, so dafs die Ränder der verschiedenfarbigen Scheiben wegen ihrer Intensität neben einander deutlich sichtbar sind, und dort eine Reihenfolge von farbigen Ringen zeigen, wie man es im Regenbogen bemerkt.

Der Halbmesser der Scheiben, und mithin der Halbmesser der farbigen Ringe im Regenbogen läfst sich auf elementarem Wege folgendermafsen finden.

Bezeichnet man mit α den Einfallswinkel, mit α' den Brechungswinkel, mit 2ϱ den Halbmesser (*BOs*) eines Ringes, so ist, wenn *SA* und *OB* so weit verlängert werden, bis sie sich in *E* schneiden, $SAC = 180 - \alpha$, $CAD = CDA = \alpha'$, $SEO = EOs = 2\varrho$, folglich da $EAD = \alpha - \alpha'$ ist,

$$ADC = \alpha' = \alpha - \alpha' + \varrho, \text{ mithin } \varrho = 2\alpha' - \alpha.$$

Ist nun für einen benachbarten Strahl der Einfallswinkel $\alpha + \delta$, und der Brechungswinkel $\alpha' + \delta'$, so ist, wenn α zu einem Maximum von ϱ gehört, also ϱ auch für die Nachbarstrahlen sich nur unmerklich ändert,

$$\varrho = 2(\alpha' + \delta') - (\alpha + \delta) = 2\alpha' - \alpha + 2\delta' - \delta,$$

mithin, da $2\alpha' - \alpha = \varrho$ ist, $2\delta' - \delta = 0$, d. h.

$$\delta = 2\delta'.$$

Bezeichnet man ferner das Brechungsverhältnifs durch n, ist also $\sin\alpha' = n \sin\alpha'$ und $\sin(\alpha + \delta) = n \sin(\alpha' + \delta')$, d. h.

$$\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta = n\sin\alpha'\cos\delta' + n\cos\alpha'\sin\delta',$$

oder, wenn man in dem ersten Gliede für $n\sin\alpha'$ seinen Werth $\sin\alpha$, und wegen der Kleinheit des δ und δ', $\cos\delta = \cos\delta' = 1$, $\sin\delta = \delta$ und $\sin\delta' = \delta'$ setzt,

$$\sin\alpha + \delta\cos\alpha = \sin\alpha + n\delta'\cos\alpha', \qquad \text{d. h.}$$

$$1)\quad \delta\cos\alpha = n\delta'\cos\alpha',$$

oder wegen $\delta = 2\delta'$,

$$2\cos\alpha = n\cos\alpha'.$$

Man hat daher $n^2 cos^2 \alpha' = 4 cos^2 \alpha$, welche Gleichung zu $n^2 sin^2 \alpha' = sin^2 \alpha$ addirt,

$$4 cos^2 \alpha + sin^2 \alpha = n^2$$

giebt, oder wegen $sin^2 \alpha = 1 - cos^2 \alpha$,

$$cos^2 \alpha = \tfrac{1}{3}(n^2 - 1).$$

Für die mittleren Strahlen, $n = 1{,}3356$ setzend, erhält man aus dieser Formel $\alpha = 59^\circ\ 15'\ 35''$, und hieraus den Halbmesser des Regenbogens $2\varrho = 41^\circ\ 42'$. Für die violetten Strahlen, $n = 1{,}33888$ nehmend, wird $\alpha = 59^\circ\ 3'\ 50''$ und $2\varrho = 41^\circ\ 13'\ 40''$; und für die rothen Strahlen, $n = 1{,}33209$ nehmend, wird $\alpha = 59^\circ\ 27'\ 50''$, $2\varrho = 42^\circ\ 12'$, so dafs die Breite des Regenbogens etwa 1° wird. Diese Breite ist aber in der Wirklichkeit um den Sonnendurchmesser d. h. um etwa 30″ gröfser, weil wegen der Gröfse der Sonnenscheibe jeder Punkt derselben einen Regenbogen für sich bildet, die sich zu einem breiteren Bande über einander lagern. Aus diesem Grunde treten auch nur die äufsersten (rothen und blauen) Ringe in gröfserer Reinheit hervor.

Da ferner auf die beschriebene Weise keine Strahlen unter gröfseren Winkeln ins Auge treten, als uns der rothe Rand des Regenbogens erscheint, so wird der äufsere (rothe) Rand schärfer begrenzt sein, als der innere (violette).

Ferner erhellt, dafs der Regenbogen um so höher stehen wird, je niedriger die Sonne steht, und dafs bei einer Sonnenhöhe von 42° gar kein Regenbogen mehr möglich ist. Beim Aufgange und Untergange der Sonne, wenn dieselbe sehr roth erscheint, wird die Atmosphäre nur von rothem und gelbem Licht erhellt, der Regenbogen wird also in diesem Falle auch nur diese Farben zeigen können.

Der Neben-Regenbogen wird von solchen Strahlen gebildet, welche in den Regentropfen zwei Brechungen und zwei Reflexionen erlitten haben. Ist z. B. *ABDE* (Fig. 98) einer der Tropfen, in *C′* sein Mittelpunkt, und wird der in *A* nach *B* hin gebrochene Strahl in *B* nach *D*, und in *D* nach *E* reflektirt, so dafs er in der Richtung *EO* austritt, so erscheint dem Auge in *O* ein Bild des Punktes *S* in

in der Richtung OE. Ist $Os \pm SA$, so hängt der Winkel EOs vom Winkel SAC ab, und es wird das in OE gesehene Bild von S zu einem intensiver erhellten Kreise gehören, wenn EOs ein Minimum wird, weil alsdann selbst bei merklicher abweichenden Einfallswinkeln die austretenden Strahlen die Richtung EO annehmen. Dieser kleinste Werth von EOs ist daher der Halbmesser eines Regenbogens, der sich ähnlich, wie vorher, berechnen läfst.

Ist nämlich wiederum dieser Halbmesser $EOs = EFA = 2\varrho$, so hat man $CAB = CBA = CBD = BDC = CDE = DEC = \alpha'$, also den Bogen $EDBA = 3.180^0 - 6\alpha'$, und daher $EGA = 6\alpha' - 180^0$, folglich $FCA = 3\alpha' - 90^0$, und wegen $CFA = 180^0 - FAC - ACF$, da $CFA = \varrho$ und $FAC = 180 - \alpha$ ist,

$$\varrho = \alpha - 3\alpha' + 90^0.$$

Ist nun wieder für einen benachbarten Strahl der Einfallswinkel $\alpha + \delta$ und der Brechungswinkel $\alpha' + \delta'$, so erhält man wie vorher, weil ϱ sich nur unmerklich ändert,

$$\varrho = (\alpha + \delta) - 3(\alpha' + \delta') + 90, \text{ mithin } \delta = 3\delta',$$

welches in (1) substituirt giebt:

$$3\cos\alpha = n\cos\alpha'.$$

Da hiernach $9\cos^2\alpha = n^2\cos^2\alpha'$ ist, so erhält man durch Addition dieser Gleichung zu $\sin^2\alpha = n^2\sin^2\alpha'$

$$\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha = n^2,$$

also

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{8}(n^2 - 1).$$

Für die violetten Strahlen ergiebt sich aus dieser Formel $\alpha = 71^0\ 39'$, mithin wird der Halbmesser 2ϱ des violetten Ringes $52^0\ 24'$; für die rothen Strahlen ergiebt sich ferner $\alpha = 71^0\ 52'$, also für den Halbmesser 2ϱ des rothen Bogens $50^0\ 38'$. Das Roth ist also bei diesem Regenbogen nach innen gekehrt.

Für eine dreimalige Reflexion in den Tropfen würde sich $\cos^2\alpha = \frac{1}{15}(n^2 - 1)$ ergeben, also ein Regenbogen, der nur 41^0 von der Sonne entfernt wäre. Ein solcher ist zweimal von Bergmann beobachtet, und sein Halbmesser auf 42^0 angegeben worden.

Aufser diesen Bögen sieht man auch zuweilen über ruhigem Wasser Regenbogen, welche ihre concave Seite nach oben kehren, und welche auf dieselbe Weise durch die vom Wasser reflektirten Sonnenstrahlen in den Regentropfen gebildet werden.

Diese Regenbogen treffen die des direkten Lichtes im Horizont.

Die überzähligen Regenbogen, da sie nur innerhalb des Haupt-Regenbogens und aufserhalb des Neben-Regenbogens erscheinen, müssen durch Strahlen gebildet werden, welche ebensolche Brechungen und Reflexionen erlitten haben; d. h. sie müssen ihren Ursprung den oben betrachteten Ringen verdanken, von denen die äufsersten den Haupt- und Neben-Regenbogen bilden.

Jene Ringe können einmal von Strahlen herrühren, deren Einfallswinkel kleiner ist, als der zum Maximum oder Minimum gehörige, ein zweitesmal von Strahlen, deren Einfallswinkel gröfser ist. Die Strahlen, welche zwei solchen Einfallswinkeln entsprechen, kommen daher parallel ins Auge, und können interferiren. Einer solchen Interferenz schreibt Young die Farben der überzähligen Regenbogen zu (siehe Gilbert's Annalen XXXIX, p. 272). Hiernach können die Farben nur deutlich hervortreten, wenn die Gangunterschiede nicht zu grofs sind, die Tropfen also eine gewisse Gröfse nicht überschreiten, und wenn die Tropfen einander gleich sind. Die Nothwendigkeit der Erfüllung dieser Bedingungen dürfte der Grund sein, weswegen die Farben nur in seltneren Fällen sichtbar sind. Ja, umgekehrt läfst sich aus dem Vorhandensein und aus der Breite der überzähligen Bögen auf die Gröfse der Tropfen und auf deren Gleichheit schliefsen.

Die bedeutendere Gröfse der Tropfen in den Tropengegenden, und ihre Abnahme mit der Entfernung von der Erde stimmt sehr gut mit der Erfahrung, dafs sie in den Tropen fast nie, und bei uns bei tief stehender Sonne am schönsten gesehen werden.

Diese Regenbogen lassen sich nachbilden, mit einem

cylindrischen Wasserstrahl, auf den man Sonnen- oder Kerzenlicht fallen läfst. Hat derselbe 1^{mm} Durchmesser, so lassen sich auf der inneren Seite des Hauptbogens 16, auf der äufseren Seite des Nebenbogens 9 überzählige Bogen erkennen.

Astronomische Strahlenbrechung.

Da die atmosphärische Luft nicht überall dieselbe Dichtigkeit, also auch nicht überall dasselbe Brechungsverhältnifs hat, so ist der Weg der die Luft durchlaufenden Lichtstrahlen im Allgemeinen keine gerade Linie, und da wir die Punkte, von denen das Licht ausgeht, in der Richtung sehen, in denen die Strahlen das Auge treffen, so sehen wir die Objekte im Allgemeinen nicht an ihrem wahren Orte, sondern in der Richtung derjenigen Geraden, welche die von den Strahlen beschriebene Curve im Beobachtungspunkte berührt.

Die von den Lufttheilchen ausgeübte Brechung der Lichtstrahlen heifst astronomische Strahlenbrechung, wenn das Licht von Punkten aufserhalb der Atmosphäre ausgeht, irdische Strahlenbrechung, wenn es von Punkten innerhalb der Atmosphäre ausgeht.

Die erstere ist für die Astronomie von grofser Wichtigkeit, da ihr oft ziemlich bedeutender Einflufs auf die unmittelbar durch Messung bestimmte Lage der Gestirne berücksichtigt werden mufs.

Nimmt man innerhalb des Raumes, welchen die Lichtstrahlen zu durchwandern haben, die Dichtigkeit der Luft als dieselbe bleibend an in allen Punkten, welche vom Mittelpunkt der Erde gleichweit entfernt sind, so läfst sich die Atmosphäre aus concentrischen Schichten von gleicher Brechungskraft bestehend denken, deren Dichte und mithin deren Brechungskraft im Allgemeinen mit der Entfernung von der Erde stetig abnimmt. Aus dem Zenith kommende Strahlen werden unter dieser Voraussetzung, da sie senkrecht auf sämmtliche Schichten fallen, gar nicht gebrochen, und

daher werden die im Zenith stehenden Gestirne in ihrer wahren Richtung gesehen. Von anders liegenden Gestirnen kommende Strahlen werden dagegen um so mehr abgelenkt, je schiefer sie auffallen, je näher also die Gestirne dem Horizont stehen, und zwar beschreiben sie, da sie dem Einfallslothe zu gebrochen werden, eine Curve, deren Convexität dem Zenith zugekehrt ist, so dafs die Gestirne höher zu stehen scheinen, als es wirklich der Fall ist. Bleiben wir bei der Vorstellung concentrischer Schichten von gleicher Dichtigkeit stehen, so ändert sich die Einfalls-Ebene nicht, und die Strahlen bleiben in einem und demselben Vertikalkreise, so dafs nicht das Azimuth, sondern nur die Höhe der Gestirne sich durch die Strahlenbrechung scheinbar ändert. Die Richtung des Strahls, ehe er in die Atmosphäre eindringt, ist die Tangente an der krummlinigen Bahn, welche er in der letzteren beschreibt und zwar an ihrem Anfangspunkte, und diese Tangente ist die Richtung, in welcher wir das Gestirn sehen würden, wenn die Atmosphäre nicht vorhanden wäre. Die Tangente am Endpunkte jener Bahn dagegen ist die Richtung, in welcher das Gestirn wirklich gesehen wird. Der Winkel, welchen beide Tangenten bilden, ist das, was man in der Astronomie Refraction nennt, d. h. der Winkel, den man von der beobachteten Höhe eines Gestirns subtrahiren mufs, um seine wahre Höhe zu erhalten. Die Refraction, wie sie sich ergeben würde, wenn die Lufttemperatur 0° ist, und der Luftdruck an der Erdoberfläche einem Barometerstande von 76 Centimeter entspricht, bei einer normalen Abnahme der Dichtigkeit der Luft mit der Entfernung von der Erde, heifst mittlere Refraction, zum Unterschiede von der wahren Refraction, welche von dem jedesmaligen Zustand der Atmosphäre abhängt. Die Gröfse derselben am Horizont heifst Horizontal-Refraction.

Euler leitete aus dem Princip der Emanationshypothese, dafs die Brechung eine Wirkung einer senkrecht gegen das Einfallsloth erfolgenden Anziehungskraft sei, für die mittlere Refraction r folgenden Ausdruck her:

$$r = \frac{2a}{(1-a)\sin 1''} \cdot \frac{\sin z}{\cos z + \sqrt{\cos^2 z + 2(b-a)}},$$

wo z die Zenithdistanz des Gestirns bedeutet, und a und b Constanten vorstellen, von denen die erste vom Gesetz der erwähnten Anziehungskraft, die zweite von dem Gesetz abhängt, nach welchem die Dichtigkeit der Luft mit ihrer Entfernung von der Erde zusammenhängt.

Bestimmt man a und b dadurch, dafs man $z = 30^0$ und $z = 84^0$ setzt, und für r die zu diesen Winkeln gehörigen Werthe aus den Bessel'schen Refractionstafeln *) nimmt, so ergiebt sich

$$a = 0{,}00029128 \text{ und } b = 0{,}00229128,$$

wodurch der Ausdruck für die Refraction übergeht in:

$$r = \frac{120'',2 \sin z}{\cos z + \sqrt{0{,}004 + \cos^2 z}},$$

oder, wenn man $\frac{\sqrt{0{,}004}}{\cos z}$ durch $tang\,\varphi$ bezeichnet,

$$r = \frac{120'',2}{\sqrt{0{,}004}} \sin z \, tang \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Die hiernach berechneten Werthe von r stimmen für die Werthe von $z = 0$ bis $z = 85^0$ sehr genau mit den in den Königsberger Tafeln gegebenen überein **).

Die Uebereinstimmung läfst sich auf folgendem Wege noch vollständiger machen.

---

*) Diese Tafeln, welche die von Bessel nach einer anderen, von ihm construirten Formel berechneten Werthe der mittleren Refraction für die verschiedenen Zenithdistanzen enthält, und welche mit der Erfahrung besser stimmen, als alle andere bisher bekannte Tafeln, sind in Bessel's *Fundamenta astronomiae* zu finden.

**) Die Euler'sche Entwickelung ist auf zwei Voraussetzungen gegründet, von denen die eine sich auf die Abhängigkeit der beschleunigenden Kraft, welche den Strahl gegen das Einfallsloth treibt, von der Dichtigkeit bezieht, die andere darin besteht, dafs die Differenzen der Dichtigkeit sich wie die Differenzen der reciproken Werthe der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde verhalten. Als für die Statthaftigkeit (oder angenäherte Richtigkeit) beider Hypothesen sprechend kann diese Uebereinstimmung mit den *Bessel'schen* Tafeln angesehen werden.

Giebt man der Formel die Gestalt

$$r = \frac{AR\sin z}{\cos z + \sqrt{\cos^2 z + A^2}},$$

wo R der Werth von r für $z = 90^0$, also die Horizontal-Refraction ist, so lege man diesem R den Werth aus den Bessel'schen Tafeln, nämlich den Werth 2166″,8 bei, betrachte A als abhängig von r, in der Art, dafs

$$A = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + a_4 r^3 + \ldots\ldots$$

ist, und bestimme a_1, a_2, a_3 etc. aus eben dieser Gleichung, indem man für r die zu bestimmten Werthen von z gehörigen, aus den Tafeln entnommenen Zahlen setzt. Nimmt man z klein, so dafs die mit r, r^2, $r^3 \ldots\ldots$ multiplicirten Glieder vernachlässigt werden können, so ergiebt sich

$$a_1 = 0{,}05325.$$

Geht man von den Werthen von r aus, welche zu $z = 77^0$, $z = 85^0$ und $z = 89^0$ gehören, so findet sich

$$a_2 = -0{,}00000060173$$
$$a_3 = -0{,}000000007138$$
$$a_4 = -0{,}000000000002412,$$

so dafs $A = -0{,}05325 - (0{,}7794017 - 7) r - (0{,}8535765 - 9) r^2 + (0{,}3823773 - 12) r^3$ wird, wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind.

Mit Hilfe dieses Werthes von A findet man dann r durch die Gleichungen:

$$tg\,\varphi = \frac{A}{\cos z}, \quad r = 2166'',8 \sin z\, tg \tfrac{1}{2}\varphi,$$

So ergiebt sich hieraus z. B.

z	r	Diff.	z	r	Diff.
5⁰	5″,04	0″,00	70⁰	156,90	0″,15
10	10 ,16	0 ,01	80	315,10	0 ,03
20	20 ,97	0 ,02	81	348,13	0 ,01
30	33 ,26	0 ,04	83	438,25	0 ,02
40	48 ,30	0 ,04	85	584,57	0 ,04
50	68 ,54	0 ,06	87	855,11	0 ,86
60	99 ,41	0 ,07	89	1478,16	0 ,01

wo die Differenzen sich auf die Abweichungen von den *Bessel*'schen Tafeln beziehen.

Die Correktionen, welche man an der mittleren Refraction anbringt, um sie der wahren näher zu bringen, beziehen sich nur auf den Barometer- und Thermometerstand.

Da sich für einen bestimmten Barometerdruck B die Aenderungen der Luftvolumina wie die Temperaturänderungen verhalten, so wird, wenn V das Volumen für 0^0, und v dasselbe für t^0 ist, $v = V(1+mt)$, also verhalten sich die Dichtigkeiten, welche beziehlich durch D und d bezeichnet seien, da sie mit dem Volumen in umgekehrtem Verhältnifs stehen, wie $1+mt:1$, und es ist

$$d = \frac{D}{1+mt}.$$

Da sich ferner bei constanter Temperatur die Dichtigkeiten wie die Barometerhöhen verhalten, so wird die Dichte d' für einen Barometerdruck b,

$$d' = \frac{db}{B} = \frac{Db}{B(1+mt)}.$$

Berücksichtigt man überdies die Temperatur des Quecksilbers, und nimmt an, dafs 1^0 das Quecksilber um den $n$ten Theil seines Volumens ausdehnt, so dafs die Barometerhöhe, wenn sie für 0^0 b ist, für t'^0 $\frac{b}{1+nt'}$ wird, so wird bei einer Quecksilbertemperatur von t'^0 die corrigirte Refraction r',

$$r' = r \cdot \frac{d'}{D} = r \cdot \frac{b}{B} \cdot \frac{1}{(1+mt)^3} \cdot \frac{1}{1+nt'},$$

während durch Beobachtungen

$$m = 0{,}00469 \text{ und } n = 0{,}000225$$

gefunden wurde, und

$$s = 2 - \frac{950 \sin z}{r\sqrt{1+15{,}81 \cos^2 z}}$$

ist.

Wenn man bedenkt, dafs es noch nicht ausgemacht ist, ob die mittlere Refraction für alle Orte der Erde dieselbe sei, dafs es gleichfalls noch nicht streng erwiesen ist, ob der Feuchtigkeitszustand ohne allen Einflufs ist, und endlich, was das Wichtigste ist, da man bei den steten

Luftströmungen nicht annehmen kann, dafs die Dichte der Luft in gleichen Entfernungen vom Erdmittelpunkt dieselbe ist, so sieht man, dafs diese Correktionen nie zu einem vollkommen richtigen Resultat führen werden. Namentlich ist der letzte Umstand für die in der Nähe des Horizonts befindlichen Gestirne von grofsem Einflufs.

Zu den Erscheinungen, welche sich aus der astronomischen Strahlenbrechung erklären, gehören folgende:

1) Die eingedrückte Gestalt der Sonne und des Mondes bei ihrem Auf- und Untergange. Der untere Rand wird nämlich durch die Horizontal-Refraktion um 33′ erhöht, der obere, wenn man den Durchmesser des Gestirns zu 32′ annimmt etwa um 28′, so dafs der vertikale Durchmesser 5′ kleiner als der horizontale sich zeigen mufs.

2) Die Verlängerung der Tagesdauer. Die Sonne bleibt nämlich eine Zeit lang, nachdem sie unter den Horizont gesunken ist, noch sichtbar, weil vermöge der Refraction die Höhe eines Gestirns für unser Auge vergröfsert wird.

Da der Sonnendurchmesser der Horizontal-Refraction nahe gleich ist, so beträgt die Verlängerung der Tagesdauer ungefähr die doppelte Durchgangszeit des Sonnendurchmessers durch den Horizont *).

Hieraus beruht das Nichtuntergehen der Sonne diesseit des Polarkreises zur Zeit des einen Solstitiums, welches je nach dem Zustande der Atmosphäre mehr oder weniger Tage dauern kann. Ferner beruht hierauf die gleichzeitige Sichtbarkeit der Sonne und des Mondes bei Mondfinsternissen, wenn dieser im Horizont steht, da doch bei diesen Finsternissen die Erde zwischen beiden Gestirnen steht, also nur das eine sichtbar sein sollte.

---

*) Ist δ der Durchmesser der Sonne, $90 - p$ die Deklination derselben, φ die geographische Breite und T die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Culminationen der Sonne, so ist die Zeit t welche dieselbe braucht, um durch den Horizont zu gehen,

$$t = \frac{T\delta}{360.60^2 \sqrt{\sin(p+\varphi)\sin(p-\varphi)}}$$

Mit der Verlängerung der Sichtbarkeit der Sonne hängt auch die verlängerte Dauer der Dämmerung zusammen, da eine geraume Zeit nach dem Verschwinden der Sonne noch Strahlen in den über dem Horizont befindlichen Theil der Atmosphäre gelangen, und von derselben noch zu uns herab reflektirt werden.

Irdische Strahlenbrechung.

Weit veränderlicher und mannigfaltiger sind die durch irdische Strahlenbrechung erzeugten Erscheinungen. Die von terrestrischen Gegenständen kommenden Strahlen haben nämlich ihren Weg stets durch die unteren Schichten der Atmosphäre zu nehmen, welche gerade den mannigfaltigsten Veränderungen unterworfen sind. Hätte die Luft durchgängig dieselbe Temperatur, so würde ihre Dichtigkeit in geometrischer Progression abnehmen, wenn die Entfernung von der Erde in arithmetischer Progression zunimmt. Da aber eine starke und ungleichmäfsige Erwärmung des Bodens auch eine stärkere und ungleichmäfsige Erwärmung der untersten Luftschichten hervorbringt, also auch stark und ungleichmäfsig deren Dichte ändert, so geschieht in solchen Fällen die Dichtigkeitsabnahme langsamer, ja es kann leicht vorkommen, dafs dünnere Schichten von dichteren überlagert sind. Ein Lichtstrahl kann daher in diesen Schichten die verschiedenartigsten Krümmungen annehmen.

Diesen Weg der Strahlen, so wie die von demselben abhängigen Erscheinungen haben Biot (*Recherches sur les refractions extraordinaires, qui ont lieu près de l'horizon. Par.* 1810) und in der neuesten Zeit Gergonne (*Annales de mathematiques, IV.*) zum Gegenstande analytischer Untersuchungen gemacht, deren wichtigste Resultate hier folgen mögen.

Besteht die Luft aus Schichten, welche von horizontalen Ebenen begrenzt sind, in der Art, dafs die Dichte sich nur von Schicht zu Schicht ändert, so wird jeder Strahl, welche Krümmung er auch haben mag, von horizontalen

Linien unter gleichen Winkeln geschnitten. Bewegt sich der Strahl also schlängelnd vorwärts, so liegt seine Bahn zwischen zwei horizontalen Linien, welche dieselbe in allen ihren Wendungspunkten berühren.

Trägt man auf eine durch den Anfangspunkt des Strahls gehende Vertikallinie als Ordinaten Längen auf, welche der Dichtigkeit in den entsprechenden Punkten proportional sind, so versinnlicht die von den Ordinatenendpunkten gebildete Curve der Gang der Dichtigkeit in der Luft. Die mit dieser Curve parallele, durch den Anfangspunkt der Strahlen gehende krumme Linie nannte Gergonne Carakteristik.

Ist die Carakteristik bekannt, so läfst sich die Bahn des Strahls finden, und ist diese Bahn bekannt, so läfst sich jene bestimmen. Auf einem ebenen Terrain liefse sich die Bahn des Lichtes etwa dadurch bestimmen, dafs man längs eines in einer geraden Linie laufenden Grabens hinter einander vertikale Stäbe einpflanzte, und zwar so tief, dafs die äufsersten Enden dem visirenden Auge in einer geraden Linie zu liegen scheinen. Die Höhe der Stäbe über das Niveau des Wassers sind alsdann Ordinaten der Curve, welche der von der Spitze des letzten Stabes kommende Lichtstrahl beschreibt.

Ist diese Curve z. B. eine Parabel mit vertikaler Axe, so ist die Carakteristik eine Gerade, die Dichtigkeit nimmt also proportional der Entfernung von der Erde ab *).

---

*) Ist die Gleichung der Bahn des Strahls $y = \varphi(x)$ (die Axe der y als vertikal und den Ursprung der Coordinaten im Anfangspunkt des Strahls gedacht), so ist die Gleichung der Carakteristik, wenn ϱ die Dichtigkeit bedeutet,

$$\varrho = \frac{A^2[\varphi'^2(x) - \varphi'^2(0)]}{1 + \varphi'^2(0)},$$

wo A eine Constante ist, welche der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume proportional ist, und worin für x sein Werth aus $y = \varphi(x)$ gesetzt werden mufs.

Ist die Gleichung der Parabel $y = \varphi(x) = \frac{2gx + x^2}{2h}$,

so wird daher die Carakteristik

$$\varrho = \frac{2Ahy}{g^2 + h^2}.$$

Steht umgekehrt die Dichtigkeit in geradem oder verkehrtem Verhältnifs mit der Höhe über der Erde, so ist die Bahn des Strahls eine Parabel, deren Convexität derjenigen Seite zugekehrt ist, nach welcher die Dichtigkeit abnimmt, und zwar dieselbe, welche ein in derselben Richtung geworfener Körper im leeren Raume beschreiben würde *).

Treffen die Strahlen, welche von einem Punkt eines terrestrischen Gegenstandes ausgehen, das Auge, und zwar in hinreichender Menge und so, dafs die Linien, welche die Bahnen der Strahlen in ihren Endpunkten berühren, d. h. die Richtungen, von denen die Strahlen herzukommen scheinen, sich in einem vor uns liegenden Punkte schneiden: so sehen wir ein Bild jenes Punktes, und zwar in diesem Durchschnittspunkt.

Denkt man sich durch den Mittelpunkt der Pupille eine Curve gehend, welche sämmtliche ins Auge dringende Strahlen rechtwinklig schneidet, die sogenannte rechtwinklige Trajektorie, so sind die Normalen derselben die scheinbaren Richtungen der Strahlen, und ihr Krümmungsmittelpunkt ist der Ort des Bildes. Dies Bild kann daher nur dann deutlich sein, wenn die Trajektorie ihre convexe Seite dem Auge zukehrt. Aus der Gleichung der Trajektorie läfst sich sonach die Richtung berechnen, wo der Punkt uns sichtbar ist, und welche scheinbare Entfernung er von uns hat **).

---

*) Ist ϱ bekannt, so hat man zur Bestimmung der Bahn des Strahls die Gleichung

$$\partial x = \frac{A\partial y}{\sqrt{A^2 m^2 + (1+m^2)\varrho}},$$

wo A die in der vorigen Seite angegebene Bedeutung hat, und m die Tangente der Neigung des Strahls gegen den Horizont in seinem Anfangspunkte ist.

Diese Gleichung ist zu integriren, und die willkührliche Constante aus der Bedingung zu bestimmen, dafs x und y zugleich verschwinden.

Ist $\varrho = \frac{y}{c}$, so wird die hieraus sich ergebende Gleichung der Parabel

$$(1+m^2)x^2 = 4A^2 c(y - mx).$$

**) Wenn die Gleichung einer der ins Auge kommenden Strahlen $y = F(x) = X$ *ist, und* x' *und* y' die Coordinaten seines Endpunktes sind, *so ist die Entfernung* des Bildes vom Auge:

Je nach der Lage der Bilder, welche den Punkten eines ausgedehnten Gegenstandes zugehören, kann das Bild des ganzen Gegenstandes eine aufrechte oder verkehrte oder eine sonst wie gewendete Lage haben.

Es können ferner von einem Lichtpunkt nach einem und demselben Punkt des Auges mehrere Strahlen gehen. Alsdann sieht man ein Bild desselben in der Richtung der Tangente jedes Strahls, also so viel Bilder, als Strahlen im Auge sich schneiden. Das System von Curven, welche die von einem strahlenden Punkte ausgehenden und in einer bestimmten Vertikal-Ebene liegenden Strahlen bilden, läſst sich durch einhüllende oder Grenz-Curven so abgetheilt denken, daſs in dem Raume zwischen je zwei solchen Curven die Zahl der sich in jedem Punkte durchschneidenden Strahlen um Eins gröſser oder geringer ist, als in dem benachbarten Raume. Die Gesammtheit dieser Curven nennt Biot Brennlinien (*caustiques*), Gergonne Bestimmungscurven der Bilderzahl (*determinatrices*).

Ist der Gang der Dichtigkeit in der Atmosphäre ein solcher, daſs nicht mehr als zwei Strahlen sich in einem Punkte schneiden können *), so sieht man auf der einen Seite der Bestimmungscurve stets zwei Bilder, auf der anderen Seite gar keins, und in der Curve selbst fallen beide Bilder zusammen. Ist das Strahlende ein ausgedehntes Objekt, so kommt jedem Punkt desselben eine Determinatrix zu, und ein Auge, welches alle Bestimmungscurven auf der einen Seite läſst, sieht zwei vollständige Bilder des Ob-

---

$$\frac{-\frac{\partial X'}{\partial m}\left\{1+\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial X'}{\partial m}\cdot\frac{\partial X'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial^2 X'}{\partial x'\partial m}-\frac{\partial^2 X'}{\partial x'\partial m}\left\{1+\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}\right)^2\right\}},$$

und die Tangente des Winkels zwischen der Sehrichtung und dem Horizont:

$$\frac{\partial X'}{\partial x'}.$$

*) Dies findet statt, wenn die Gleichung $y' = X'$ nach m vom zweiten Grade ist, weil es alsdann nur zwei reelle oder zwei imaginaire Werthe von m, wodurch die Anfangsrichtung der Strahlen bestimmt wird, giebt.

kts; ein Auge auf der anderen Seite dieser Curven sieht ur kein Bild; ein Auge auf einer der äufsersten Bestimmungscurven sieht die Bilder in Berührung, auf der anderen nur einen Punkt des Objekts. Zwischen den äufseren Curven sieht man endlich nur Theile des Objekts, aber zwiefach, und zwar sich in demjenigen Punkt berührend, welchem diejenige Determinatrix entspricht, auf welcher das Auge sich befindet.

Ist die Carakteristik eine Gerade, sind also die Strahlenwege Parabeln, so giebt es einen Raum, in welchem jeder Punkt von zwei Strahlen eines Lichtspunktes getroffen wird, also zwei Bilder sichtbar sind, und zwar sind die Bahnen dieser Strahlen gerade diejenigen zwei Curven, welche ein geworfener Körper beschreiben mufs, wenn er vom Anfangspunkt der Strahlen zu ihrem gemeinsamen Endpunkt gelangen soll. Die Bestimmungscurve ist in diesem Fall eine Parabel, deren Axe die durch den Lichtpunkt gehende Vertikale ist, und welche mit derjenigen Parabel von gleicher Form ist, welche der anfangs horizontal gerichtete Strahl beschreibt.

In dem Vorhergehenden liegt der Grund der sogenannten Luftspiegelung (*mirage*), d. h. des Erscheinens eines oder mehrerer Bilder entfernter Gegenstände in der Luft.

Bald erscheinen Schiffe, Bäume, ganze Ortschaften über dem Horizont erhoben und in der Regel vergröfsert, obgleich sie wegen der Krümmung der Erdoberfläche nicht sichtbar sein sollten, und verschwinden, wenn man sich erhebt oder sich ihnen nähert. Bald erscheinen Landschaften, wie vom Wasser umgeben, und eine Insel bildend. Nähert man sich der Gegend, wo die Erscheinung gesehen wird, so wird die scheinbare Wasserfläche schmäler und verschwindet endlich gänzlich. Zu den merkwürdigsten Täuschungen, welche Luftspiegelungen dieser Art hervorbrachten, gehört der von Dangos berichtete Fall, dafs man das Scheinbild des Aetna einmal auf Malta für eine neue Insel gehalten, und sich schon angeschickt hätte, dieselbe in Besitz zu nehmen. Am grofsartigsten ist das von

Latham (*Philos. Trans.* 1798) beschriebene Phänomen. Von Hastings aus sahe nämlich derselbe mit bloſsen Augen die 9—11 deutsche Meilen entfernte französische Küste, und erkannte deutlich die einzelnen Punkte bei Boulogne, St. Valery etc. Von einem hohen Hügel aus sah er die ganze Küste bis Calais hinauf, und mit dem Fernrohr lieſsen sich die vor Anker liegenden Fischerboote erkennen. Das $3\frac{1}{2}$ Meile entfernte Cap Dunge Neſs und die vor demselben vorübersegelnden Schiffe erschienen beträchtlich vergröſsert und ganz dicht vor den Augen.

Auch doppelte und dreifache Bilder, von denen eines über dem anderen liegt, sind nicht selten. Oft erscheint das eine in verkehrter Lage, so daſs es wie ein vom Scheinwasser abgespiegeltes Bild des jedesmal aufrechten darüberliegenden aussieht. Der trennende Wasserstreif verschwindet bei der Näherung in der Regel zuerst, und dann der dem Horizont zugekehrte Theil des verkehrten Bildes. Auf dem Lande kommt zuweilen hierzu von der ungleich erhitzten Luft eine zitternde Bewegung in den Bildern.

Man kann die Verdoppelung der Bilder reproduciren, wenn man in ein Glasgefäſs mit parallelen Wänden Schwefelsäure gieſst, und vorsichtig Wasser darüber bringt, wodurch sich in der Flüssigkeit Schichten von ungleicher Dichte bilden, in Folge dessen man durch das Gefäſs hindurch die dahinter befindlichen Objekte doppelt und zwar über einander erblickt.

Höchst wahrscheinlich gehört auch hierher die *Fata Morgana*, mit welchem Namen man die Erscheinung von Menschen, Thieren, Säulenreihen, Häusern, Palästen etc. belegt hat, die man an der Calabrischen Küste, namentlich bei Reggio auf dem Meere gesehen haben will. Brandes hält das den wunderbaren und gewiſs übertriebenen Schilderungen zum Grunde liegende für ein Refractionsbild von Messina und seiner Umgegend.

Was die Gröſse des Refractionswinkels r bei regelmäſsigerem Zustande der Luft betrifft, welche für geodätische Messungen von Wichtigkeit ist, so hat man für die-

selbe die Gleichung

$$r = nw$$

wo w den Winkel zwischen den Erdhalbmessern vorstellt, welche nach dem visirten und dem Beobachtungsorte gehen, und wo n eine zwischen 0,06 und 1 variirende Constante ist. Nimmt man als Mittelwerth $n = 0{,}08$, und führt man die Distanz der Oerter ein, so hat man, wenn die letztere $\varDelta$ Toisen beträgt,

$$r = 0{,}00505\,\varDelta''.$$

Hiernach wäre die Refraction für eine deutsche Meile (3807 Toisen) 19'',2. Die Relation zwischen w und $\varDelta$ ist nämlich, wenn R den Halbmesser der Erde, φ die geographische Breite, und A die Abplattung der Erde bedeutet,

$$w = \frac{\varDelta}{R \sin 1''}(1 + 2A + 3A \sin^2\varphi),$$

oder

$$w = \frac{\varDelta}{R \sin 1''},$$

je nachdem man auf die Abplattung der Erde Rücksicht nimmt, oder nicht.

Den jedesmaligen Werth von n findet man folgendermafsen:

Ist (Fig. 99) A der Beobachtungsort, B der beobachtete Gegenstand, und C der Mittelpunkt der Erde, also $BCA = w$, und findet man ferner die Zenithdistanzen ZAB und $Z'BA$ durch Beobachtung beziehlich gleich z und z', und sind r und r' die Refractionen, so ist $ZAB = z + r$, $Z'BA = z' + r'$, folglich wegen $ZBA = BCA + BAC$, $z + z' + r + r' = 180 - w$. Sind nun z und z' an den Orten A und B gleichzeitig gemessen, so dafs man $r = r'$ nehmen kann, so erhält man, wenn man den Werth von w aus der letzten Gleichung in $r = nw$ substituirt,

$$n = \frac{180 + w - z - z'}{2w}.$$

Neunter Abschnitt.

Die optischen Instrumente.

Erste Abtheilung.

Die wichtigsten aller optische Instrumenten sind die Fernröhre, nicht sowohl wegen ihres Gebrauchs zur Anstellung optischer Versuche, als wegen ihrer vielfältigen Anwendung bei der Mehrzahl der Mefsinstrumente. Es mögen daher dieselben zunächst betrachtet werden.

Von den Fernröhren im Allgemeinen.

Der Zweck der Fernröhre ist, entfernte Gegenstände deutlich und vergröfsert erscheinen zu lassen. Zu diesem Behuf erzeugt man durch einen Spiegel ein katoptrisches, oder durch eine oder mehrere Linsen ein dioptrisches Bild, und betrachtet dieses Bild durch eine Linse oder ein Linsensystem so, dafs die von einem Punkte des Bildes ausgehenden Strahlen beim Austritt einen solchen Kegel bilden, wie die Strahlen, welche von einem in der deutlichen Sehweite liegenden Punkt ausgehen. Die Spiegel und Gläser, welche jenes Bild erzeugen, nennt man das **Objektiv** des Fernrohrs, die Gläser, durch welche man das Bild betrachtet, das **Ocular** desselben. Je nachdem das Bild des Objektivs ein dioptrisches oder katoptrisches ist, nennt man das Fernrohr ein **dioptrisches** oder **katadioptrisches**. Man nennt auch die Fernröhre erster Art **Refractoren**, die der zweiten **Reflektoren** oder **Spiegelteleskope**.

Objektive.

Da sich die Gröfse des Objekts zu der des Bildes wie die respectiven Entfernungen von dem Spiegel oder der Linse verhalten, und mithin das Objektivbild der Fernröhre wegen der grofsen Entfernung des Objekts bedeutend kleiner als das letztere ist, so bewirkt das Objektiv keine absolute Vergröfserung. Da ferner von der Mitte des Spiegels oder der Linse aus Objekt und Bild unter demselben Winkel erscheinen, und das Bild stets in der Nähe des Brennpunktes liegt, so findet bei der unmittelbaren Betrachtung des Bildes nur dann eine Angularvergröfserung statt, wenn die Brennweite des Objektivs gröfser als die Sehweite ist. Der Haupt-Vortheil, den das Objektiv bringt, ist aber die Versetzung des Bildes in unsere Nähe.

Um aus diesem Vortheil den gröfstmöglichen Nutzen zu ziehen, mufs das Objektivbild vollkommen deutlich sein.

Hierzu wird erfordert: 1) eine möglichst grofse Helligkeit des Bildes. Diese ist um so gröfser, je mehr Strahlen zur Bildung desselben beitragen, je gröfser also die Oeffnung des Objektives ist; sie ist ferner wegen des grofsen Lichtverlustes bei der Reflexion bei einem Spiegel bedeutend geringer als bei einer ebensogrofsen Linse.

2) Fordert die Deutlichkeit eine möglichst geringe sphärische Aberration. Da diese um so geringer ist, je kleiner man die Oeffnung nimmt, so kann die Verdeutlichung nur auf Kosten der Helligkeit geschehen; und wenn man eine grofse Helligkeit, also ein grofses Objektiv benutzen will, so mufs man die Krümmungen möglichst schwach, also die Brennweite möglichst grofs nehmen. Bei sehr entfernten Objekten fällt aber das Bild in den Brennpunkt, und es mufs daher alsdann das Fernrohr eine bedeutende Länge erhalten. Da ferner bei einem Spiegel die Kugelabweichung etwa 8 Mal geringer ist, als bei einer gleich grofsen Glaslinse, so verdienen in dieser Rücksicht die katoptrischen Objektive den Vorzug vor den aus einer einzigen Linse bestehenden *dioptrischen*. Wendet man dagegen zwei Lin-

sen statt einer an, so läfst sich, wenn die Oeffnung nicht zu grofs ist, die Aberration durch schickliche Wahl der Krümmungen bis zu einem solchen Grade vermindern, dafs sie der Deutlichkeit gar keinen Abbruch thut. — Soll das Bild noch den erforderlichen Grad der Deutlichkeit besitzen, so darf die Abweichung (d. h. der Winkel, unter welchem der Halbmesser des Abweichungskreises dem freien Auge in der Entfernung des deutlichen Sehens erscheint) nicht über eine Sekunde betragen. Bezeichnet man die Brennweite des Objektivs durch f, so kann man $0{,}00004266 f$ als entsprechendes Maafs der Längenabweichung annehmen.

3) Fordert die Deutlichkeit Beschränkung des Einflusses der Farbenzerstreuung. Da diese bei der Reflexion ganz wegfällt, so hat dies nur auf die dioptrischen Objektive Bezug. Aber auch bei diesen läfst sie sich, wie wir im 5ten Abschnitt gesehen haben, in dem erforderlichen Grade schwächen, wenn man statt einer einzigen Linse eine Verbindung von einer Kron- und einer Flint-Glaslinse anwendet.

Die (convexe) Kronglaslinse mufs hierbei dem Objekte zugekehrt, die (concave) Flintglaslinse von demselben abgekehrt sein.

Die chromatische Abweichung darf 6 und mehrere Minuten betragen, ohne erheblich der Deutlichkeit zu schaden.

4) Endlich hängt die Deutlichkeit einerseits von der Politur des Spiegels, andrerseits von der Homogeneität der Glasmasse ab, aus der die Linsen gefertigt sind. Was die erste betrifft, so sind nur die Metallspiegel einer sehr vollkommenen Politur fähig, indefs werden auch diese, der Luft ausgesetzt, leicht durch Oxydation an der Oberfläche verdorben. Auf der andern Seite läfst die Schwierigkeit, grofse vollkommen homogene, von Bläschen und Aederchen freie Glasstücke zu erhalten, nicht zu, brauchbare Linsen von bedeutenderer Gröfse zu schleifen. Dies gilt namentlich von dem Flintglase. Diesem Uebelstande abzuhelfen, schlug Littrow vor, die Flintglaslinse, welche in den gewöhnlichen achromatischen Doppelobjektiven dicht

hinter der Kronglaslinse steht, in eine namhafte Entfernung von derselben zu stellen. Da nämlich die Strahlen nach dem Austritt aus der ersten Linse convergiren, so genügt eine um so kleinere Oeffnung der zweiten Linse, sämmtliche Strahlen aufzufangen, je weiter sie von der ersten absteht.

Da aber bei dem geringen Unterschied der Zerstreuungsverhältnisse beider Glasarten die Correktion der chromatischen Abweichung keine zu grofse Entfernung gestattet, so machte Rogers den Vorschlag, zur Correktion nicht eine einfache Flintglaslinse, sondern eine Doppellinse anzuwenden, welche aus einer convexen Kron- und einer concaven Flintglaslinse besteht, und welche so construirt ist, dafs die Vorderfläche der vorderen der Hinterfläche der hinteren nahe parallel ist, in der Art, dafs die mittleren Strahlen durch die Brechung ihre Richtung nicht ändern. Da das Flintglas die violetten Strahlen stärker bricht, so wird deren Brennweite vergröfsert, dagegen die Brennweite der rothen Strahlen verkürzt. Die Stellung der Correktionslinse ist hierbei ganz willkührlich, sie kann also beliebig klein gemacht werden, wenn man nur demgemäfs die Krümmungen wählt. Ist überdies die Compensation nicht ganz vollkommen, so läfst sie sich durch eine geringe Ortsveränderung vervollständigen. Auch die sphärische Aberration läfst sich bei bestimmter Krümmungswahl dadurch versuchsweise vollständiger vernichten, dafs man die Linsen langsam von einander trennt, und sie in der Entfernung läfst, in welcher die Deutlichkeit am gröfsten ist. Rogers Angabe über die hierzu erforderliche Gröfse der Brennweite ist, in Worten ausgedrückt, folgende: Die Brennweite jeder Linse des Correktionsglases mufs sich zu der des Objektivs verhalten, wie das Quadrat der Oeffnung der Correktionslinse zu dem des Objektivs, multiplicirt mit dem Verhältnifs des Unterschiedes zwischen den Zerstreuungscoefficienten von Kron- und Flintglas zu dem Zerstreuungscoefficienten des Kronglases. Ein Objektiv von 14′ Brennweite und 9″ Oeffnung würde demnach von einer Doppellinse von

3″ Oeffnung corrigirt werden, wenn jede der Correktionslinsen ungefähr 9″ Brennweite erhielte.

Oculare.

Die Güte der Oculare hängt ab 1) von der Vergröfserung, welche sie gewähren, 2) von der Helligkeit, in der sie das Bild zeigen, 3) von der Gröfse des auf einmal übersehenen Feldes, 4) von der Gröfse der Abweichungen.

1) Die von einem in der deutlichen Sehweite liegenden Punkt ausgehenden Strahlen treten sehr nahe parallel ins Auge. Das Ocular mufs daher eine solche Stellung haben, dafs die von einem Punkte des Bildes herkommenden Strahlen fast parallel die letzte Linse verlassen, und somit mufs das Bild, wenn das Ocular nur aus einer Linse besteht, nahe in dem Brennpunkte derselben stehen. Da ferner das Bild um so gröfser erscheint, je gröfser der Sehwinkel ist, so ist die Vergröfserung um so bedeutender, je gröfser der Winkel ist, welchen die von den äufsersten Punkten des Bildes kommenden Strahlen nach dem Austritt aus der letzten Linse mit einander bilden. Ist das Ocular einfach und z. B. durch AB (Fig. 100) vorgestellt; ist ferner C dessen Mittelpunkt, EF dessen Axe, und ED das Bild, so sind EC und DC diejenigen von E und D kommenden Strahlen, welche ungebrochen durch die Linse gehen (p. 135), und da die übrigen zu E und D gehörenden Strahlen der Voraussetzung nach diesen parallel austreten, so ist $FCH = DCE$ der Sehwinkel. Dieser wird daher um so gröfser, je näher ED an C steht, also je kleiner die Brennweite ist. Macht man nun Ce der Sehweite gleich, so ist ed die Gröfse, welche ein Objekt haben mufs, wenn es unter dem Sehwinkel DCE deutlich gesehen werden soll, und da $CE : Ce = ED : ed$, und EC die Brennweite der Linse ist, so erscheint uns das Bild so grofs wie ein deutlich gesehenes Objekt, dessen Gröfse man erhält, wenn man die Bildgröfse mit der Sehweite multiplicirt und durch die Brennweite des Oculars dividirt.

Besteht dagegen das Ocular aus mehreren Linsen, C_2Y_2, C_3Y_3, C_4Y_4 (Fig. 101); ist ferner C_1Y_1 das Objektiv, ED das Objekt und Ee_4 die gemeinschaftliche Axe des Linsensystems, so dafs Ee_4 auch den Strahl vorstellt, welcher von E aus ungebrochen durch alle Linsen geht, und ist endlich $DZ_2Z_3Z_4d_4$ der Weg des von D aus durch die Mitte des Objektives C_1 gehenden Strahls — welchen man den Hauptstrahl nennt — so erscheint das Objekt unter dem Winkel $C_4O_4Z_4$. Befände sich nun das Auge in C_1 (welches so gut wie in O_4 ist, da die Länge C_1C_4 des Fernrohrs verschwindend klein gegen die Objektsweite ist), so würde das Objekt unter dem Winkel DCE gesehen werden. Man erhält also die Winkelvergröfserung des Objekts, wenn man $C_4O_4Z_4$ durch DC_1E dividirt.

Ist in der Figur EY_1 der von E aus auf den Rand fallende Strahl, und nimmt derselbe durch die Brechungen den Weg $Y_1Y_2Y_3Y_4e_4$ (welchen Strahl wir den Randstrahl nennen wollen), so erscheinen in e_1, e_2, e_3, e_4 Bilder von E, und e_1d_1, e_2d_2, e_3d_3, e_4d_4 stellen die Bilder von ED vor. Ist C_4Z_4 die letzte Linse, so ist $Y_4e_4 \mathrel{+\!\!\!=} Ee_4$, und e_3C_4 die Brennweite derselben. Bezeichnet man nun die vorderen Vereinigungsweiten EC_1, e_1C_2, e_2C_3, e_3C_4 durch b_1, b_2, b_3, b_4 (positiv oder negativ genommen, je nachdem sie vor oder hinter ihrer Linse liegen); und die hinteren Vereinigungsweiten C_1e_1, C_2e_2, C_3e_3, C_4e_4 durch β_1, β_2, β_3, β_4 (positiv oder negativ genommen, je nachdem sie hinter oder vor ihrer Linse liegen), so ist die Gröfse der Bilder e_1d_1, e_2d_2, e_3d_3 beziehlich

$$\beta_1\psi, \qquad \frac{\beta_1\beta_2}{b_2}\psi, \qquad \frac{\beta_1\beta_2\beta_4}{b_2b_3}\psi,$$

unter ψ die scheinbare Gröfse des Objekts, d. h. den Winkel DC_1E verstanden. Sind diese Ausdrücke positiv, so sind die Bilder aufrecht, wenn sie hinter einer geraden Zahl Linsen stehen, verkehrt, wenn sie hinter einer ungeraden Zahl stehen. Umgekehrt verhält es sich, wenn die Ausdrücke *negativ sind.* Die Vergröfserung selber ist für

ein in O_4 (dem Durchschnittspunkt des Hauptstrahls mit der Axe) befindliches Auge

$$\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{b_2 b_3 b_4},$$

wobei ein Negativwerden dieses Quotienten anzeigt, dafs der Punkt O_4 nicht hinter, sondern vor der letzten Linse liegt. O_4 ist derjenige Punkt, in welchem man das Auge halten mufs, um das ganze Objekt zu übersehen; liegt derselbe also vor der Linse, so wird nur ein Theil des Objektes übersehen werden können.

2) Die Helligkeit des Bildes des Punktes E ist bei gegebener Gröfse des Objektivs am gröfsten, wenn die Ocularlinsen grofs genug sind, um noch von dem Randstrahl EY_1 getroffen zu werden. Die halbe Oeffnung dieser Linsen mufs daher mindestens beziehlich C_2Y_2, C_3Y_3, C_4Y_4 sein. Diese Gröfsen nennt man die Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit.

Als Maafs der Helligkeit nimmt man das Verhältnifs der Menge des aus der letzten Ocularlinse tretenden Lichts zu der Menge des in das Auge dringenden, oder mit andern Worten: das Verhältnifs der Basis des aus der letzten Linse tretenden Lichtcylinders zur Fläche der Pupillenöffnung. Ist also der zur letzten Linse gehörige Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit y', und der Halbmesser der Pupille ω, so ist $y'^2 : \omega^2$ dieses Verhältnifs. Bedeutet y den Oeffnungshalbmesser des Objektivs und m die Vergröfserung durch das Fernrohr, so ist $y = my'$, also ist, wenn man den Pupillenhalbmesser zu $\frac{1}{20}$ Zoll annimmt, die Helligkeit ausgedrückt durch

$$\frac{y^2}{m^2\omega^2} = \frac{400y'^2}{m^2}.$$

Die Helle nimmt folglich mit der Gröfse des Objektivs zu, und mit der Vergröfserung ab. Ihr gröfster Werth ist die Einheit, die schwächste Vergröfserung ist also $m = 20y$, wo man, wenn f die Brennweite des Objektivs ist, $y = 0{,}092777 f^{\frac{3}{4}}$ anzunehmen pflegt. Für stärkere Vergröfserungen mufs man sich eine geringere Helligkeit gefallen

lassen. Da man aber, ohne zu grofse Undeutlichkeit wegen der Kugelabweichung die Brennweite des Oculars nicht kleiner als $\frac{1}{5}$ Zoll annehmen kann, so hat man als stärkste Vergröfserung ungefähr $m = 5f$, wo f die Zahl der Zolle der Brennweite des Objektivs bedeutet.

3) Die Gröfse des Gesichtsfeldes hängt gleichfalls von der Oeffnung der Oculare ab. Soll das ganze Objekt ED noch übersehen werden können, soll also der Winkel $DCE = \psi$ der Halbmesser des zu übersehenden Gesichtsfeldes sein, so mufs der Hauptstrahl DC durch sämmtliche Ocularlinsen gehen können, ihre halbe Oeffnungen müssen daher mindestens beziehlich gleich C_2Z_2, C_3Z_3, C_4Z_4 sein. Man nennt diese Gröfsen die Oeffnungshalbmesser wegen des Gesichtsfeldes. Doch darf dieser Halbmesser nicht eine gewisse Gröfse übersteigen, weil sonst die sphärische Abweichung zu grofs werden würde. Ist eine Glaslinse gleichseitig, und fallen die Lichtstrahlen der Axe parallel auf, so wird, wenn man 15^0 als gröfsten Einfallswinkel statuirt, die Oeffnung etwa $\frac{1}{4}$ der Brennweite; statuirt man einen Einfallswinkel von 18^0, so wird die Oeffnung etwa $\frac{3}{10}$ der Brennweite. Da nun gröfsere Einfallswinkel die Deutlichkeit zu sehr beeinträchtigen, so nimmt man als gröfsten Oeffnungshalbmesser $\frac{1}{4}$, oder höchstens $\frac{3}{10}$ der Brennweite an. Der Natur der Sache nach mufs dieser Halbmesser stets gröfser als der Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit sein, und will man über dem ganzen Gesichtsfelde eine gleiche Helligkeit haben, so mufs man den wahren Oeffnungshalbmesser der Summe beider Oeffnungshalbmesser gleich machen, was natürlich nur dann geschehen kann, wenn diese Summe nicht gröfser als $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{10}$ der Brennweite ist.

4) Was endlich die Deutlichkeit betrifft, so mufs bei einem vollkommenen Ocular die sphärische Abweichung, und die chromatische Abweichung in der Axe (d. h. derjenigen Strahlen EY_1, welche von dem in der Axe liegenden Punkt E des Objekts ausgehen), so wie die chromatische Abweichung der Randstrahlen (d. h. der von dem

äufsersten Punkt *D* des Gesichtsfeldes gehenden Strahlen) hinlänglich gehoben sein.

Dioptrische Fernröhre.

Das Gallileische Fernrohr.

Das Ocular des Gallileischen Fernrohrs besteht aus einer einzigen Zerstreuungslinse, welche innerhalb der Brennweite des Objektivs steht, und welche die vom Objektiv zur Convergenz gebrachten Strahlen zum Parallelismus lenkt. In Fig. 102 stellt *A* das Objektiv, *B* das Ocular, und *DE* ein Objekt vor. Wäre das Ocular nicht vorhanden, so würden die von *E* kommenden Strahlen sich in *e*, die von *D* kommenden in *d* vereinigen und ein verkehrtes Bild *de* geben. Das Ocular hebt aber die Convergenz auf, und stellt die von jedem Punkt des Objekts ausgehenden Strahlen einander parallel, so dafs die von *E* ausgesendeten nach ε, die von *D* ausgesendeten nach δ hingelenkt werden, und mithin der Punkt *D* in der Richtung δm (also unten), der Punkt *E* in der Richtung εn (also oben) gesehen wird, und demzufolge das Objekt aufrecht erscheint. Objektiv und Ocular werden in der erforderlichen Entfernung von einander in die Enden einer Röhre eingesetzt, welche innen geschwärzt ist, um störenden Reflexionen an den Wänden vorzubeugen. Da *CN* die Brennweite des Objektivs und *PN* die Brennweite des Oculars ist, so ist die Länge *CP* des Fernrohrs der Differenz beider Brennweiten gleich. Da Haupt- und Randstrahl sich innerhalb des Fernrohrs in *o* schneiden, so müfste man, um das ganze Gesichtsfeld übersehen zu können, das Auge in *o* halten. Da dies unmöglich ist, so mufs dasselbe dem Ocular so nahe als möglich gehalten werden. Das Gesichtsfeld dieser Fernröhre ist daher immer nur sehr beschränkt, und zwar um so beschränkter, je stärker die Vergröfserung ist.

Was die sphärische und chromatische Abweichung betrifft, so läfst sich dieselbe nie ganz fortbringen. Bei einfachem Objektiv nimmt die Kugelabweichung mit der 4ten Potenz der Vergröfserung, die Farbenabweichung mit dem Quadrat der Vergröfserung zu, sie nimmt dagegen mit den gleichvielten Potenzen der Brennweite des Objektives ab. Bei stärkeren Vergröfserungen wird daher eine unbequeme Länge des Fernrohrs erfordert. Jedoch sind die vom Ocular herrührenden Abweichungen sehr gering gegen die vom Objektiv herrührenden, so dafs bei achromatischen und aplanatischen Doppelobjektiven die Abweichungen fast ganz ohne Einflufs sind, und daher die zu einer bestimmten Vergröfserung gehörige Fernrohrlänge bedeutend geringer wird. Die Doppelobjektive haben überdies den Vortheil eines bedeutenderen Gesichtsfeldes. Gute Doppelobjektive lassen $\frac{1}{2}$ Zoll Brennweite für das Ocular, also $\frac{1}{2}m$ Zoll für das Objektiv zu (unter m die Vergröfserungszahl verstanden).

Die Theaterperspective sind kleine Gallileische Fernröhre, von grofsem Gesichtsfelde und geringer Vergröfserung.

Bringt man zwischen Objektiv und Ocular noch eine dritte convexe Linse, so läfst sich selbst bei einfachem Objektiv die Kugelabweichung vernichten. Die Farbenabweichung in der Axe läfst sich jedoch durch eine solche nicht ganz aufheben. Es wird dieselbe aber am kleinsten, wenn man die hinzutretende Linse um den $\frac{1}{2}(m+1)$ten Theil der Brennweite des Objektivs von dem Brennpunkt des letzteren entfernt stellt. Die eingeschaltete Ocularlinse nennt man das Collektiv des Fernrohrs.

Es wurde oben gesagt, dafs die Strahlen das Ocular parallel verlassen müfsten. Dies ist nicht streng richtig; sie müssen vielmehr so divergiren, als kämen sie von einem in der Sehweite befindlichen Gegenstande. Nun wird die Divergenz vermehrt, wenn man das Ocular dem Objektiv nähert; es mufs daher das erstere in einer besonderen Röhre enthalten sein, welche sich in der das Objektiv enthaltenden Röhre verschieben läfst, damit das Fernrohr

sowohl für Kurzsichtige (welche die Ocularröhre weiter hineinschieben müssen), als für Weitsichtige brauchbar sei. Da ferner für nähere Objekte das Bild *de* vom Objektiv weiter entfernt liegt, als für entferntere, so mufs man auch bei Betrachtung naher Gegenstände die Ocularröhre weiter herausziehen. Ja, da die Brennweite der rothen Strahlen gröfser als die der violetten ist, so mufs man das Rohr um etwas verlängern, wenn man rothe Gegenstände mit der vollkommensten Deutlichkeit sehen will.

Astronomische Fernröhre.

Die astronomischen Fernröhre zeigen das Objekt in verkehrter Lage, und haben zum Ocular entweder eine einfache convexe Linse, oder eine Verbindung von zwei convexen Linsen. Im ersten Falle sind Ocular und Objektiv um die Summe ihrer Brennweiten von einander entfernt, und das wahre verkehrte Bild steht in ihrem gemeinschaftlichen Brennpunkt.

Ist in Fig. 103 *A* das Objektiv, *B* das Ocular, ferner *DE* ein unendlich weit entferntes Objekt, und $CN = f_1$ die Brennweite des Objektivs, so kommt das Bild von *M* in *N* zu liegen, das Bild von *E* in dem Hauptstrahl *ECe* etwa senkrecht unter *N*, und das Bild von *D* im Hauptstrahl *DCd* etwa senkrecht über *N*, so dafs *de* der Ort des verkehrten Bildes von *DE* ist. Von den Punkten des Bildes fallen die Strahlen divergirend auf das Ocular, und da z. B. der von *e* nach *P* gehende Strahl ungebrochen durch dasselbe geht, und alle von *e* aus auf *B* fallende Strahlen parallel austreten müssen, so wird auch der äufserste von ihnen, *eg*, so gebrochen, dafs seine Richtung *gO* parallel *eP* wird. *O* wird sonach der Augenpunkt, und $gOP = ePN$ die Gröfse des halben Objekts, also

$$\frac{tg\, ePN}{tg\, MCD} = \frac{f_1}{f_2} = m$$

die Vergröfserungszahl (wo f_2 die Brennweite *NP* des Oculars bedeutet.

Das halbe Gesichtsfeld ist $\frac{a}{m+1}$, wenn af_2 der Ocular-Oeffnungshalbmesser wegen des Gesichtsfeldes ist, also im Maximum (wenn $a = \frac{1}{4}$ ist) $\frac{859}{m+1}$ Minuten, und die Entfernung des Auges (des Durchschnittspunktes des Hauptstrahls mit der Axe) $PO = \frac{m+1}{m} f_2$.

Von den Abweichungen gilt auch hier, was oben von den Gallileischen Fernröhren mit einfachem Ocular gesagt wurde. Keine der beiden Abweichungen läſst sich bei einfachem Objektiv fortbringen, sie stehen in demselben Verhältniſs zur Oeffnung des letzteren, und durch ein Doppelobjektiv werden dieselben beträchtlich vermindert. Die Länge des Fernrohrs wird durch ein solches Objektiv gleichzeitig kürzer und das Gesichtsfeld gröſser.

Durch Hinzufügung einer zweiten Ocularlinse (eines Collektivs) läſst sich das Gesichtsfeld beträchtlich vergröſsern. Dieses Collektiv darf aber nicht in dem gemeinsamen Brennpunkt (N) stehen, weil alsdann jede Unreinigkeit desselben, so wie die Streifen und Wellen im Glase sichtbar werden, und der Deutlichkeit schaden. Am vortheilhaftesten ist es, diese mittlere Linse so zu stellen, daſs das Bild in die Nähe der Mitte zwischen beiden Ocularlinsen fällt. Ferner ist die Stellung des Collektivs zwischen dem Bilde und dem letzten Ocular mit der Vernichtung der Randfarben unvereinbar; jedoch ist gerade diese Stellung nothwendig, wenn das Instrument zu Messungen gebraucht und zu diesem Zwecke mit einem Mikrometer versehen werden soll. Uebrigens sind bei einem Doppelobjektiv die Abweichungen in der Axe so gering, daſs sie meist die Deutlichkeit nicht stören.

Von der Verlängerung und Verkürzung des Fernrohrs durch eine verschiebbare Ocularröhre gilt dasselbe, was oben beim Gallileischen Fernrohr gesagt wurde.

Terrestrische Fernröhre.

Diese Fernröhre, welche man gern zu terrestrischen Beobachtungen gebraucht, weil sie die Gegenstände aufrecht zeigen, sind zu diesem Zwecke so construirt, dafs zwischen dem Objektiv und der letzten Ocularlinse zwei wahre Bilder entstehen. Die mindeste Zahl der Ocularlinsen, welche hierzu erfordert wird, wenn das Bild nicht zu undeutlich werden soll, ist drei.

Eine der gewöhnlichsten Einrichtungen ist die in Figur 104 dargestellte, bei welcher das eine Bild im gemeinschaftlichen Brennpunkt des Objektivs und der ersten Ocularlinse, das zweite Bild im gemeinschaftlichen Brennpunkt der beiden letzten Linsen fällt, so dafs die Strahlen aus der ersten und letzten Ocularlinse unter sich parallel hervortreten. Aus der Zeichnung wird ersichtlich, wie durch die beiden mittleren Linsen die Umkehrung des Bildes vor sich geht.

Giebt man den beiden letzten Linsen gleiche Brennweiten, so sieht man die Gegenstände wie durch ein astronomisches Fernrohr, welches nur aus den Linsen *A* und *B* besteht; giebt man den Linsen *B* und *C* gleiche Brennweiten, so verhält sich das Rohr wie ein astronomisches, welches aus den Linsen *A* und *D* besteht, nur dafs die Gegenstände aufrecht erscheinen.

Die alte Einrichtung, nach welcher die Linsen *B*, *C*, *D* gleiche Brennweiten und gleiche Entfernungen von einander erhalten, hat den Nachtheil eines kleineren Gesichtsfeldes und der Unmöglichkeit, die Randfarben gänzlich fortzuschaffen. Um die Abweichungen möglichst klein zu machen, mufs man der Linse *C* eine gröfsere Brennweite, als der Linse *B* geben.

Auch hier läfst sich das Gesichtsfeld bedeutend vergröfsern, wenn man noch eine Linse hinzufügt. Die beiden Bilder können dabei entweder zwischen die erste und zweite und zwischen die dritte und vierte Linse, oder zwischen die erste und zweite und zwischen die vierte und

fünfte, oder zwischen die zweite und dritte, und zwischen die dritte und vierte, oder endlich zwischen die zweite und dritte, und zwischen die vierte und fünfte fallen (das Objektiv als erste Linse gerechnet).

Im dritten Falle hat die dritte Linse nächst dem Objektiv den gröfsten Einflufs auf die Gröfse der Abweichungen, bei einfachem Objektiv müfste daher das Fernrohr eine bedeutende Länge erhalten.

In den Fraunhofer'schen Fernröhren, bei denen die Bilder zwischen die erste und zweite, und zwischen die vierte und fünfte Linse fallen, ist, wenn f_2, f_3, f_4, f_5 die Brennweiten der Oculare sind, in der Regel $f_2 = 0{,}82 f_3 = 0{,}71 f_4 = 1{,}28 f_5$, und wenn γ_1, γ_2, γ_3 die Entfernungen der Oculare sind, $\gamma_1 = 0{,}66 \gamma_2 = 1{,}26 \gamma_3$.

Die Ocularröhre der astronomischen und terrestrischen Fernröhre pflegt man mit einem Deckel zu versehen, und diesem in seiner Mitte eine runde Oeffnung zu geben, welche halb so weit von der letzten Linse entfernt ist, als die Entfernung des Auges betragen mufs, wenn das ganze Gesichtsfeld übersehen werden soll.

Ueberdies schaltet man zwischen den Linsen da, wo sich die wahren Bilder befinden, sogenannte Blendungen oder Diaphragmen ein, d. h. Scheidewände mit kreisförmigen Oeffnungen, welche dazu dienen, das von den Linsen und von den Wänden der Röhre reflektirte störende Licht möglichst abzuhalten. Diese Oeffnungen dürfen nicht kleiner als die respectiven Bilder sein, wenn sie nicht das Gesichtsfeld beschränken sollen.

Spiegelteleskope.

Gregory's Fernrohr.

Ein Durchschnitt des Gregory'schen Fernrohrs ist in Fig. 105 abgebildet. Das Objektiv *AB* ist ein Hohlspiegel, welcher in der *Mitte* (*bei C*) eine kreisförmige Oeffnung

hat. Das verkehrte Bild im Brennpunkte desselben, *ab*, spiegelt sich in einem kleineren Hohlspiegel **ED** ab, und würde ein aufrec[illegible]s Bild in $\alpha\beta$ bilden, wenn die Linse **C** nicht vorhanden wäre. Diese aber versetzt das Bild nach $a_1 b_1$, wo der Brennpunkt des letzten Oculars **F** liegt.

Ist **Ss** ein der Axe paralleler (von der Mitte des Objekts kommender) und auf den Rand des Objektivs fallender Strahl, so wird derselbe etwa nach **D** und von dort aus nach α reflektirt, so dafs in α (dem Durchschnittspunkt mit der Axe **OX**) da[illegible]ild des Spiegels **ED** ohne die Linse **C** zu liegen komme[illegible] würde. Durch die Brechung in **C** wird die Conv[illegible]nz vermehrt, und der Strahl bei a_1 durch die Axe gelenkt, um nachher, durch **F** gebrochen, eine mit **OX** parallele Lage zu erhalten. Ist ferner **S'C** die Richtung, welche ein vom Rande des Objekts ausgehender Strahl hat, und zwar derjenige, welcher nach **C**, der Mitte des Spiegels **AB** gerichtet ist, so würde derselbe, wenn sich in **C** noch ein Spiegelelement befände, etwa nach *d*, und von dort aus nach β reflektirt werden. Statt aber nach β zu gelangen, wird er durch die Linse **C** nach b_1 gebrochen, und gelangt nach der Brechung in **F** nach **O**, dem Orte des Auges. Nun wird zwar im Punkte **C** kein Strahl reflektirt, allein die mit **S'C** parallelen auf die vorhandenen Theile des Spiegels fallenden Strahlen nehmen denselben Gang, und gehen um so genauer durch die Punkte *b* und b_1, je kleiner die sphärischen und chromatischen Abweichungen sind. Die Oeffnung des Spiegels **ED** nimmt man eben so grofs oder etwas gröfser als die Oeffnung bei **C**, damit noch eine hinreichende Menge Strahlen vom Rande des Objekts in die Ocularröhre dringen können.

Ist das Objekt nicht sehr weit vom Fernrohr entfernt, so fällt das erste Bild jenseits des Brennpunktes *a*, und man mufs daher den Spiegel **ED** mittelst einer Stellschraube (*h*) weiter von **AB** entfernt rücken, um das zweite Bild in den Brennpunkt a_1 des letzten Oculars zu bringen.

Cassegrain's Fernrohr.

Das Cassegrain'sche Fernrohr (Fig. 106) unterscheidet sich von dem eben betrachteten nur dadurch, dafs der kleine Spiegel convex ist. Das Bild des Objektivs, welches hinter den zweiten Spiegel bei *ab* fallen sollte, wird durch den Convexspiegel *DE* gehindert sich zu bilden, und die zweite Reflexion giebt einem verkehrten Bilde bei $a_1 b_1$ sein Entstehen. Das Teleskop verhält sich daher wie ein astronomisches Fernrohr.

Die Länge des Rohrs wird bei sonst gleichen Verhältnissen um mehr als die doppelte Brennweite des kleinen Spiegels kürzer, als das vorhergehende, erhält dagegen ein etwas beschränkteres Gesichtsfeld.

Newton'sches Fernrohr.

Noch einfacher ist das in Fig. 107 dargestellte Newton'sche Fernrohr. Der zweite Spiegel ist ein ovaler Planspiegel, der 45° gegen die Axe des Rohrs geneigt ist, so dafs das Bild, statt in *ab* zu entstehen, sich in der Ocularröhre *CD* bei $a_1 b_1$ bildet, wo es durch eine Convexlinse betrachtet wird. Der Fufs des Planspiegels ist mit der Ocularröhre zugleich verschiebbar, um das Instrument auch für nahe Objekte zu gebrauchen.

Herschel's Fernrohr.

Dieses Instrument besteht nur aus dem Hohlspiegel *AB* und einer Convexlinse, durch welche man das Objekt *ab* betrachtet. Damit der Körper des Beobachters nicht zu sehr den in das Rohr tretenden Strahlen den Eingang sperrt, steht der Spiegel etwas schief gegen die Axe des Rohrs, so dafs das Bild mehr nach der Seite hinfällt. Diese Einrichtung ist natürlich nur auf grofse Spiegel berechnet. Dieser Art ist das bekannte 40füfsige von W. Herschel verfertigte Riesenteleskop, dessen Spiegel 48 Zoll Oeffnung und 40 Fufs Brennweite hat, und welches mit dem stärksten Ocular eine 6450malige Vergröfserung zuliefs.

Winkelmefs-Instrumente.

Was die Fernröhre so wichtig macht, ist ihre Benutzung zur Winkelmessung. Der erste Vortheil, den sie gewähren, ist die genaue Erkennung derjenigen Punkte, deren Winkelabstand gemessen werden soll, der zweite, die scharfe Bestimmung der vom Auge nach denselben gehenden Richtungslinien.

Die Messungsmethode und die hiervon abhängige Einrichtung der Mefsinstrumente sind verschieden, je nachdem die betrachteten Punkte im Gesichtsfelde des Fernrohrs zugleich erscheinen (die zu messenden Winkel also sehr klein sind) oder nicht.

Für den ersten Fall reicht es hin, den zu beobachtenden Punkt in die Axe des Rohrs zu bringen, und die Richtung dieser Axe mit möglichster Schärfe auf einem getheilten Kreise zu bestimmen. Den ersten Zweck erreicht man, wenn man an dem Orte des letzten wahren Bildes im Fernrohr zwei sich senkrecht kreuzende Spinnenfäden, Mikrometer genannt, anbringt, deren Durchschnittspunkt in der Axe des Rohrs liegt, und welche, als im Brennpunkt des Oculars befindlich, als ein scharf begrenztes dunkles Kreuz erscheinen. Bei Beobachtungen von Sternen in der Nacht, wo die Fäden sich nicht vor dem dunklen Himmelsgrund auszeichnen, erleuchtet man dieselben durch eine Lampe, deren Licht man durch eine im Fernrohr seitlich angebrachte Oeffnung leitet, von wo aus durch einen Planspiegel die Strahlen auf das Fadenkreuz hin reflektirt werden. Richtet man nun das Rohr so, dafs der betrachtete Punkt im Durchschnittspunkt der Kreuzfäden zu liegen kommt, so ist die Fernrohraxe ihrer Lage nach die zu bestimmende Richtungslinie.

Zur Fixirung der Richtungslinien dienen zwei concentrische, in der Regel aus Messing bestehende Kreise, von denen der kleinere, Alhidade genannt, während der Messung eine feste Lage hat, der gröfsere dagegen, dessen innerer Rand den äufseren Rand des kleineren nur eben berührt,

rührt, um den letzteren drehbar ist. Das Fernrohr ist an einer senkrecht gegen die Kreis-Ebenen gerichteten, in deren gemeinsamen Mittelpunkt befindlichen und mit dem äufseren Kreise fest verbundenen Axe befestigt, in der Art, dafs die Axe des Fernrohrs bei der Drehung desselben den Kreis-Ebenen parallel bleibt, und ihr Drehpunkt senkrecht über dem Mittelpunkt der letzteren liegt. Der äufsere Kreis ist an seinem mit Silber belegten Limbus in Grade und Gradtheile getheilt, und an der Alhidade sind ein oder mehrere Paare gegenüberstehender Nonien angebracht, so dafs, wenn man das Fernrohr dreht, der äufsere Kreis sich um den inneren verschiebt, und die Gröfse der Verschiebung an den Limbus mittelst der Nonien sich ablesen läfst. Da der Drehungswinkel so viel Mal abgelesen werden kann, als Nonien vorhanden sind, und zwar an verschiedenen Theilen des Limbus, so giebt das arithmetische Mittel der Ablesungen einen von den Theilungsfehlern des Instruments unabhängigeren Werth.

Statt mit dem Nonienkreise kann man auch das Fernrohr mit dem Limbus in Verbindung setzen, so dafs bei der Messung der letzte sich gegen den ersten verschiebt. Auch können die Nonien, statt auf einem Kreise gezeichnet zu sein, besondere kleine Bogenstücke bildend an Armen befestigt sein.

Die übrige Einrichtung des Mefsinstruments richtet sich nach dem besonderen Zweck desselben. Ist das Instrument so aufgestellt, dafs die Kreis-Ebenen in der Ebene des Meridians liegen, so heifst dasselbe **Meridiankreis** oder **Mittagskreis**. Es dient dazu, die Höhe der Gestirne bei ihrem Durchgange durch den Meridian und demnächst ihre Deklination zu messen, so wie aus der Zeit ihres Durchgangs ihre Rectascension zu bestimmen. Hat das Instrument blofs den letzten Zweck, so ist die Kreistheilung überflüssig, und man nennt es alsdann **Passage-Instrument** oder **Mittagsfernrohr**.

Da die Sterne in horizontaler Richtung durch das Gesichtsfeld gehen, so giebt man dem einen der Mikrometer-

fäden eine horizontale Stellung, weil man alsdann schon das Fernrohr vor dem Durchgange durch den Meridian einstellen und daher um so sicherer den Moment des Durchgangs beobachten kann.

Sind die Dimensionen des Instruments nur klein, und ist es so eingerichtet, dafs es zur Messung von Azimuthalwinkeln zwischen irdischen Gegenständen geschickt ist, so nennt man es Theodolith. Der getheilte Kreis mufs hierzu eine horizontale Stellung haben, in welche Lage er mittelst Stellschrauben an den Füfsen eines Stativs mit Hilfe einer Libelle gebracht wird.

Befestigt man die vorher unbeweglich angenommene Axe des Alhidadenkreises an einer vertikalen Säule so, dafs dieser Kreis mit seinem Fernrohr in einer vertikalen Ebene liegt, und kann man diese Säule um ihre eigene Axe drehen, so lassen sich mit den vorgenannten Instrumenten Höhenwinkel messen, und zwar wegen der Drehbarkeit der Säule in jedem Azimuth. Ist ferner die Säule selbst wieder die Axe eines unbeweglichen horizontalen Alhidadenkreises, und bewegt sie bei ihrer Drehung einen mit diesem concentrischen Limbus, so läfst sich zugleich das Azimuth, in welchem die beobachteten Punkte liegen, an demselben ablesen.

Ist der Limbus, dessen Axe die Säule ist, nicht horizontal, sondern der Ebene des Aequators, also die Säule der Weltaxe parallel, so nennt man das Instrument Aequatoreal. Richtet man das Fernrohr auf einen Stern, so giebt der mit ihm unmittelbar verbundene Kreis dessen Deklination, der im Aequator stehende Kreis dessen Rectascension an. Den einen der Mikrometerfäden pflegt man dem Aequator, also auch der Bahn der Gestirne, parallel zu nehmen.

Hiervon ganz abweichend ist die Einrichtung des Spiegelsextanten, welcher theils zur Messung der Win distanz zweier beliebig liegenden Punkte, theils zur M sung der Höhe eines Punktes über dem Horizonte di Dasselbe besteht aus einem Sextanten *abc* (Fig. 108), o-

sen Limbus bc in 120 Theile getheilt ist, und um dessen Centrum a sich eine geradlinige Alhidade af bewegt. Am Ende derselben befindet sich auf einer runden Scheibe der vertikale belegte Spiegel m, dessen Ebene mit af parallel ist, und auf dem Arm ac, oder hinter demselben ist ein zweiter kleinerer vertikaler Spiegel n angebracht, welcher nur zur unteren Hälfte belegt ist, und dessen Ebene parallel mit ab ist. Endlich befindet sich auf dem Arme ab ein Fernrohr, welches auf den Spiegel n gerichtet ist.

Soll nun z. B. die Winkeldistanz der Punkte A und B gemessen werden, so giebt man dem Instrument eine solche Stellung, dafs man den Punkt A durch den unbelegten Theil des Spiegels n in der Mitte des Fernrohrs erblickt, und dreht die Alhidade so weit, bis man unter A im belegten Theile des Spiegels das Bild des Punktes B sieht. Dies findet statt, sobald die von B auf m fallenden Strahlen so nach n reflektirt werden, dafs die zweite Reflexion dieselben in die Richtung der Fernrohraxe nd lenkt. Tritt dies nun bei einer Neigung mhn der Spiegel ein, und ist $\angle nmh = x$, $\angle enh = y$, also $\angle mnh = 180 - y$, so ist $\angle mhn = y - x$; ferner ist, wegen $\angle gmn = 2x$ und $\angle mng = 180 - 2y$, der Winkelabstand der Objekte A und B, d. h. der Winkel BgA gleich $2(y - x)$. Da ferner $\angle mhn = \angle baf$ ist, so ist baf der halben Objektsdistanz gleich, und da jeder Theil des Limbus $\frac{1}{2}$ Grad beträgt, so giebt, wenn bei b der Nullpunkt der Theilung steht, die bei f stehende Zahl die Zahl der Grade des zu messenden Winkels an. Auf den gröfseren Sextanten ist jeder Theil wiederum in 6 Theile getheilt, so dafs sich die Winkel bis auf 10 Minuten auf dem Limbus unmittelbar ablesen lassen, während ein am Ende der Alhidade befindlicher Nonius, wenn auf demselben 59 Limbustheile in 60 Theile getheilt sind, eine Ablesung bis auf 10 Sekunden gestattet.

Ein Vorzug dieses Instruments ist, dafs sich die Coincidenz der Bilder (A und B) und somit die Messung ohne Stativ bewerkstelligen läfst, so dafs es, in freier Hand gehalten, *selbst auf Schiffen*, wo wegen der Schwankungen

alle übrigen Instrumente unanwendbar sind, benutzt werden kann. Dies war auch der Zweck, zu welchem es von Newton erfunden wurde. Es dient hauptsächlich dazu, auf dem Meere die Höhe der Gestirne zu messen, wobei man das Bild der letzteren in dem Spiegel *n* mit dem durch das Meer begrenzten Horizont zur Berührung bringt. Auf dem Lande läfst sich die Höhe eines Gestirns mittelst dieses Instruments bestimmen, indem man den Winkel zwischen demselben und seinem in der horizontalen Fläche einer ruhigen Flüssigkeit ab[illegible]egelten Bilde (d. i. das Doppelte der Höhe) mifst. Die [illegible]äche dieser in einem Kästchen befindlichen Flüssigkeit [illegible]ennt man **künstlichen Horizont**.

— —

Was die Messung der I[illegible]anz sehr naher Objekte betrifft, welche gleichzeitig im Fernrohr gesehen werden, so reicht dazu meist eine veränderte Einrichtung des Mikrometers aus.

Kommt es blofs darauf an, die Lage eines Sterns aus der bekannten Lage eines ihm sehr nahen andern hinsichtlich seines Azimuthes oder seiner geraden Aufsteigung zu bestimmen, so könnte man sich schon mit den gewöhnlichen Kreuzfäden begnügen. Aus dem Unterschiede der Durchgangszeiten beider Sterne durch den im Meridian stehenden Faden des Mittagskreises, oder durch den im Deklinationskreise stehenden Faden des Aequatoreals findet man die Differenz der Stundenwinkel. Beträgt jener Zeitunterschied δ Sekunden, so ist der Unterschied der Rectascensionen $15\,\delta$ Raum-Sekunden. Zur Erzielung genauerer Resultate bringt man zu beiden Seiten desjenigen Fadens, durch welchen der Durchgang beobachtet wird, noch mit ihm parallele Fäden an, und benutzt die an allen diesen Fäden beobachteten Unterschiede der Durchgangszeiten.

Will man zugleich die Deklinationsunterschiede [illegible]sen, so bringt man noch einen Faden an, welcher dem Aequator parallel mittelst einer Schraube verschieben

läfst. Dieser Faden befindet sich, wie die festen Fäden, in einer mit einer kreisförmigen Oeffnung versehenen Metallplatte, welche sich in Leisten bewegt, die an der Platte der festen Fäden angebracht sind. Sind (Fig. 109) *ab* und *cd* die festen Fäden, *ef* der bewegliche, und befindet sich der eine Stern in *o*, so dreht man die Schraube, bis der Faden *ef* durch den zweiten Stern *s* geht. Die Zahl der Schraubenumgänge, welche nöthig ist, um den beweglichen Faden von *cd* nach *ef* zu bringen, bestimmt den Deklinationsunterschied. Den Winkelwerth eines Schraubenumganges bestimmt man, indem man dies Verfahren mit zwei Sternen von bekannter Lage anstellt. Die Bruchtheile der Schraubengänge liest man auf einer Kreistheilung am Schraubenkopf ab, an welchen sich ein feststehender Zeiger anlehnt.

Will man auch die Rectascensions-Differenzen unabhängig von den Zeitbeobachtungen messen, wie es bei sehr geringen Distanzen wünschenswerth ist, so macht man die Mikrometerscheibe in ihrer Ebene drehbar, so dafs sich der Winkel *aos*, um den man dieselbe verdrehen mufs, um *s* in den Faden *ab* zu bringen, an einem eingetheilten Kreise ablesen läfst, welcher mit dem Kreise des Mikrometers *acbd* concentrisch ist.

Zu eben diesem Zwecke dient das einer grofsen Schärfe fähige Heliometer.

Dieses Instrument, dessen jetzige Einrichtung von Dollond herrührt, und welche von Fraunhofer noch weiter vervollkommnet ist, besteht aus einem Fernrohr, dessen Objektiv in zwei Hälften geschnitten ist, die sich längs ihrer Durchschnittslinie gegen einander verschieben lassen. Diese Hälften sind zu diesem Zwecke in Schiebern angebracht, welche durch Schrauben ihre Bewegung erhalten. Fallen die Centra der Objektivhälften nicht zusammen, so giebt jede derselben von dem im Fernrohr gesehenen Objekte ihr eigenes Bild, und der Abstand der Bilder wird durch die Zahl der Schraubenumdrehungen gemessen, durch welche *die Hälften* gegen einander verschoben wurden.

Durch eine Drehung der Objektivfassung wird diejenige Stellung hervorgebracht, in welcher die Verschiebungslinie mit der Richtung zusammenfällt, in welcher der Abstand der Objekte gemessen werden soll.

Ist das zu Messende z. B. der Durchmesser der Sonne [illegible] oder eine der Axen einer Planetenscheibe, so [illegible] man die eine Linsenhälfte so weit, bis das eine [illegible] mit seinem einen Rande den entgegengesetzten Rand [illegible] anderen Bildes berührt.

Die Messung läfst sich multipliciren, wenn man nach [illegible] eben erwähnten Operation die fortgeschobene Hälfte [illegible] und die andere vorher unbewegte so weit fort[illegible] bis sich die Ränder berühren, welche den vorher [illegible]ontakt gewesenen entgegenstehen, darauf die bewegte [illegible]e fixirt, und von neuem den ersten Schieber weiter [illegible]ur neuen Berührung der Ränder fortbewegt. Die To[illegible]rschiebung entspricht alsdann dem dreifachen Durchmesser der Scheibe. Durch eine Wiederholung dieses Verfahrens erhält man den fünffachen, siebenfachen etc. Durchmesser.

Da bei der Verschiebung des Objektivs auch eine veränderte Stellung des Oculars erfordert wird, so befindet sich auch dieses in einem Schieber, welcher durch eine Schraube in eine seitliche Bewegung versetzbar ist, während mittelst der Fassung dasselbe zugleich in seiner Ebene sich drehen läfst.

Der Werth einer Schraubendrehung läfst sich entweder durch Vergleichung einer bekannten Distanz mit der durch das Instrument für diese Distanz gefundenen Umdrehungszahl bestimmen, oder durch das Gaufs'sche Verfahren. Dasselbe beruht darauf, dafs die vom Brennpunkte eines Fernrohrs ausgehenden Strahlen das Objektiv unter sich parallel verlassen, und daher durch das Objektiv eines zweiten Fernrohrs in dem Brennpunkte dieses letzteren wieder vereinigen lassen. Man kann daher durch ein Fernrohr das Fadenkreuz eines anderen deutlich erkennen, *sobald* ihre Axen parallel gestellt sind, und die Kreuzfäden

hinlänglich erhellt sind. Hat man nun die Objektivhälften eines Heliometers um eine bestimmte Zahl Schraubendrehungen verschoben, so erblickt man durch ein zweites Fernrohr, welches in seiner Axe vor demselben aufgestellt ist, ein doppeltes Bild des Fadenkreuzes, von welchen jedes einer der Objektivhälften angehört. Aus der Entfernung dieser beiden Bilder, welche mit dem Fernrohr gemessen wird, und aus der bekannten Umdrehungszahl der Schraube läfst sich alsdann der Werth einer einzigen Umdrehung berechnen.

Die ganze Zahl der Schraubendrehungen wird durch Scalen gemessen, die sich an den Schiebern befinden, mittelst eines feststehenden Index. Die Bruchtheile der Drehungen mifst man durch eine Theilung am Kopf der einen Mikrometerschraube, dessen Umfang in 100 Theile getheilt ist.

Zur Messung der Winkel, welche Krystallflächen mit einander bilden, dienen die Goniometer. Man mifst mit denselben den Winkel, um welchen man einen Krystall um die Kante des zu erforschenden Winkels drehen mufs, damit die zweite Fläche desselben derjenigen Ebene parallel wird, in welcher sich anfänglich die erste befand. Der Drehungswinkel ist alsdann das Supplement des Neigungswinkels der Flächen. Behufs der Messung wird der Krystall in eine solche Lage gebracht, dafs seine Kante senkrecht gegen einen getheilten Kreis gerichtet ist, auf welchem sich die Drehung des Krystalls um jene Kante ablesen läfst. Die Parallelität der Ebene der beiden Flächen in ihren successiven Lagen wird an der unveränderlichen Richtung reflektirter Strahlen erkannt. Sind nämlich *bac* und *b'ac'* (Fig. 110) die successiven Lagen des Krystallwinkels (wo die Flächen *ac* und *ac'* identische sind), und ist *eo* die Richtung des Strahls *Se* nach der Reflexion in *e*, so sieht ein Auge in *O* das Bild von *S* in S_1, die reflektirende Fläche mag *ab* oder *ac'* sein, und die Drehung *bab'* ist das Supplement des zu messenden Winkels *bac*.

Das *einfachste* Goniometer ist das von Malus (oder

Charles), bei welchem der Krystall auf einer Alhidade des getheilten horizontal gestellten Kreises steht, und zwar so, dafs die Kante gegen das Centrum desselben gerichtet ist. Ein in der Richtung *oe* (also auch der Kreis-Ebene parallel) angebrachtes Fernrohr dient zur Betrachtung des Bildes S_1 eines fernen Gegenstandes S, welches in beiden Stellungen des Krystalls in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheinen mufs. Der Drehungswinkel wird durch die Alhidade angegeben.

Beim Wollaston'schen Goniometer (Fig. 111) steht der getheilte Kreis vertikal, und läfst sich durch eine horizontale Welle drehen, welche der Länge nach durchbohrt ist, und eine zweite Welle umschliefst, die sich mittelst eines Knopfes drehen läfst, ohne den Kreis mitzubewegen. Am entgegengesetzten Ende der inneren Welle befindet sich ein Bogen, der sich bei der Drehung um seinen in der Richtung der Rotationsaxe liegenden Durchmesser bewegt. In der Richtung dieses Durchmessers trägt der Bogen einen Stift, an welchem der Krystall mit Wachs so befestigt wird, dafs seine Kante in der Rotationsaxe liegt.

Zur Messung sind zwei entfernte, Horizontallinien bildende, senkrecht über einander befindliche Visirobjekte nöthig (z. B. die Arme von Fensterkreuzen an einem gegenüberliegenden Hause, oder eine entfernte Horizontallinie, und deren in einem Planspiegel abgespiegeltes Bild).

Sind die Punkte S und S_1 (Fig. 110) die Durchschnitte dieser Linien, so mufs, während der Index auf 0 steht, mittelst der inneren Welle der Krystall so gewendet werden, dafs ein bei *e* gehaltenes Auge das von der Fläche *ab* reflektirte Bild von S mit der direkt gesehenen Linie S_1 zusammenfallen sieht. Alsdann wird die äufsere Welle, welche die innere Welle mit sich führt, gedreht, bis diese Coincidenz auch auf der Fläche *ac'* stattfindet. Der Index am Kreise zeigt sodann den Drehungswinkel. Dafs die Kante des Krystalls der Drehungsaxe parallel ist, erkennt man daran, dafs auf beiden Flächen die Coincidenz vollständig wird.

Bleibt aber das Auge nicht genau auf derselben Stelle bei beiden Beobachtungen, so tritt die Coincidenz bei verschiedenen Neigungen ein, ein Umstand, welcher die Messung um so fehlerhafter machen kann, je näher die visirten Linien sind. Um diesem Fehler zu begegnen, muſs man möglichst kleine Krystallflächen anwenden, und die Visirobjekte möglichst fern wählen. Ein zweiter Fehler entspringt aus der nicht leicht zu erhaltenden genauen Coincidenz der Kante mit der Drehungsaxe, welche gleichfalls um so erheblicher wirkt, je näher die Objekte sind. Der letzte Mangel trifft auch das Instrument von Malus.

Da diese Fehler oft weit gröſser sind, als die kleinsten mit dem Limbus meſsbaren Winkel, so schlug Rudberg eine Einrichtung vor, die, wäre sie ausführbar, groſse Schärfe gewähren würde. Sie unterscheidet sich von der des Malus'schen Instruments dadurch, daſs das Objekt ein Fadenkreuz ist, welches im Brennpunkt einer Linse steht, damit die Strahlen, parallel aus der letzteren tretend, auf die Krystallfläche fallen. Das Bild des Fadenkreuzes muſs durch Drehung der Alhidade, auf welcher der Krystall befestigt ist, zur Deckung mit dem Fadenkreuz des Fernrohrs gebracht werden, in welchem Fall die Axe des Fernrohrs und der Linse (das sind die Richtungen der einfallenden und reflektirten Strahlen) gleiche Winkel mit der Krystallfläche bilden. Hierbei würde keine vollkommene Coincidenz der Krystallkante mit der Drehungsaxe erfordert. Verhält sich die Brennweite des Oculars zu der des Objektivs, wie der kleinste mit dem Instrument meſsbare Winkel zum Durchmesser der Fäden, wie er durch das Ocular erscheint, so wird jeder Fehler der Krystallage erkannt, welcher einen Fehler in dem Drehungswinkel erzeugt, der die kleinste mit dem Instrument meſsbare Gröſse übersteigt. Die Parallelität der Kante des Krystalls mit der Axe des Kreises wird durch die Unmöglichkeit, die Fadenkreuze nach der Drehung zur völligen Deckung zu bringen, erkannt.

Endlich mag noch des Heliotrop's Erwähnung geschehen, *als eines* Instruments zu gröſseren geodätischen

ungen. Es dient dazu, ein Visirobjekt zu erzeugen, es noch in sehr grofsen Entfernungen sichtbar ist. s Visirobjekt ist das Reflexionsbild der Sonne in einem nspiegel. Da aber dieses Bild nur in einer Richtung, der Richtung der reflektirten Sonnenstrahlen, sichtbar is., mufs sich der Spiegel so wenden lassen, dafs die Strah- em Orte hingeworfen werden, wo sich der Geo- r befindet. Zu diesem Zweck kreuzt man zwei Plan- gel *ab* und *cd* (Fig. 112) senkrecht, und dreht diesel- so, dafs man im Fernrohr *AB*, welches auf den vi- den Beobachter (der sich in der Richtung *Bm* befin- ge) gerichtet ist, zugleich im Spiegel *cd* in dersel- Richtung das Sonnenbild erblickt. Der Spiegel *ab* wirft alsdann die Sonnenstrahlen dem Beobachtungsorte zu. n wird der Sonnenstrahl *So* von dem Spiegel *cd* nach geworfen, so ist $Soa = aoB = mob$, also auch $Sod = dom$, mithin ist, da *od* das Einfallsloth auf *ab* ist, auch *om* die Richtung des vom Spiegel *ab* reflektirten Strahls. Der Spiegel, welcher dem Fernrohr zugewendet ist, besteht aus zwei Theilen *em* und *nf* (Fig. 113), welche in einer Ebene liegen und von einem Rahmen *ef* umschlossen sind; der andere (schwarze) Spiegel *hg* befindet sich zwischen diesen beiden Theilen. Der Rahmen *ef* wird von einem anderen Rahmen *acdb* getragen, und ist, während dieser feststeht, um *ab* als Axe drehbar. Der Arm *cd* des Rahmens *acdb* ist an der Fassung des Fernrohr-Objektivs befestigt, und das Fernrohr selbst läfst sich in einem Lager um seine optische Axe drehen, so dafs der Spiegel *ef* in jede beliebige Lage gegen die Sonnenstrahlen gebracht werden kann, während das Fernrohr auf den Beobachtungsort gerichtet ist.

Gaufs, der Erfinder dieses Instruments, fand, dafs das so erzeugte Licht in 40000 Meter Entfernung noch deutlich mit blofsem Auge erkennbar sei. Unter günstigen Umständen sah man sogar das vom Brocken aus reflektirte Licht auf dem 69194 Meter entfernten Hohenhagen mit blofsem Auge, und mit dem Fernrohr liefs sich das Licht

vom Inselsberge noch auf dem Brocken, also in 105986 Meter Entfernung, sehen.

Mikroskope.

Nächst den Fernröhren behaupten die Mikroskope ihres Nutzens wegen den ersten Rang unter den optischen Instrumenten. Der Zweck derselben ist, Objekte oder Theile von Objekten deutlich erkennen zu machen, welche, in die Entfernung des deutlichen Sehens gehalten, unter einem so kleinen Gesichtswinkel erscheinen, dafs sie mit freiem Auge entweder gar nicht oder nur undeutlich gesehen werden können. Sie bestehen meist aus einem System von Linsen, welche die von den einzelnen Punkten des Objekts ausgehenden Strahlen so lenken, dafs sie bei ihrem Austritt wie von Punkten divergiren, die in der Entfernung des deutlichen Sehens sich befinden. Vereinigen sich die Strahlen innerhalb des Systems zu einem wahren Bilde, so heifsen die Mikroskope zusammengesetzte; ist dies nicht der Fall, so heifsen sie einfache Mikroskope oder, wenn die Vergröfserung nur schwach ist, Loupen.

Einfache Mikroskope.

Die einfachen Mikroskope können wiederum aus einer Linse oder aus mehreren bestehen.

Bei einer einzigen Linse (die jedesmal convex sein mufs) ist die Vergröfserung des Gesichtswinkels nur relativ, und die Verdeutlichung des Objekts wird durch die Nähe des letzteren erzeugt. Ist z. B. (Fig. 100) *AB* die Linse, *eF* deren Axe, *Ce* die Sehweite, und *ED* ein Objekt, welches innerhalb der Brennweite, dem Brennpunkte jedoch so nahe steht, dafs die von *E* kommenden Strahlen bei ihrem Austritt so divergiren, als kämen sie von *e*; ist ferner *C* die Mitte der Linse, so gehen die Strahlen *EC* und *DC* ungebrochen durch dieselbe, und da die übrigen von *E* und *D* kommenden Strahlen wegen der Gröfse von

Ce fast parallel mit *EF* und *DH* sind, so sieht man den Punkt *E* in der Richtung *Ce* und den Punkt *D* in der Richtung *cd*, vorausgesetzt, dafs sich das Auge in *C* befindet. Es erscheint daher das Objekt *ED* und dessen Bild *ed* unter demselben Winkel *DCE*. Dagegen ist der Gesichtswinkel des Bildes um so viel gröfser als der Gesichtswinkel des in die Sehweite gehaltenen Objekts, als *EC* gröfser als *ec* ist. Bezeichnet man die Objektsweite *CE* durch *b*, und die Sehweite *eC* durch *l*, so ist, wegen $DE:de = b:l$, die durch das Mikroskop hervorgebrachte Vergröfserung $\frac{l}{b}$. Man erhält die letztere daher, da *b* der Brennweite nahe gleich ist, wenn man die Sehweite durch die Brennweite dividirt, und sie wächst demnach umgekehrt wie die Focallänge. Nun kann man zwar, wenn *C* innerhalb der Linse liegt, nicht das Auge in diesen Punkt halten, die Differenz ist jedoch für ein dicht hinter die Linse gehaltenes Auge gering genug, um die Vergröfserungszahl nicht merklich zu ändern.

Während bei den Fernröhren die Gröfse des Gesichtsfeldes durch das Doppelte des Winkels *DCE* (wo *D* der äufserste gesehene Punkt ist) gemessen wurde, wird dieselbe bei den Mikroskopen, da jener Winkel mit der Objektsweite sich ändert, durch die Gröfse des auf einmal übersehbaren Objektes, d. h. durch $EC \cdot tang\, DCE$ bestimmt.

Wegen der, zu starken Vergröfserungen nöthigen, Kürze der Brennweite, und der damit verbundenen Gröfse der Kugelabweichung, sind solche einfache Linsen nur für schwächere Vergröfserungen anwendbar.

Die planconvexe Form der Linse (die ebene Seite dem Objekte zugekehrt) ist, wenn dieselbe aus gewöhnlichem Glase besteht, ziemlich nahe die Form der kleinsten Abweichung.

Die Gröfse, welche der Durchmesser des Abweichungskreises haben kann, um die Deutlichkeit noch nicht zu beeinträchtigen, ist 10 — 12 Sekunden.

Vertheilt man die Brechung auf zwei oder mehrere

Linsen, so dürfen die Brennweiten bei derselben Vergrösserung bedeutender, die Krümmungen also geringer sein, so dass das Mikroskop eine grössere Oeffnung verträgt und somit eine grössere Helligkeit gewährt.

Sind z. B. *A* und *B* (Fig. 114) zwei Convexlinsen, und ist *BH* die Sehweite, so muss, wenn ein vor der Linse *A* befindlicher Gegenstand *E* durch *B* deutlich gesehen werden soll, ein in *b* einfallender Strahl nach *bc* (in die Verlängerung von *Hb*) hingebrochen werden. Ist ferner *Ea* ein Strahl, welcher durch die Brechungen in *A* und *B* den Weg *abc* nimmt, so liegt der Brennpunkt der Linse *B* dicht bei *G*, in der Verlängerung von *ba*, und der Brennpunkt von *A* zwischen *H* und *E*, etwa in *F*. Die Brennweite *FA* und noch mehr die Brennweite *GB* sind daher grösser, als die Objektsweite *EA*. Da nun die Brennweite der schärfsten Linse grösser, als die Objektsweite, von deren Kürze die Vergrösserung abhängt, genommen werden kann, so werden auch die Krümmungen und mit ihnen die sphärische Abweichung geringer.

Haben die Linsen die günstigsten Krümmungen, so wirkt die Kugelabweichung am wenigsten störend, wenn die Brennweiten so genommen werden, dass $AF = AG = 2AE$ wird.

Bei drei Linsen (für welche die Objektsweite ein noch kleinerer Theil der Brennweite der ersten Linse wird), wenn sie gleichweit, und zwar um hb von einander entfernt sind (unter b die Objektsweite verstanden), erreicht man diesen Zweck, wenn man die Brennweiten der 1sten, 2ten, 3ten Linse beziehlich zu $3b$, $(3+2h)b$, $3(1+h)b$ annimmt.

Die Vergrösserung bei zwei Linsen ist

$$\frac{2l}{(2+h)b},$$

bei drei Linsen

$$\frac{l}{(1+h)b}.$$

Zusammengesetzte Mikroskope.

Bei diesen wird ein dioptrisches oder katoptrisches Bild des Objekts durch ein einfaches Mikroskop, das Ocular, betrachtet. Das Linsen- oder Spiegelsystem, welches das Bild erzeugt, heifst auch hier Objektiv.

Ist z. B. das Objektiv eine einzelne Convexlinse *A* (Fig. 115), so mufs das Objekt *E* aufserhalb der Brennweite stehen, wenn hinter *A* (etwa in *e*) ein wahres Bild von *E* entstehen soll. Dies Bild wird um so gröfser, je gröfser *Ae* in Vergleich mit *AE* ist. Man mufs daher zu starken Vergröfserungen das Objekt *E* dem Brennpunkte von *A* möglichst nahe bringen. Doch wird diese Vergröfserung dadurch beschränkt, dafs *Ae* nicht zu grofs werden darf, wenn nicht das Instrument eine unbequeme Länge erhalten soll. Man pflegt daher zwischen *A* und *e* noch eine Convex-Linse, ein sogenanntes Collektiv, anzubringen, welches die Convergenz der aus *A* tretenden Strahlen beschleunigt. Das Ocular *B* verhält sich zum Bilde *e* wie ein einfaches Mikroskop zum Objekt, so dafs die Vergröfserung des Objektivs durch das Ocular noch vermehrt wird, und zwar um so bedeutender, je kleiner dessen Brennweite *Be* ist. Das Collektiv macht überdies die Vernichtung der Randfarben möglich.

Soll das Gesichtsfeld möglichst grofs sein, und sollen die Randfarben verschwinden, so mufs das Collektiv eine dreimal gröfsere Brennweite als das Ocular haben, und von demselben um $\frac{2}{3}$ seiner Brennweite entfernt stehen, so dafs das Bild in der Mitte zwischen beiden liegt; und von dem Objektiv mufs dasselbe, wenn *b* die Objektsweite, *l* die Sehweite und *m* die Vergröfserungszahl ist, um das $\frac{1}{2}\left(\frac{mb}{l}-1\right)$fache seiner Brennweite entfernt stehen. Die Vergröfserung selber ist für diesen Fall $\frac{2l}{bf}\beta$, wo *f* die Brennweite des Collektivs und β die hintere Vereinigungsweite des Objektivs bedeutet. Die Gröfse des übersehba-

ren Theils des Objekts ist endlich im günstigsten Falle

$$\frac{bl}{mb+l}.$$

Das Gesichtsfeld läfst sich noch vergröfsern, wenn man zu der Ocularlinse *B* eine zweite hinzufügt.

Ein Mangel der Mikroskope mit einfachem Objektiv ist, dafs eine grofse Nähe des Objekts, wie sie zu starken Vergröfserungen nöthig ist, eine sehr kurze Brennweite und mithin sehr starke Krümmungen des Objektivs erfordert, und dafs man deswegen, wenn man einigermafsen deutliche Bilder haben will, die Oeffnung sehr klein nehmen und sich daher mit einer sehr geringen Helligkeit begnügen mufs.

Diesen Uebelstand kann man zum Theil dadurch beseitigen, dafs man sich eines aus mehreren Convexlinsen bestehenden Objektivs bedient. Man gewinnt nämlich dadurch den Vortheil, dafs dafs Objekt innerhalb der Brennweite der Objektivlinsen stehen darf, und dafs überdiefs die Herumlenkung der Strahlen zum wahren Bilde des Objekts nicht mehr durch eine einzige Linse, sondern durch mehrere bewerkstelligt wird, deren Krümmungen demnach bedeutend schwächer sein dürfen.

Sind z. B. *A*, *B*, *C* (Fig. 116) die Linsen des Objektivs, F_1, F_2, F_3 beziehlich ihre Brennpunkte, und *E* ein Punkt des Objektes, so braucht der Randstrahl *Ea* nach dem Austritt aus *A* noch nicht gegen den Axenstrahl *Ee* zu convergiren; er erhält vielmehr eine Richtung *ab*, deren Verlängerung die Axe diesseit *E* in E_1, dem Punkte des virtuellen Bildes von *A*, schneidet. Der Punkt E_1 verhält sich gegen *B*, wie *E* gegen *A*, und es entsteht daher ein virtuelles Bild von E_1 in E_2, welcher Punkt in der Verlängerung des gebrochenen Strahls *bc* liegt. Endlich mufs E_2 etwas weniges aufserhalb des Brennpunktes F_3 der Linse *C* liegen, damit der gebrochene Strahl *ce* hinlänglich weit hinter *C*, in dem wahren Bilde des Objektivs die Axe schneidet. Aufserdem, dafs AF_1 beträchtlich gröfser als *EA* sein kann, erreicht man den Vortheil, dafs die Oeffnung der Linse *A* nur gering zu sein braucht,

weil wegen der Kleinheit von *EA* die Strahlen sehr dicht auf *A* fallen, und dafs die Linse *C*, welche den breitesten Strahlenkegel empfängt, gerade diejenige Linse ist, welche die gröfste Brennweite hat. Man sieht ferner, dafs bei derselben Oeffnung *Aa* der Linse *A* die Strahlen die übrigen Linsen dem Centrum um so näher treffen, je näher die Linsen einander stehen und je geringer deren Dicke ist, und dafs also an Deutlichkeit durch Näherung der Linsen und durch Verminderung ihrer Dicke gewonnen wird.

Um endlich auch die Störung durch die Dispersion aufzuheben, nimmt man jetzt zu den besseren Mikroskopen statt der einfachen Linsen *A*, *B*, *C* achromatische Doppellinsen; obgleich dies nur auf Kosten der Helligkeit möglich ist. Soll nämlich eine Convexlinse durch eine achromatische Doppellinse von gleicher Brennweite ersetzt werden, so mufs die Brennweite des convexen Kronglases bedeutend geringer als die der einfachen Linse sein, weil die concave Flintglaslinse die Divergenz der Einfallsstrahlen bedeutend vermehrt. Die vermehrte Krümmung erheischt aber eine gröfsere Beschränkung der Oeffnung.

Das Bild *e* wird unter übrigens gleichen Umständen, namentlich bei kleinen Brennweiten, um so freier von der sphärischen Abweichung, je freier die Bilder E_1 und E_2 davon sind.

In der Regel nimmt man die vorderen aus Flintglas bestehenden Linsen in jedem der Paare *A*, *B*, *C* planconcav, und kittet an dieselben die biconvexen Kronglaslinsen, so dafs die sich berührenden Krümmungen gleich werden.

Die ebene Vorderseite ist nicht etwas durchaus Nothwendiges, jedoch insofern praktisch, als eine achromatische Doppellinse (aus Flint- und Kronglas) für eine gewisse innerhalb der Brennweite liegende Objektsweite ein Minimum der Abweichung erreicht, so dafs man eine solche Doppellinse, sei es durch Aenderung der Objektsweite oder durch Aenderung der Brennweite (während die Dicke der Linsen dieselbe bleibt, wenn nur der Achromatismus nicht gestört *wird)* geschickt machen kann, eine Stelle im Objektivsystem

ein-

einzunehmen. Die Vertauschung des Kronglases mit Bergkrystall in der stärksten Doppellinse einiger Plöfsl'schen *) Mikroskope wirkt einerseits deshalb vortheilhaft, weil Bergkrystall das Licht weniger zerstreut, also zur Compensation eine schwächere Flintglaslinse hinreicht, so dafs zur Erlangung einer bestimmten Wirkung auch die Bergkrystalllinse schwächer genommen werden kann; anderntheils, weil jene Substanz stärker brechend ist, und daher die aus ihr gefertigten Linsen bei derselben Brennweite schwächere Krümmungen erhalten können. Beide Umstände wirken vereint zur Schwächung der sphärischen Abweichung.

Da bei gegebener Brennweite eines achromatischen Linsenpaars das Eben-Sein der Vorderfläche nur für eine bestimmte Objektsweite der vollkommensten Form entspricht, so läfst sich bei einer gegebenen Länge des Mikroskopes, wenn schon zwei Paare ihrer Form und Stellung nach bestimmt sind, das dritte Paar, dessen Brennweite somit gleichfalls fast genau bestimmt ist **), um so seltener vorn eben nehmen, je kürzer die Brennweiten der einzelnen Paare sind ***), und je mehr das dritte Paar die Fehler der ersten Paare zu compensiren hat. Bei einer Berechnung des Objektivs, bei welcher man mit dem ersten Paare anfängt, wird diese Abweichung von der gebräuchlichen Form das dritte Paar, bei der Anfertigung durch Versuche, bei welcher man mit dem dritten Paar anfängt, wird diese Abweichung das erste Paar treffen.

Da ferner der Aplanatismus eines Paars von seiner Stellung gegen das Objekt oder gegen das virtuelle Bild

---

*) Die von Plöfsl in Wien angefertigten Mikroskope sind diejenigen, welche durch ihre Vorzüglichkeit vor allen anderen bisher verfertigten den Vorrang verdienen. Neuerdings ist es Pistor in Berlin gelungen, dieselben sehr getreu nachzubilden.

**) Die Brennweite ist deswegen noch nicht ganz vollkommen bestimmt, weil die Dicke, und die Distanz des dritten Paars von dem Nachbarpaare, und somit die Vereinigungsweiten sich noch etwas variiren lassen.

***) Bei kurzen Brennweiten werden nämlich die Krümmungsfehler einflufsreicher.

des vorangehenden Paares abhängt, so läfst sich oft, wenn die Paare nur nahe richtig construirt sind, durch kleine Aenderungen ihrer Distanzen die Deutlichkeit des Objektivbildes vergröfsern.

Ist jedes Paar, wie oben angenommen wurde, für sich aplanatisch, so läfst sich auch in dem Mikroskop, wenn man sich mit schwächeren Vergröfserungen begnügt, das Paar *C* oder die Paare *B* und *C* für sich gebrauchen. Im ersten Falle mufs sich das Objekt in E_2, der vorderen Vereinigungsweite von *C*, im zweiten Fall in E_1, der vorderen Vereinigungsweite von *B*, befinden. Dagegen können *A* und *B*, mit einander verbunden, nur ein undeutliches Bild geben.

Es wurde oben für den Fall eines Doppeloculars die erste Ocularlinse (das Collektiv) als zwischen dem Objekt und dem wahren Bilde befindlich angenommen. Die Anordnung kann aber auch so geschehen, dafs das Bild aufserhalb der Oculare fällt. Alsdann lassen sich jedoch, wie bei dem astronomischen Fernrohr in dem entsprechenden Fall, die Randfarben nicht völlig fortschaffen, wenn das Gesichtsfeld nicht so klein werden soll, dafs das Instrument sehr an Brauchbarkeit verliert. Eine solche Ocularstellung ist indefs nöthig, wenn an dem Orte des wahren Bildes ein Mikrometer angebracht werden soll. Fällt nämlich das Bild zwischen die Oculare, so bringt jede Verrückung dieser Linsen, wie sie z. B. bei der Anpassung für verschieden weitsichtige Augen bei der Reinigung der Gläser etc. unvermeidlich ist, eine Störung hervor. Auch mufs die Brennweite des letzten Oculars, weil das Objektivbild durch das Collektiv verkleinert wird, zur Hervorbringung derselben Vergröfserung erheblich verringert werden, was wiederum den Nachtheil hat, dafs die Mikrometerfäden selbst zu dick erscheinen würden, um noch bei genauen Messungen eine hinlängliche Schärfe zu gestatten.

Was die äufsere Einrichtung der neueren dioptrischen zusammengesetzten Mikroskope betrifft, so befinden sich die *Oculare* in einer eigenen, innen geschwärzten Röhre, dem

Ocular-Einsatz, welcher sich in die gleichfalls innen geschwärzte Hauptröhre einschrauben läfst. Die Doppellinsen des Objektivs sind einzeln gefafst, und lassen sich übereinander- und an das entgegengesetzte Ende der Hauptröhre anschrauben. An dem Ort des wahren Bildes sind wie bei den Fernröhren Diaphragmen angebracht. Zur Erhaltung verschiedener Vergröfserungen dienen mehrere Ocular-Einsätze und Objektive, welche demselben Hauptrohr angepafst sind. Von den Ocular-Einsätzen enthält das eine die Linsen hinter dem Diaphragma, um zu Messungen gebraucht zu werden. Die Objektiv-Doppellinsen, deren in der Regel 6 sind, und welche nach der Gröfse ihrer Brennweite so numerirt sind, dafs die mit 1 bezeichnete die schwächste ist, lassen sich zum Theil einzeln, zum Theil zu zweien oder dreien combinirt gebrauchen. Sind dieselben so construirt, dafs sie für gewisse Stellen in ihrer Anordnung aplanatisch sind, so lassen sich nach dem Obigen diejenigen Combinationen im Voraus bestimmen, welche die deutlichsten Bilder erzeugen.

Da jeder Verbindung eines der Ocular-Einsätze mit einer der Objektiv-Vorrichtungen eine eigene Objektsweite zukommt, so hat man das Instrument so eingerichtet, dafs die Röhre des Mikroskops einem feststehenden Tischchen, auf welchen die Objekte zu liegen kommen, oder dieses Tischchen dem feststehenden Rohre beliebig genähert werden kann. Jene Bewegung geschieht entweder mittelst einer gezähnten Stange und eines Getriebes, oder mittelst einer mikrometerartigen Schraubenvorrichtung. Das Tischchen besteht bei den gröfseren Instrumenten aus zwei über einander befindlichen Platten, welche in der Mitte mit einer Oeffnung versehen sind, um das Licht von unten hindurch zu lassen. Die untere derselben ist fest, und die obere läfst sich nach zwei auf einander senkrechten Richtungen mittelst Schrauben verschieben, um dem auf sie angeklammerten Objektenträger die Bewegungen geben zu können, welche nöthig sind, das Objekt in das Gesichtsfeld oder in die Axe des Rohrs zu bringen.

Ein sehr wichtiger Bestandtheil des Instruments ist noch der Beleuchtungsapparat. Dieser ist verschieden, je nachdem die Objekte durchsichtig oder undurchsichtig sind. Für den ersten Zweck ist unter dem Tischchen ein von einer Gabel gehaltener Hohlspiegel angebracht, welcher sich um eine in der Spiegel-Ebene befindliche Axe so drehen läfst, dafs er die vom freien Himmel oder von einer Lampe oder Kerze ausgesendeten Strahlen gegen das Objekt reflektirt. Bei der Betrachtung opaker Gegenstände leitet man dagegen das Licht durch eine Sammellinse von oben auf das Objekt. Noch vorzüglicher ist die Anwendung eines dreiseitigen Prismas mit zwei convexen Flächen, wie es von Selligue zuerst angegeben wurde. Direktes oder durch eine Sammellinse concentrirtes Licht wird hierbei durch die erste convexe Fläche auf die ebene Seite des Prismas gelenkt, dort total reflektirt, und von der zweiten convexen Fläche auf das Objekt hingebrochen.

Um dem Rohr jede beliebige Lage zu geben, namentlich um das Instrument bequem zum Zeichnen der mikroskopischen Objekte benutzen zu können, läfst sich entweder das Rohr mit dem Tischchen mittelst einer Nufs am Ende der Säule des Stativs in jede Neigung bringen, oder man giebt dem Rohr eine unter einem rechten Winkel geknickte Gestalt, so dafs der Theil, welcher das Objektiv enthält, vertikal, der obere Theil mit dem Ocular horizontal steht. Alsdann mufs im Knie ein unter 45° gegen die Axe des Rohrs geneigter Spiegel, oder an dessen Stelle ein totalreflektirendes Prisma stehen, welches das vom Objektiv kommende Licht dem Oculare zuwirft.

Ein kleines Bild eines zusammengesetzten Mikroskops mit seinen Hauptheilen zeigt die Fig. 117.

Was endlich die Messung der mikroskopischen Objekte betrifft, so läfst sich hierzu bei mäfsigen Vergröfserungen ein sogenanntes Glasmikrometer anwenden, d. h. eine Glastafel, in welche sehr enge, äquidistante, feine Parallellinien eingeritzt oder eingeätzt sind. Dasselbe wird mit der gefurchten Seite dem Objektiv zugewendet, auf den

Objekttisch gelegt, und die Gröfse der auf denselben gelegten Objekte aus der Zahl der bedeckten Felder bestimmt. Fraunhofer und Plöfsl verfertigten Mikrometer dieser Art, welche 2000 Linien auf einen Zoll enthielten.

Bei starken Vergröfserungen ist indefs dies Verfahren unanwendbar, weil, wenn die Objekte richtig eingestellt sind, die Theilstriche zu entfernt liegen, um noch gesehen zu werden. Für diesen Fall legt man ein solches Glasmikrometer auf das Diaphragma vor dem Ocular, und zwar so, dafs die gefurchte Seite dem Objektiv zugekehrt ist, und bestimmt, von wieviel Theilstrichen das Objekt bedeckt wird. Um aus dieser Zahl die Gröfse des Objekts zu finden, mufs der Werth eines einzelnen Intervalles bekannt sein. Hierzu legt man ein zweites Glasmikrometer auf das Objekttischchen, und bestimmt das Verhältnifs der Intervalle beider Mikrometer. Werden z. B. a Theilstriche des unteren von b Theilstrichen des oberen gedeckt, und sind jene um $\frac{1}{100}'''$ von einander entfernt, so ist die Gröfse eines Objekts, welches von c Theilstrichen des oberen gedeckt wird, $\frac{ac}{100b}$ Linien.

Noch gröfserer Schärfe ist die Messung mit dem sogenannten Schraubenmikrometer fähig. Zu diesem Zweck befindet sich im Diaphragma ein Fadenkreuz, und die obere Tischplatte mit dem Objekt läfst sich mittelst einer Mikrometerschraube verschieben. Die ganze Zahl der Umgänge giebt wie beim Heliometer eine Scale an den Schiebern an, und die Bruchtheile derselben ein Index an dem in 100 Theile getheilten Schraubenkopf. Mittelst eines Nonius lassen sich auch Tausendstel ablesen. Bei der Messung wird der Tisch so gedreht, dafs die Axe der Mikrometerschraube einem der Kreuzfäden parallel ist, das Objekt dagegen mit dem einen Rande den senkrechten Faden berührt, und alsdann die Zahl der Schraubengänge bestimmt, welche nöthig ist, um den zweiten Rand mit diesem Faden in Berührung zu bringen. Den Werth eines Schraubenganges bestimmt man *dadurch, dafs* man die Zahl der Umdrehungen mifst,

welche erforderlich ist, um einen bestimmten Raum auf einem als Objekt gebrauchten Glasmikrometer zu durchlaufen.

Spiegelmikroskope.

Die Spiegelmikroskope unterscheiden sich von den vorbetrachteten nur dadurch, dafs das Objektiv ein Hohlspiegel ist. Sie haben den Vorzug grofser Farbenreinheit, stehen aber wegen des grofsen Lichtverlustes durch die Reflexion den vorigen Hinsichts der Lichtstärke nach. Die Einrichtung der vollkommensten derselben, der Amicischen, ist folgende:

Das Objekt befindet sich auf einem Tischchen *e* (Figur 118) unter einer Oeffnung des Rohres *d*, und die von demselben ausgehenden Strahlen werden von einem, 45° gegen die Axe geneigten Planspiegel *b* auf das Objektiv *a* geworfen, welches aus einem hohlen elliptisch gekrümmten Metallspiegel besteht, so dafs etwa bei *c* ein Bild des Objektes entsteht, welches durch das Ocular *d* betrachtet wird. Auch hierbei pflegt man mehrere verschieden vergröfsernde Ocularansätze anzuwenden.

Sonnen- und Lampenmikroskop.

Das Sonnenmikroskop, welches zwar eine sehr bedeutende Vergröfserung gestattet, und dabei das Bild selbst gröfserer Gegenstände mit einem Mal überblicken läfst, ist wegen der damit verbundenen Undeutlichkeit zu wissenschaftlichen Untersuchungen wenig geschickt.

Die Einrichtung ist im Wesentlichen folgende:

Von einem beweglichen Planspiegel *A* (Fig. 119) werden die direkten Sonnenstrahlen auf eine Sammellinse *B* geleitet, und durch das in deren Brennpunkt concentrirte Licht das Objekt *ab* sehr stark erleuchtet. Hinter dem letzteren wird eine Convex-Linse *C* von kurzer Brennweite so aufgestellt, dafs *ab* etwas aufserhalb ihrer Brennweite steht, damit sich auf der vorderen Seite ein vergrö-

fsertes verkehrtes Bild von *ab* bildet, welches sich auf einer weifsen Tafel *D* auffangen läfst, und um so gröfser, aber zugleich auch um so undeutlicher wird, je weiter *D* von *C* entfernt ist. Die Vergröfserung ist $\frac{Ca_1}{Ca}$.

Das Lampenmikroskop unterscheidet sich von dem Sonnenmikroskop hauptsächlich darin, dafs die Erleuchtung von einer Lampe ausgeht. Zu diesem Zweck wird die Erleuchtungslampe *L* in den Brennpunkt der sehr convexen Linse *B* (Fig. 120) gestellt, damit die Strahlen parallel auf den Hohlspiegel *M* geworfen, und von *M* gegen das Objekt *ab* reflektirt, dieses letztere stark erleuchten. Vom Objekt aus geht das Licht durch die stark gekrümmte Convexlinse *C* und die beiden Convexlinsen *E* und *F*, welche letzteren die Convergenz der Strahlen zu verstärken dienen. Das sehr vergröfserte verkehrte Bild wird jenseits *F* wiederum von einer entfernten Tafel *D* aufgefangen.

Dunkle und helle Kammer.

Die dunkle Kammer (*camera obscura*), von Baptista Porta erfunden, besteht aus einem Kasten, welcher an einer Seite mit einer Convexlinse versehen ist, die wie das Objektiv eines Fernrohrs ein Bild entfernter vor dem Kasten befindlicher Gegenstände liefert. Dieses Bild wird von der gegenüberstehenden Wand des Kastens aufgefangen, auf welcher es auch beobachtet wird. Vor der Linse ist zuweilen ein 45° gegen seine Axe geneigter Spiegel angebracht, also das Reflexionsbild der Gegenstände im Spiegel für das Objekt substituirt, um dem Bilde eine bequemere Lage zu geben. Es wird alsdann die Linse nach oben gerichtet, und das Bild liegt horizontal, so dafs es sich, wenn es auf Papier aufgefangen wird, leicht auf demselben nachzeichnen läfst.

Die helle Kammer (*camera clara*) unterscheidet sich von der dunklen dadurch, dafs das von der (hier stets) seitlich angebrachten Linse erzeugte Bild von einem im Kasten

befindlichen Spiegel (der 45^0 gegen die Axe der Linse geneigt ist) nach oben reflektirt wird, und dort, wo sich eine Oeffnung befindet, durch eine Convexlinse betrachtet wird.

Lichte Kammer.

Die lichte Kammer (*camera lucida*), von Wollaston erfunden, besteht dem Wesentlichen nach aus einem vierseitigen Prisma, dessen Durchschnitt die Form *abcd* (Fig. 121) hat. Dasselbe ist etwa 1 Zoll lang, ½ Zoll breit, bei *a* rechtwinklig, und übrigens so geschliffen, dafs $ab = ac = ad$ und $bc = bd$ wird. Die horizontale Fläche *ab* ist mit einer geschwärzten Platte belegt, die an der Kante bei *b* einen kleinen Ausschnitt erhält. Fallen nun von einem Objekte *m* Strahlen auf *cd*, so werden dieselben nach *bc* und von da in das bei *b* dicht am Ausschnitt befindliche Auge reflektirt. Beim Eintritt in das Auge divergiren die Strahlen so, als kämen sie von einem Punkte *n*, wo man sonach ein Bild von *m* sieht. Wenn die Pupille nicht ganz vom Prisma verdeckt ist, so sieht man zugleich direkt die bei *n* befindlichen Gegenstände, und es läfst sich, wenn dort auf einem Tische Papier liegt, das gespiegelte Bild *n* auf dem direkt gesehenen Papier nachzeichnen.

Brillen.

Die Brillen dienen bekanntlich dazu, Weitsichtigen nahe Gegenstände, Kurzsichtigen entferntere Gegenstände deutlich zu machen. Die hierzu nöthige Brennweite der Brillengläser hängt von der Weite ab, in welcher das Auge Gegenstände noch deutlich sieht. Ist z. B. l die normale Sehweite, und l_1 die der kurzsichtigen oder weitsichtigen Person, so wird die letztere von einem um l entfernten Gegenstand ein Bild in der Entfernung l_1 (mithin vollkommen deutlich) sehen, wenn sie durch eine Linse von solcher Brennweite sieht, dafs l und l_1 die beiden Vereini-

gungsweiten sind. Ist die hierzu erforderliche Brennweite f, so ist

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{l}-\frac{1}{l_1}, \quad \text{also } f=\frac{ll_1}{l_1-l}.$$

Wenn nun $l_1>l$, also das Auge weitsichtig ist, so wird f positiv, und mithin die Linse eine Sammellinse sein müssen; wenn dagegen $l_1<l$, also das Auge kurzsichtig ist, so wird f negativ, mithin die Linse eine Zerstreuungslinse sein müssen. Aus jener Gleichung bestimmt sich sogleich f, wenn die Sehweite des kranken Auges durch Messung ermittelt ist, und für l der Werth der normalen Sehweite, etwa 8 Zoll, gesetzt wird. Bei der Gröſse des Werthes von f braucht man auf die sphärische Abweichung keine Rücksicht zu nehmen, man nimmt daher die Gläser gewöhnlich gleichseitig.

Photometer.

Das Verfahren, die Lichtintensität durch sogenannte Photometer zu messen, besteht in der Regel darin, die Stärke eines zur Vergleichung dienenden Lichtes so weit zu schwächen, bis sie der Stärke des zu messenden Lichtes gleich wird, oder auch wohl dieses Licht zu schwächen, bis es jenem an Helligkeit gleicht. Das Verhältniſs der Intensität beider Lichter läſst sich alsdann aus dem Gesetz der Lichtschwächung berechnen. Die verschiedenen gebräuchlichen Photometer, welche auf dieses Verfahren gegründet sind, unterscheiden sich nur durch die Art und das Gesetz der Lichtschwächung.

Beim Rumford'schen, Ritschie'schen und Wollaston'schen Photometer wird die Schwächung durch Entfernung der Lichtquelle hervorgebracht, und beruht auf dem Gesetz, daſs die Intensität den Quadraten der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Das Rumford'sche Verfahren, dessen sich übrigens schon früher Lambert bediente, besteht darin, daſs man in *einem dunklen Zimmer* einen feststehenden Stab gleich-

zeitig dem zu messenden und dem zur Vergleichung dienenden Lichte aussetzt, die beiden Schatten desselben auf einer vertikal stehenden weifsen Tafel auffängt, und, während man dem einen Licht eine bestimmte Stellung giebt, das zweite in eine solche Entfernung von der Tafel bringt, dafs der von ihm erleuchtete Schatten mit dem vom ersten Lichte erleuchteten gleich hell ist. Das Verhältnifs der Entfernungen beider Lichter führt alsdann auf ihr Intensitätsverhältnifs. Die Strahlen müssen senkrecht auf die Fläche fallen, weil die Erleuchtungsstärke mit der Neigung der Strahlen variirt (mit dem Cosinusquadrat des Einfallswinkels abnimmt).

Das Ritschie'sche Photometer besteht aus einem inwendig geschwärzten Kasten *fg* (Fig. 122), in welchem zwei ganz gleiche, aus demselben Stücke geschnittene Spiegel *ab* und *ac* unter 45° Neigung gegen die horizontale Seite *bc* angebracht sind. Auf der Oberseite befindet sich eine Oeffnung *de*, welche mit geöltem Papier oder durchscheinendem Zeuge überspannt ist, und welche bei *a* durch einen der Spiegelkante parallelen schmalen undurchsichtigen Streifen in zwei Felder getheilt ist. Stellt man nun das zu untersuchende Licht in einer bestimmten Entfernung so auf, dafs es durch die Oeffnung *f* des Kastens Strahlen auf den Spiegel *ab* wirft, und von demselben reflektirt die Fläche *ad* erleuchtet, so läfst sich durch Versuche die Entfernung des zweiten (Vergleichungs-) Lichtes finden, von welcher aus dasselbe durch die Oeffnung *g* die Fläche *ae* eben so stark erhellt.

Der Zweck des Wollaston'schen Verfahrens war hauptsächlich das Licht der Sterne mit dem der Sonne zu vergleichen. In dieser Absicht verglich er zuerst das Sonnenlicht mit einer Kerzenflamme, und dieser letzteren bediente er sich zur Vergleichung mit dem Sternenlicht. Das erste Verhältnifs bestimmte er dadurch, dafs er das Sonnenlicht von einer kleinen Glaskugel reflektiren liefs, und diese so weit entfernte, bis das mit freiem Auge oder mit einem Fernrohr betrachtete Sonnenbildchen gleich hell erschien

mit dem von einer andern Glaskugel reflektirten Bilde der Kerzenflamme, welches er durch eine Linse von 2 Zoll Brennweite betrachtete. Ist der Halbmesser der ersten Kugel r, und ihre Entfernung vom Auge d, so läfst sich $\frac{d}{2r}$ als scheinbarer Durchmesser des Sonnenbildchens, also die Lichtmenge proportional $\left(\frac{\delta}{2r}\right)^2$ nehmen. Gleicht nun das Sonnenbild dem Bilde der in der Entfernung δ befindlichen Kerzenflamme, und der Stern dem Bilde der in dem Abstande δ_1 aufgestellten Flamme, so ist das Sternenlicht dem Quotienten $\left(\frac{d\delta}{2r\delta_1}\right)^2$ proportional. Nach seinen Versuchen ist z. B. das Licht des Sirius 20000 Millionen Mal schwächer als das der Sonne, vorausgesetzt, dafs bei der Reflexion an der Kugel etwa die Hälfte des Lichtes verloren geht.

Lampadius verglich die Lichtstärke durch die Zahl dünner Hornscheibchen, welche zur Auslöschung des Lichteindrucks erforderlich ist. Doch giebt dies Verfahren nur das allgemeine Verhalten der Intensität, da die Menge des von den Scheiben durchgelassenen Lichtes nicht der Scheibenzahl umgekehrt proportional ist.

Herschel schwächte bei der Vergleichung des Lichtes der Sterne das des helleren Sterns durch Verkleinerung der Oeffnung des Teleskops, durch welches er nach demselben sah, während er durch ein zweites, ganz gleiche Helligkeit gewährendes Fernrohr den anderen Stern betrachtete.

Talbot brachte eine Schwächung durch Unterbrechung des Lichteindrucks in Anwendung. Das Gesetz derselben spricht sich in folgendem Versuche aus: Versetzt man eine weifse Scheibe, aus welcher ein Sektor herausgeschnitten ist, gegen eine schwarze Fläche in eine so schnelle rotirende Bewegung, dafs sie gleichmäfsig grau erscheint, so verhält sich die Helligkeit der grauen Farbe zu dem Weifs *der Scheibe, wie die* Winkelbreite des weifsen Theils zum

Umfang der Scheibe. Betrachtet man durch den schnittenen Theil eine Lichtflamme, so verhält sich d ligkeit derselben während der Rotation zu ihrer natü Helle, wie die Breite des ausgeschnittenen Sektor Kreisumfang. Die Richtigkeit dieses Gesetzes der schwächung wurde durch Plateau's Versuche b (Pogg. Ann. XXXV, p. 457).

Zu den Messungen schwärzte Talbot auf ein fsen Scheibe einen von einer archimedischen Spirale gegrenzten Raum (Fig. 123), so dafs bei der Rotati Helligkeit der Scheibe nach dem Rande hin der Entf von dem Mittelpunkt proportional zunimmt. Diejeni fernung, in welcher die Helligkeit der Scheibe der z senden Helligkeit eines Körpers gleich ist, verhält si dann zum Radius, wie die Lichtstärke des Körpers des Weifs auf der Scheibe. Statt dessen läfst sic der dunkle Raum ausschneiden und die Rotation vor zur Vergleichung dienenden Licht ausführen.

Ein anderes Verfahren Talbot's ist, zwei Scl aus denen eine gleiche Zahl gleich grofser Sektore ausgeschnitten sind, auf einander zu legen und sie c trisch so lange zu verschieben, bis die Sektorbreit Gröfse hat, welche bei der Rotation Licht von g Helligkeit mit dem zu untersuchenden Körper giebt. ner empfiehlt derselbe als ein drittes Mittel, einen S so rotiren zu lassen, dafs sich in demselben das Bild leuchtenden Objekts bei jedem Umlauf nur einma Auge zeigt. Der dadurch entstehende leuchtende Kr alsdann eine Helligkeit, welche sich zu der des O verhält, wie die Winkelbreite des letzteren zum U des Lichtkreises.

Arago's noch nicht hinlänglich bekanntes Ver beruht auf der Lichtschwächung eines polarisirten

---

*) Die Gleichung derselhen ist $\omega = 2\pi\varrho$, wo ϱ den Radius und ω den Polarwinkel bedeutet, wenn der Radius der Scheibe z heit genommen wird.

bündels, welche dadurch hervorgerufen wird, dafs die Neigung seiner Polarisations-Ebene gegen den Hauptschnitt eines doppelbrechenden Krystalls geändert wird.

Ein sehr empfindliches Photometer ist endlich das Leslie'sche, mit welchem das Licht nach seiner erwärmenden Wirkung gemessen wird. Es ist dasselbe ein Differenzialthermometer, deren Kugeln Ritschie zur Vervollkommnung des Instruments durch kurze, sehr weite Cylinder von Zinnblech ersetzt hat, welche auf der einen Seite das Licht durch ein sehr dünnes, gleichförmiges, durchsichtiges Glas einlassen. In der Mitte jedes Cylinders befindet sich eine Kreisscheibe von geschwärztem Papier, welche durch Lichtabsorption Wärme entwickelt und die Luft ausdehnt. Der eine Cylinder wird dem Vergleichungslichte, der andere dem zu prüfenden ausgesetzt, und das eine Licht so lange verschoben, bis die gefärbte Flüssigkeit in dem Thermometer den Stand hat, welchen sie vor der Anwesenheit der Lichter einnahm. Die Entfernung der Lichter bestimmt alsdann das Verhältnifs der Lichtstärke.

Wie sich die im zweiten Abschnitt aufgestellten Gesetze benutzen lassen, das Intensitätsverhältnifs der von durchsichtigen krystallinischen Medien reflektirten und gebrochenen Strahlen durch Beobachtung mit grofser Genauigkeit zu bestimmen, hat Neumann (Pogg. Ann. XL, p. 497) angegeben.

Polarisationsapparate.

Die Einrichtung des Biot'schen Polarisationsapparates ist schon Bd. I, p. 179 angegeben worden. Die Krystalle, deren Interferenzfiguren man im Spiegel *B* (Bd. I, Fig. 29) erzeugen will, werden am oberen Ende des Rohrs eingesetzt.

Zur Bestimmung des Polarisationsazimuthes (der Neigung der Polarisations-Ebene gegen die Einfalls-Ebene) wird am Ringe *g* eine Kreistheilung angebracht.

Behufs weiterer Messungen ersetzte Biot den Spiegel *B* durch eine mit einer kreisförmigen Oeffnung versehene

bewegliche Platte *AB* (Fig. 124), deren Neigung gegen die Axe des Rohrs durch einen mit demselben verbundenen getheilten Kreis *C* gemessen werden kann. Der zu untersuchende Krystall wird mit Wachs auf der Oeffnung einer kleinen Scheibe *c* befestigt, die in der genannten Kreisöffnung sich um *mn* als Axe drehen läſst, um mittelst solcher Drehung die Stellung der Eintrittsfläche berichtigen zu können.

Die Scheibe *AB* besteht aus zwei Theilen, von denen der innere *b* von Ringform ist, die Scheibe *c* trägt, und mit dem äuſseren so verbunden ist, daſs er sich in demselben in seiner Ebene drehen läſst. Der Rand von *b* enthält eine Kreistheilung *aa* zur Bestimmung der Einfalls-Ebene gegen eine auf der Krystallfläche senkrechte Ebene (also bei einaxigen Krystallen zur Bestimmung der Neigung der Einfalls-Ebene gegen den Hauptschnitt). Die Kreistheilung *C* giebt dazu den Einfallswinkel, und die Theilung auf *g* das Polarisationsazimuth des Einfallslichtes. Vor dem Apparat kommt endlich auf einem Stativ ein Turmalin oder ein Nicol zur Messung des Polarisationsazimuths des austretenden Lichtes zu stehen.

Der Turmalinapparat (Fig. 125) besteht aus zwei in einander schiebbaren kupfernen Cylindern *bcde* und *fg*, welche in den Oeffnungen *a* und *h* (der Axe parallel geschnittene) Turmaline enthalten, von denen der bei *h* befindliche das einfallende Licht polarisirt, der bei *a* befindliche das austretende Licht analysirt und dem Auge zusendet. Der zu untersuchende Krystall wird vor der Oeffnung *i* eines dritten kurzen Cylinders *mn*, welcher sich in den Hauptcylinder *bcde* hineinschieben läſst, befestigt. Eine Bewegung des Krystalls in seiner Ebene wird durch ein Häkchen *p* vermittelt, für welches eine bogenförmige Spalte am Umfang des äuſseren Cylinders ausgespart ist, und welches sich in *mn* einschrauben läſst. Bei *k* befindet sich eine Linse, deren Brennpunkt bei *i* liegt, und welche zur Vergröſserung des Gesichtsfeldes dient. Das letztere wird nämlich von den äuſsersten Strahlen des in *i* convergiren-

den Lichtkegels begrenzt. Man gewinnt dabei überdies den Vortheil, die Strahlen auf die für die Beobachtung geeignetste Stelle des Krystalls leiten zu können.

Im Dove'schen Polarisationsapparat werden die beiden zur Polarisation und Analyse dienenden Nicols, so wie die im polarisirten Lichte zu untersuchenden Körper und die zur Leitung der Lichtstrahlen dienenden Linsen von kleinen Ständern getragen, welche sich auf eine dreikantige 2 Fufs lange Stange *AB* (Fig. 126) schieben und an derselben mittelst Klemmschrauben befestigen lassen. Die Stange ist auf einem Stativ durch ein Charnier *b* in einer Vertikal-Ebene beweglich, und seine Höhe läfst sich durch einen Auszug verändern, welcher durch die Klemmschraube *a* festgehalten wird. Von den Ständern, welche auf den fünf dreikantigen Hülsen s_1, s_2, s_3, s_5, s_4 angebracht sind, lassen sich die vier ersten zur Seite umlegen, für den Fall, dafs man ihrer nicht bedarf.

Die Ständer n_1 und n_2, welche auf s_2 und s_5 stehen, endigen sich in einer getheilten Messingscheibe (deren Nullpunkt bei vertikaler Stellung im Horizontaldurchmesser liegt), und tragen in ihrem Centrum die Nicol'schen Prismen. Diese sind in der Scheibe drehbar, und ihre Fassung ist mit einem auf der Scheibe das Polarisationsazimuth angebenden Zeiger versehen. s_2 trägt das erste, s_5 das zweite Nicol. Zur circularen und elliptischen Polarisation und Analyse stehen mit den Ständern n_1 und n_2 kleinere Ständer *c* und *d* in Verbindung, die an ihren Enden Glimmerblättchen von der zur Circular-Polarisation nöthigen Dicke tragen, und sich gleichfalls für sich umlegen lassen, um die lineare Polarisation und Analyse in jedem Augenblick wieder herzustellen. Die Glimmerblättchen sind mit ihren Fassungen in ihren Ebenen beweglich, damit man ihren Axen jede Neigung gegen die Polarisations-Ebene der Nicols geben kann.

Die Hülse s_4 ist für den Ständer bestimmt, welcher die zu untersuchenden Krystalle trägt, und welcher in Fig. 127 besonders abgebildet ist. Der Stift *a* wird in s_4 eingesteckt,

der S [illegible] kann in der Hülse *de*, welche mit *a* fest verbunde[illegible] auf und ab geschoben und um seine Axe gedreht w[illegible]n; der Stift *gh* kann eine gleiche Bewegung in der mit *bc* verbundenen Hülse *fl* annehmen; bei *h* befindet sich a[illegible] *gh* ein offener Ring *ik*, welcher den in einem Holzring gefafsten und in seiner Ebene drehbaren Krystall aufnimm[illegible] Man sieht, dafs durch diese Einrichtung der Krystall [illegible]e Höhe und in dieser jede mögliche Lage erhalten k[illegible]. Eine ebensolche Vorrichtung läfst sich auf s_3 bei *e* a[illegible]ecke[illegible] Gläser, Gypsblättchen und Ameth[illegible]

[illegible] t [illegible]htes und zur Vergröfserung des [illegible] [illegible]em von Linsen. Die erste derselbe [illegible] sich [illegible]n Ständer s_1 befindet, und 12 Zoll [illegible] u [illegible] Oeffnung hat, wird soweit vorge[illegible] [illegible] den Strahlen sich im ersten Nicol ve[illegible] [illegible]ng des letzteren, und zwar $\frac{5}{4}$ Zoll hinter [illegible]läche ist eine zweite Convexlinse von 2 Zoll Brennweite angeschraubt, welche das Licht divergirend auf die 3 Zoll entfernte Linse *f* von 1½ Zoll Brennweite sendet. Die Strahlen werden alsdann, nachdem sie durch den Krystall des Ständers s_4 gegangen sind, von einer Hohllinse von 4—5 Zoll Brennweite aufgefangen, welche an der vorderen Fassung des zweiten Nicols eingeschraubt ist.

Um den Intensitätsgang der Doppelbilder eines Krystalls zu verfolgen, läfst sich vor der Linse *f* eine Blendung anbringen, deren kreisförmige kleine Oeffnung als Objekt dient. Es wird hierzu das erste Nicol zurückgebogen und in s_4 ein doppelbrechendes Prisma eingeschraubt. Vertauscht man das zweite Nicol gleichfalls mit einem solchen Prisma, so läfst sich die Bewegung und der Intensitätsgang der 4 Bilder verfolgen.

Um die Figur gröfserer gekühlter Gläser im circu[illegible] Lichte zu beobachten, wird auf die Fassung der Lin[illegible] ein grofses Glimmerblatt aufgeschraubt, die Linse a[illegible] fortgenommen, und der Ständer mit den Gläsern in passende Entfernung gebracht.

Die Lichtstärke, welche dieses Instrument gewährt, ist so grofs, dafs eine 12 Fufs entfernte mit Kochsalz gelb gefärbte Weingeistflamme die einfarbigen Ringsysteme in vollster Deutlichkeit zeigt.

Auch lassen sich in diesem Instrument die Nicols durch Polarisationsspiegel ersetzen, von denen der eine sich auf der Linse bei s_1 befestigen läfst, der andere in den Ständer s_6 angeschraubt wird.

Das Nicol'sche Prisma.

Die Construction des Nicol'schen Prisma's (Fig. 128) ist folgende:

Es sind *aegd*, *ebcg*, *fbch*, *fhda* vier Seitenflächen eines Kalkspathrhomboëders, *ad* und *bc* die stumpfen Kanten der durch sie gebildeten rhombischen Säule, so dafs die Ebene *abcd* die optische Axe enthält. Die Endfläche *aebf* ist ein senkrecht gegen die Ebene *abcd* geführter, mit *ad* einen Winkel von 68° bildender Schnitt, welcher demnach mit der natürlichen Endfläche des Rhomboëders (welche gegen *ad* 71° 52′ geneigt ist) einen Winkel von etwa 2° 52′ bildet. Ferner ist eine Schnittfläche, in der Figur durch *bd* bezeichnet, senkrecht gegen die Diagonale *ab* gelegt, und durch *d* der Schnitt *dhcg* parallel *afbe* geführt. Die beiden Krystallstücke *abd* und *bdc* werden nach der Trennung wieder mit Canadabalsam an einander gekittet, und alsdann in Kork gefafst.

Fällt nun ein Lichtstrahl senkrecht auf *afbe* (so dafs er mit *ad* einen Winkel von 22° bildet), so werden die Normalen des gewöhnlich und des ungewöhnlich gebrochenen Wellensystems parallel *db*; es erreicht daher keiner der Strahlen, welche schwächer als 22° gegen die Axe des Prisma's geneigt sind, die Austrittsfläche *dc*. Wird aber der Winkel zwischen dem Einfallsstrahl und der Kante *ad*, welcher mit *i* bezeichnet sein mag, kleiner als 22°, so fallen beide gebrochene Strahlen getrennt auf *db*, und würden (falls sie nicht nach der Brechung auf die Seitenflächen

des unteren Stückes treffen) unter demselben Win
dc austreten, wenn die Balsamschicht den Strahler
Durchgang gestattete. Es ist aber das Brechungsve
des Balsams geringer als das der gewöhnlichen Stra
Kalkspath, und es wird daher bei schiefem Einfall
brechende Fläche *bd* eine Totalreflexion eintreten,
die gewöhnlichen Strahlen am Austritt aus *dc* hind

Die in der Ebene *abcd* einfallenden Strahlen
wegen $abd = 90^0$ nach der Brechung mit *bd* eine
kel, welcher dem Brechungswinkel an *ab* gleich i
welchen wir mit α' bezeichnen wollen. Nimmt n
mit Brewster 1,549 als Brechungsverhältniſs des l
und das Brechungsverhältniſs des gewöhnlichen Str
nämlich 1,658 als zu den mittleren Strahlen gehörig
ist der Werth von α', bei welchem die Totalreflexi
hört, 20° 56', und der zugehörige Einfallswinkel α
36° 21'. Die Einfallsstrahlen bilden daher, da *adb*
ist, mit der Axe des Prisma's einen Winkel von 1

Nimmt man demnach die Winkel *i* positiv, w
von links nach rechts einfallen, und negativ, wenn
rechts nach links einfallen, so ist nur von $i = -$
$i = 14^0\ 21'$ ein Austritt ungewöhnlicher Strahlen n
Da aber für verschiedene Farbenstrahlen der zweite
winkel variirt, so werden bei $i = 14^0\ 21'$ schon ein
wöhnliche Strahlen durchgelassen, und es erscheint
ser Richtung beim Durchsehen durch den Krystall e
benstreifen, der auf der rechten Seite rothgelb, auf d
ken Seite gelblich ist. Spasky fand durch Beoba
den Winkel, unter welchem dieser Farbenstreif ers
zu 18° bis 20°, wobei jedoch zu bemerken ist, daſs
von ihm angewendeten Prismen die Winkel *bad* u
nicht genau die obigen Maaſse hatten. Der letzte g
liche Strahl, welcher durch das Prisma dringen kan
welcher zu $\alpha = 90^0$ gehört, tritt noch aus *dc* aus u
det mit der Diagonale *ac*, welche gegen *ab* 49° 5
neigt ist, einen Winkel von 2° 56'.

Was die ungewöhnlichen Strahlen betrifft, so ist

Brechungsverhältnifs, wenn sie senkrecht gegen die optische Axe (welche in dem Prisma mit *ab* einen Winkel von $47\frac{1}{2}^0$ bildet) gerichtet sind, 1,486, und für die äufserste Richtung *ac*, die gegen jene Axe $82\frac{1}{2}^0$ geneigt ist, 1,489 *). Hieraus findet sich, dafs für den in die Richtung *ac* gebrochenen Strahl $\alpha = 73^0\ 12$, also $i = 51^0\ 12'$ ist. Folglich treten zwischen $i = 51^0\ 12'$ und $i = 68^0$ nur gewöhnliche Strahlen ins Auge. Aber die ungewöhnlichen Strahlen werden schon viel früher unmerklich, da für $i = 51^0\ 12'$ nur ein Strahl austritt, indem alle mit *ac* parallelen gebrochenen Strahlen bis auf *ac* selbst auf die Wände des Prisma's fallen, während von den gewöhnlichen Strahlen noch ziemlich die ganze Pupille erfüllt wird. Man überzeugt sich von diesem Faktum leicht, wenn man ein sehr schmales Objekt durch das Prisma betrachtet, und das letztere allmälig neigt. Parallel der Axe sieht man nur das ungewöhnliche Bild, jenseits der Richtung des rothen Streifens tritt das gewöhnliche Bild hinzu, und bei gröfserer Neigung wird dieses stärker, und jenes wird schwächer und verschwindet bald gänzlich.

Die andere Grenze des Gesichtsfeldes, welche dem gröfsesten negativen Werth von *i* entspricht, erscheint blau gesäumt, und zwar geschieht dies nach Spasky's Messung unter einem Winkel, der mit dem rothen Streifen etwa 28^0 bildet. Dies würde für die obige Annahme zu $\alpha = 8^0$ gehören, in welchem Fall die Normale des ungewöhnlich gebrochenen Wellensystems mit der optischen Axe einen Winkel von ungefähr $47\frac{1}{2}^0$ macht, und demzufolge 1,558 zum Brechungsverhältnifs hat. Dieser Werth ist gleichfalls geringer als das Brechungsverhältnifs des Balsams, und liefert als Grenze der Totalreflexion $83^0\ 10'$, während der Einfallswinkel auf *bd* für $\alpha = 8^0$, $84^0\ 53'$ ist. In der Gegend von $\alpha = 8^0$ (oder $i = -14^0$) werden also

*) Diese Zahl findet man aus dem Ausdruck $e^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2) \cos^2 \delta$, in welchem *e* die Geschwindigkeit des ungewöhnlichen ebenen Wellensystems, δ die Neigung seiner Normale gegen die optische Axe, und π und μ die Elasticitätsconstanten bedeuten. Siehe Bd. I p. 15.

auch die ungewöhnlichen Strahlen total reflektirt, und der Grund des blauen Streifens ist die für die verschiedenen Farben ungleich anfangende totale Reflexion, und nicht, wie Spasky meint, das unmittelbare Treffen der gebrochenen rothen Strahlen auf die Wände *ag* und *ah*, während die blauen noch die Schicht *bd* durchdrängen. Dafs ein Theil der gebrochenen Strahlen durch *bd* geht, und der andere nicht (was überdies auch nur geschehen könnte, wenn *abd* nicht genau 90° ist) ist sogar unmöglich, da der Streifen alsdann roth sein [illegible]e, und überdies einen Werth von *i* von mindestens —2[illegible] [illegible]rforderte.

Dem Vorigen zufolge hat man also zu beiden Seiten der Axe des Prisma's ein fast gleiches Feld (nämlich ungefähr von $i = -13°$ bis $i = +14°$), welches nur von ungewöhnlichen Strahlen erhellt wird, und diese Eigenschaft ist es, welche das Instrument zu den Polarisationsversuchen geschickt macht.

Die Rechnung liefert für die Gröfse des (auf einmal zu übersehenden) Gesichtsfeldes, wie ich es auch als mit der Erfahrung übereinstimmend fand, etwa 31 Grad, vorausgesetzt, dafs die Fassung nicht hindert, das Auge dicht an das Prisma zu bringen. Jedoch ist dieses Feld nicht gleichmäfsig erhellt, da von den schief gegen die Axe des Instruments einfallenden Strahlen nur ein Theil der Pupille erfüllt wird. Um die Seitentheile des brauchbaren (zwischen den beiden Streifen enthaltenen) Feldes noch hinreichend deutlich zu erhalten, darf man daher die Breite und mithin auch die Länge des Prisma's nicht zu klein annehmen.

Die Gröfse des Feldes der isolirten ungewöhnlichen Strahlen hängt von dem Winkel ab, den der erste der gewöhnlich gebrochenen Strahlen, welche der Totalreflexion entgehen, mit dem ersten der nicht mehr total reflektirten ungewöhnlichen einschliefst. (Für die obige Construc[tion] des Nicols beträgt derselbe etwa 14°). Nähme man d[aher] bei der Construction, *bd* in seiner Lage lassend, den W[in]kel *dab* gröfser, so würden wegen des weniger sch[iefen]

Einfalls der Strahlen beide Grenzen des Feldes (der rothe und blaue Streifen) nach rechts hinrücken, und das Feld selbst um etwas kleiner werden. Nähme man *bad* kleiner, so würden die Grenzen nach links rücken, und das Feld etwas gröſser werden. Lieſse man dagegen den Schnitt *afbe* ungeändert und machte den Winkel *abd* kleiner, um z. B. die Länge des Prisma's zu verkürzen, so würden die Grenzen nach rechts hinrücken, und das Feld würde etwas enger werden.

Behielte man endlich die gewöhnliche Construction bei, und vertauschte den Canadabalsam mit einer anderen Substanz, deren Brechungsverhältniſs dem der ungewöhnlichen Strahlen des Kalkspaths näher läge (wie z. B. mit Copaivabalsam, dessen Brechungsverhältniſs 1,507 ist), so würden die Grenzen nach links hinrücken und das Feld würde je nach den Umständen kleiner oder gröſser.

Wollte man nun durch eine solche neue Substanz und durch Vergröſserung des Winkels *adb* eine Verkürzung des Prisma's bezwecken, um das wahre (mit einem Male übersehbare) Gesichtsfeld zu vergröſsern, so muſs man darauf Rücksicht nehmen, daſs die (zu den Streifen gehörigen) positiven und negativen Grenzwerthe von *i* nahe einander gleich und nicht kleiner werden, als die Hälfte des wahren Gesichtsfeldes.

Nimmt man als kittende Substanz Copaivabalsam, und behält die gewöhnliche Construction des Prisma's bei, so werden die Grenzwerthe $i = -5^0$ und $i = +17^0$. Man müſste also, um dem brauchbaren Theil des Gesichtsfeldes die beste Lage zu geben, den Schnitt *bd* mehr gegen die optische Axe neigen, wodurch das Prisma kürzer wird.

Wird durch eine vorher angenommene Verkürzung das brauchbare Feld zu weit nach rechts gerückt, so läſst sich durch Vergröſserung des Winkels *abd* die richtige Stellung der Grenzstreifen wieder herstellen. Da jedoch die Distanz der Streifen, welche beim Canadabalsam 27 bis 28^0 betrug, hier nur 22^0 beträgt, so wird zwar das Prisma verkürzt, das brauchbare Gesichtsfeld aber verkleinert.

Heliostat.

Zu den optischen Versuchen und namentlich zu den Messungen, zu welchen das durch eine kleine Oeffnung in ein dunkles Zimmer dringende Sonnenlicht benutzt wird, ist es nöthig, den Sonnenstrahlen eine bestimmte und unveränderliche Richtung zu geben. Die Vorrichtungen, mittelst deren dies durch Spiegelung erreicht wird, nennt man Heliostaten. Die reflektirenden Spiegel müssen zu diesem Zweck beweglich sein, um ihre Lage dem stetig sich ändernden Sonnenstande anzupassen. Die nöthige Bewegung wird den Spiegeln bald aus freier Hand, bald durch ein Uhrwerk mitgetheilt.

Eine Vorrichtung der ersten Art ist folgende: An dem Laden, in welchem die Oeffnung befindlich ist, wird eine starke viereckige Messingplatte angeschraubt, in deren Mitte eine kreisförmige Scheibe von etwa 3″ Durchmesser so ausgeschnitten ist, dafs sie sich leicht in dem übrigen Theile der Platte drehen läfst. Eine solche Drehung wird durch eine Schraube bewirkt, welche in die Randzähne der Scheibe eingreift. An der Scheibe ist ein Planspiegel mit einem Charnier so befestigt, dafs sich seine Neigung durch eine zweite in ein gezahntes Rad eingreifende Schraube nach Willkühr ändern läfst. Durch die erste Schraube wird die Scheibe mit dem Spiegel so gestellt, dafs die Mitte des letzteren, die Sonne und die Oeffnung der Scheibe, welche zum Einlassen der Lichtstrahlen bestimmt ist, in eine Ebene fallen; und durch die zweite Schraube giebt man dem Spiegel diejenige Neigung, bei welcher das reflektirte Licht die Scheibenöffnung trifft. Das Unbequeme hierbei ist die stete Aenderung, welche man mittelst der Schrauben vorzunehmen hat.

Die mit einem Uhrwerke versehenen Heliostate sind entweder mit einem, oder mit zwei Spiegeln versehen. Die letzteren von Fahrenheit zuerst angegebenen sind die einfachsten, und haben nur die Schwächung des Lichtes durch die zweimalige Reflexion gegen sich. Der eine Spie-

gel wird durch ein Uhrwerk so bewegt, dafs die Richtung der reflektirten Sonnenstrahlen während der täglichen Bewegung der Sonne der Weltaxe parallel bleibt. Zu diesem Zweck befestigt man den Spiegel an einer Axe so, dafs er mit derselben einen Winkel von $45^0 + \frac{1}{2}d$ bildet (unter d die Deklination der Sonne für den Mittag des Beobachtungstages gedacht), stellt die Axe der Weltaxe parallel, und setzt sie mit einem Uhrwerk so in Verbindung, dafs sie in 24 Stunden sich einmal um sich selbst dreht.

Ist nämlich (Fig. 129) AB der Spiegel, CP die Richtung der Weltaxe, und S die Sonne, so ist PCS das Complement der im Laufe des Tages sich wenig ändernden Deklination der Sonne $(90 - d)$. Damit nun der Strahl SC nach CP reflektirt werde, mufs das Einfallsloth CD sich in der Ebene PCS befinden und mit CP den Winkel $45 - \frac{1}{2}d$ bilden, also $PCA = 45 + \frac{1}{2}d$ sein. Da nun die Sonne während des Verlaufs von 24 Stunden einen Kreis beschreibt, welcher mit CP fast constant den Winkel $PCS = 90 - d$ bildet, so behält der reflektirte Strahl die Richtung CP, wenn sich der Spiegel AB in 24 Stunden so um CP dreht, dafs ACP constant gleich $45 + \frac{1}{2}d$ bleibt. — Dem festen Strahl CP wird nun ein zweiter Spiegel so entgegengestellt, dafs er die Strahlen auf die Oeffnung wirft, welche zum Einlassen des Lichtes in das dunkle Zimmer bestimmt ist.

Die Einrichtung eines Heliostaten mit einem Spiegel wurde zuerst von s'Gravesande im Anfange des vorigen Jahrhunderts angegeben, und eine etwas abweichende Einrichtung in diesem Jahrhundert von Gambey.

Die letztere mag, da sie vor jener mehrere Vorzüge besitzt, hier etwas näher erörtert werden.

Ist mn (Fig. 130) der Spiegel, CB die Richtung eines in C reflektirten Sonnenstrahls SC, CA ein Arm in der Richtung BC, und As ein mit SC paralleler Arm, welcher in einer Hülse bei s eine Stange ns trägt, die an dem Spiegel mn so befestigt ist, dafs sie in der Spiegel-Ebene

liegt und nach *C* gerichtet ist: so ist $\angle CsA = SCn = BCm = nCA$, also $As = CA$, und wenn sich der Arm *As* so bewegt, dafs er der Richtung der Sonnenstrahlen während des Tageslaufes parallel bleibt, und wenn gleichzeitig *AC* eine feste Lage hat, und der Spiegel senkrecht auf der Ebene *CAs* verharrt, so bleibt die Richtung *CB* des reflektirten Strahles ungeändert. Damit nun die Richtung *As* der Richtung der Sonnenstrahlen parallel bleibe, mufs sie um eine der Weltaxe parallele Axe *AP* in 24 Stunden so herum bewegt werden, dafs $\angle sAp$ unverändert der Poldistanz der Sonne (dem Complement ihrer Deklination), oder der Winkel *sAP* der um 90° vermehrten Deklination gleich ist. Damit die Spiegel-Ebene senkrecht auf *CAs* bleibt, wird *mn* in einer Gabel, in welcher sich die Stange *AC* endigt, zwischen zwei Stiftchen, die senkrecht gegen die Ebene *CAs* gerichtet sind, aufgehängt.

Damit endlich der Strahl *CB* auf die Oeffnung fällt, durch welche das Licht geleitet werden soll, mufs der Arm *AC* auf dieselbe gerichtet werden können, ohne dafs *AP* und *As* ihre Richtung ändern.

Die nähere Einrichtung, um den drei Linien *AP*, *As*, *AC* die angezeigte Richtung zu geben, ist folgende:

Einstellung der Axe *AP*. Das Stativ *T* (Fig. 131) endigt in einem Bügel, welcher die horizontale um sich selbst drehbare Axe *ab* trägt. An *ab* ist bei *a* ein vertikaler getheilter Quadrant *cd* befestigt, so dafs auf seine Theilung ein fester Nonius *e* einschlägt, dessen Nullpunkt vertikal unter dem Centrum *a* liegt. Die Axe *ab* trägt ferner in ihrer Mitte, parallel dem Quadranten *cd*, die in der vorigen Figur mit *AP* bezeichnete Axe *AP*, so dafs dieselbe mittelst des Kreises *cd* auf die Polhöhe des Beobachtungsortes eingestellt werden kann. Zur Befestigung von *AP* dient eine Klemmschraube *f*, welche *cd* an *e* fest andrückt.

Damit nun *AP* der Weltaxe parallel wird, mufs die Ebene *cd* noch in den Meridian gestellt werden, wozu ein auf *a* bewegliches mit *cd* paralles Diopterlineal $\delta\delta$ dient, dessen Dioptern auf ein entferntes im Meridian liegendes Objekt gerichtet werden.

Um *AP* ist concentrisch eine hohle Röhre beweglich, welche den auf *AP* senkrechten, unten gezähnten und am Rande mit einer Theilung in 24 Stunden und Zehntel derselben versehenen Vollkreis *gh* trägt. Durch ein in dessen Zähne eingreifendes Triebrad wird mittelst eines Uhrwerks der Kreis in 24 Stunden einmal herum gedreht.

Um *T* vertikal zu stellen, wird *cd* aufs einen Nullpunkt gestellt, so dafs $AP \perp T$ wird, und durch eine auf *gh* angebrachte Libelle mittelst der an den Füfsen des Stativs befindlichen Stellschrauben *gh* in eine horizontale Lage gebracht.

Einstellung des Armes *As* der Figur 130. Der Arm *As* besteht aus einem geraden Stück *lp* (Fig. 131) und einem halbkreisförmigen *kli*, dessen Enden *k* und *i* mittelst kleiner Stiftchen zwischen zwei Stützen *gi* und *hk* aufgehängt sind, die auf dem Rande des Kreises *gh* diametral einander gegenüberstehen. Diese Stützpunkte *i* und *k* liegen in einer dem Kreise *gh* parallelen Linie, und der Drehpunkt *A*, auf den *pl* gerichtet ist, entspricht dem ebenso bezeichneten Punkte in Fig. 130, und befindet sich in der Richtung der Axe *AP*. An *pl* befindet sich senkrecht gegen die Ebene *kli* ein getheilter Kreisbogen *qr*, der, mittelst einer Klemmschraube *x* festgeschraubt, die Lage des Armes *pl* fixirt, und dazu dient, diesen Arm so zu stellen, dafs er mit der Aequator-Ebene *gh* einen Winkel bildet, welcher der Deklination der Sonne am Beobachtungstage gleich ist. Die Theilung des Kreises *gh* ist so gestellt, dafs, wenn die Stundenzahlen desselben mit den Stunden der Uhr zusammenfallen, die Sonne in der Ebene *Aqr*, und mithin in der Verlängerung von *lp* liegt, und in dieser Verlängerung bleibt, wenn der Kreis *gh* durch die Uhr in Bewegung gesetzt wird.

Einstellung des Armes *AC* der Figur 130. Dieser Arm mufs, nachdem *AP* und *As* die vorbeschriebene Lage erhalten haben, so gerichtet werden können, dafs er auf die Oeffnung hinzeigt, welche das vom Spiegel reflektirte Licht aufnehmen soll. Zu diesem Zweck ruht

der Arm AC (Fig. 130 u. 131) mit seinem Ende A auf zwei Zapfen t und u dergestalt, dafs die Gerade tu den Drehpunkt A enthält, und eine Bewegung des Armes AC in einer auf tu senkrechten Ebene zuläfst. Die Zapfen sind in einen Bügel uvt eingelassen, welcher die Endigung der Axe AP bildet. Um den Arm in der genannten Ebene in jeder beliebigen Neigung festzuhalten, hat der Fufs A einen Fortsatz, welcher durch die Schraube z festgeklemmt werden kann.

Eine zweite Bewegung des Arms AC, welche seine Richtbarkeit auf jeden beliebigen Punkt vollendet, ist eine rotirende Bewegung des Bügels $tvwu$ um die Axe AP. Damit diese rotirende Bewegung nicht zugleich eine Bewegung des Kreises gh zur Folge habe, ist die Axe AP, welche mit ab (Fig. 131) fest verbunden ist, von einer hohlen Röhre umschlossen, welche sich in dem Bügel $tvwu$ endigt, und erst diese Röhre wird von derjenigen umschlossen, welche den Kreis gh trägt. Beide Röhren endigen sich unten (bei P) in Fortsätzen, deren jeder für sich mittelst Klemmschrauben fixirt werden kann. Der Fortsatz der inneren Röhre, welche den Arm AC bewegt, bildet eine Scheibe $\alpha\alpha$, deren Klemmschraube bei y zu sehen ist.

Damit endlich auf der entgegengesetzten Seite die Bewegung von AC unabhängig von der Bewegung von As wird, geht der Spiegelstiel ns (Fig. 132) durch eine Hülse s, in welcher er sich leicht auf- und abschiebt, und welche so mit lp verbunden ist, dafs sie (während lp eine feste Lage hat) in zwei auf einander senkrechten Richtungen beweglich ist, nämlich um die Axe $\gamma\gamma$ und die darauf senkrechte ss.

Zweite Abtheilung.

Theorie der Fernröhre und Mikroskope.

Doppel-Objektive.

Die Krümmungen, welche man den beiden Linsen eines Doppel-Objektivs geben mufs, damit die sphärische und chromatische Abweichung möglichst gehoben werde, läfst sich mittelst der im 5ten Abschnitt entwickelten Formeln berechnen.

Sind die Brennweiten grofs genug im Vergleich mit den Oeffnungen der Linsen und ihren Dicken, so lassen sich die Seite 175 und 183 gegebenen Formeln benutzen.

Zieht man zu diesem Ende aus den Gleichungen

$$F_1 = (n'-1)(R'-R'') \text{ und } F_3 = (n''-1)(R'''-R'''')$$

die Werthe von R'' und R'''', nämlich

$$1)\quad R'' = R' - \frac{F_1}{n'-1}, \qquad R'''' = R''' - \frac{F_3}{n''-1},$$

und substituirt dieselben in die Werthe von β und γ (p. 172), so erhält man, β, γ, n durch β', γ', n' ersetzend, für β' und γ'

$$\beta' = (2+n')R'^2 - (2n'+1)\frac{n'}{n'-1}F_1 R' + n'\left(\frac{n'}{n'-1}\right)^2 F_1^2$$

$$\gamma' = (4+4n')R' - (3n'+1)\frac{n'}{n'-1}F_1,$$

und hieraus, wenn man β', γ', n', R', F_1 mit β'', γ'', n'', R''', F_3 vertauscht, die Werthe für β'' und γ''.

Diese Ausdrücke geben in Verbindung mit (Abschn. V, 42) als Bedingung des Aplanatismus, wegen $e'' = F_1 + e'$,

$$\Big\{\left(\frac{2}{n'}+1\right)F_1 R'^2 + \left(\frac{2}{n''}+1\right)F_3 R'''^2 - \frac{2n'+1}{n'-1}F_1^2 R'$$
$$- \frac{2n''+1}{n''-1}F_3^2 R''' - \left(4+\frac{4}{n''}\right)F_1 F_3 R''' + \left(\frac{n'}{n'-1}\right)^2 F_1^3$$
$$+ \left(\frac{n''}{n''-1}\right)^3 F_3^3 + \left(\frac{3n''+1}{n''-1}\right)F_1 F_3^2 + \left(\frac{2}{n''}+3\right)F_1^2 F_3\Big\}$$

$$+e'\left\{4\left(1+\frac{1}{n'}\right)F_1R'+4\left(1+\frac{1}{n''}\right)F_3R'''-\frac{3n'+1}{n'-1}F_1^2\right.$$

$$-\left(6+\frac{4}{n''}\right)F_1F_3-\left.\frac{3n''+1}{n''-1}F_3^2\right\}+e'^2\left\{\left(\frac{2}{n'}+3\right)F_1\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{n''}+3\right)F_3\right\}=0,$$

wofür wir abkürzend schreiben wollen:

$$2)\quad A+Be'+Ce'^2=0.$$

Die Werthe von F_1 und F_3 ergeben sich numerisch aus der Bedingung des Achromatismus (ibid. 58), nämlich aus

$$3)\quad F_1=\frac{F}{1-\pi},\qquad F_3=-\frac{\pi F}{1-\pi},$$

sobald man der gesammten Focallänge F einen bestimmten Werth beilegt.

Soll nun das Objektiv einem Fernrohr angehören, also $e'=0$ sein, so reducirt sich die Gleichung (2) auf: $A=0$. Da aber diese Gleichung für jedes R' ein R''', so wie für jedes R''' ein R' liefert, so kann man noch über eine dieser beiden Gröfsen verfügen. Herschel empfiehlt als die schicklichste Bedingung, der man accessorisch das Objektiv unterwerfen kann, die Erfüllung der Gleichung $B=0$, da alsdann für geringere Werthe von e', also für mäfsige Objektsentfernungen die allgemeine Gleichung (2) nahe erfüllt ist, so dafs man das Fernrohr auch für nähere Objekte gebrauchen kann.

Hat man aus $A=0$ und $B=0$ R' und R''' gefunden, so liefert die Gleichung (1) das R'' und R'''' dazu.

Zur bequemeren Berechnung hat Herschel eine Tafel berechnet, aus der sich durch Interpolation unmittelbar die Krümmungen bestimmen lassen. Sie beruht darauf, dafs R'' und R''' sich wenig ändern, wenn n', n'', π wächst oder abnimmt. Sie enthält die Krümmungen für $n'=1{,}524$, $n''=1{,}585$, und die Aenderungen von R'' und R'''', für eine Aenderung der Brechungsverhältnisse von 0,01. Die Tafel ist die nachstehende, in welcher die Krümmungshalbmesser nach der Reihe durch r', r'', r''', r'''', die Aenderungen von

r' und r'''' für jedes Hundertel, um welches n' den Werth 1,524 übertrifft, durch d_1r', d_1r'''', und die Aenderungen von r' und r'''' für jedes Hundertel, um welches n'' gröfser als 1,585 ist, durch d_2r', d_2r'''' bezeichnet sind, unter der Voraussetzung, dafs $F = 10$ ist. Von den Krümmungen ist nur die dritte concav.

π	r'	d_1r'	d_2r'	r''	F_1
0,50	6,6485	+ 0,0500	— 0,030	4,2827	5,0
0,55	6,7184	+ 0,0740	— 0,0011	3,6332	4,5
0,60	6,7069	+ 0,0676	+ 0,0037	3,0488	4.0
0,65	6,7316	+ 0,0563	+ 0,0125	2,5208	3,5
0,70	6,8279	+ 0,0335	+ 0,0312	2,0422	3.0
0,75	7,0816	— 0,0174	+ 0,0568	1,6073	2,5

π	r'''	r''''	d_2r''''	d_1r''''	F_3
0,50	4,1575	14,3697	+ 0,9920	— 0,3962	10,0000
0,55	3,6006	14,5353	+ 1,0080	— 0,5033	8,1818
0,60	3,0640	14,2937	+ 1,1049	— 0,5659	6,6667
0,65	2 5566	13,5709	+ 1,1614	— 0,6323	5,3846
0,70	2,0831	12,3154	+ 1,1613	— 0,7570	4,2858
0,75	1,6450	10,5186	+ 1,0847	— 0,7207	3,3333

Man findet für r' und r'' die Werthe, welche zu einem gegebenen n' und n'' gehören, mittelst dieser Tafel, wenn man dieselben durch (r') und (r'''') bezeichnet, durch die Gleichungen

$(r') = r' + dn'\,d_1r' + dn''\,d_2r'$, d. h.

$(r') = r' + \frac{1}{100}(n' - 1{,}524)\,d_1r' + \frac{1}{100}(n'' - 1{,}585)\,d_2r'$,

$(r'''') = r'''' + dn'\,d_1r'''' + dn''\,d_2r''''$, d. h.

$(r'''') = r'''' + \frac{1}{100}(n' - 1{,}524)\,d_1r'''' + \frac{1}{100}(n'' - 1{,}585)\,d_2r''''$,

Ist z. B. $n' = 1{,}519$, $n'' = 1{,}589$, $\pi = 0{,}567$, so erhält man, von $\pi = 0{,}55$ ausgehend,

$(r') = 6{,}7184 - 0{,}5 \cdot 0{,}740 - 04 \cdot 0{,}0011 = 6{,}6810$

$(r'''') = 14{,}5353 - 0{,}5 \cdot 1{,}0080 - 0{,}4 \cdot 0{,}5033 = 13{,}8300$,

oder wenn man von $\pi = 0{,}60$ ausgeht,

$(r') = 6{,}7069 - 0{,}0338 + 0{,}0015 = 6{,}6746$

$(r'''') = 14{,}2937 - 0{,}5524 - 0{,}2264 = 13{,}5149$.

Der Mittelwerth von (r') und (r'''') aus diesen beiden *Resultaten ergiebt sich* aus den Proportionen

$(0,600-0,550):(0,567-[0,600-0,550])$
$= (6,6746-6,6810):-0,0022$
$(0,600-0,550):(0,567-[0,600-0,550])$
$= (13,5149-13,8300):-0,1071,$

so dafs $r' = 6,6810-0,0022 = 6,6788,$
$r'''' = 13,8300-0,1071 = 13,7229$

resultirt, und hieraus mittelst (1)

$$r'' = -3,3868, \quad r''' = -3,3871.$$

Diese Methode, welche übrigens vor allen anderen Methoden, die von den genäherten Werthen der Vereinigungsweiten ausgehen, den Vorzug verdient, reicht nur für kleinere Fernröhre aus. Für gröfsere Fernröhre mufs man zu den strengen Formeln (Abschn. V, 45—47) zurückkehren.

Klügel nahm hierbei die Krümmungen der ersten (Kronglas-) Linse so, dafs die Ein- und Austrittswinkel gleich würden, um zu grofsen Brechungswinkeln in dieser Linse zu entgehen.

Sieht man von der Dicke der Linse ab, so ist unter dieser Voraussetzung

$$4) \quad R' = \frac{n'F_1}{n(n'-1)}, \quad R'' = \frac{(2-n')F_1}{2(n'-1)}.$$

Die vordere Krümmung der zweiten Linse bestimmte er alsdann so, dafs nach der an derselben erfolgenden (dritten) Brechung die sphärische Abweichung gehoben wird, und die hintere Krümmung so, dafs die rothen und violetten Centralstrahlen eine gleiche Vereinigungsweite erhalten, das Objektiv also in Bezug auf die Centralstrahlen achromatisch wird.

Da bei diesem Verfahren vorausgesetzt wird, dafs die vierte Brechung den Aplanatismus wenig stört, und da eine geringe Abweichung nach der dritten Brechung die Abweichung nach der vierten Brechung stark vermehrt, so ist es vortheilhafter, die dritte und vierte Krümmung zugleich so zu bestimmen, dafs nach der vierten Brechung die sphärische und chromatische Abweichung gehoben wird.

Dies Verfahren ist kürzlich folgendes:

Vernachlässigt man die höheren Potenzen der Linsen-

dicke, so dafs man für die Vereinigungsweite der Centralstrahlen nach der ersten Brechung den Werth aus der zweiten Gleichung (Abschn. V, 31) nehmen kann, und läfst man die Entfernung der Linsen so wie die Dicke der Flintglaslinse aufser Acht, so dafs man aus der ersten Gleichung (31) für diese Linse $f_2^{-1} = (n''-1)(R'''-R'''') + e$ (unter f_2 die Vereinigungsweite nach der vierten Brechung verstanden) erhält, so hat man

$$f_2^{-1} = (n'-1)(R'-R'') + (n''-1)(R'''-R'''') + \frac{(n'-1)^2}{n'} R'^2 d.$$

Das Differenzial dieses Ausdrucks nach f_2 gleich Null setzend, ergiebt sich

$$(R'-R'')\pi + (R'''-R'''') + (n'^2-1)\frac{\pi d}{n'^2} R'^2 = 0.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\frac{\delta n'}{\delta n''}$ durch k, und $R'''-R''''$ durch Mk, und substituirt in die letzten beiden Gleichungen aus (4) die Werthe von R' und R'', so findet sich

$$M = -\frac{1}{n'-1}\left(1 + (n'+1)\frac{d}{4}\right).$$

$$f_2^{-1} = 1 + (n''-1)Mk + \tfrac{1}{4}nd.$$

Alsdann bestimmt man nach dem p. 178 angegebenen Verfahren, für den Einfallswinkel α einen bestimmten Werth (z. B. 10°) setzend, aus den obigen Werthen von R' und R'' die Vereinigungsweite (f_1) der Randstrahlen nach der zweiten Brechung; und aus dieser durch Wiederholung des Verfahrens die Vereinigungsweite (f_2) nach der Brechung durch die zweite Linse, indem man für R''' einen hypothetischen Werth, und für R'''' dann den Werth $R'''-Mk$ setzt. Nach irgend einem Näherungsverfahren *) schreitet

*) Man kann hierbei mit dem arithmetischen Mittel der ersten Halbmesser anfangen, also $r''' = \frac{1}{2}(r''-r')$ setzen, und die dritten und folgenden Versuchswerthe aus

$$r''' = A - \frac{m(A-A')}{m-m'}$$

man er zu anderen Werthen von R''' fort, für jeden die Rechnung wiederholend, bis $(f_2) = f_2$ wird. Des ersten Theils der Rechnung, der Bestimmung von (f_1), kann man sich überheben, wenn man eine Tafel construirt, welche die Werthe von (f_1), die für ein bestimmtes α nur Funktionen von n' sind, für verschiedene n' enthält.

Statt der von Klügel angegebenen Bestimmung der ersten Linse, die übrigens nur bei Anwendung abgekürzter Formeln von gröfserem Vortheil sein würde, kann man mit Littrow die Krümmungen R' und R'' dazu benutzen, auch die farbigen Randstrahlen zu vereinigen, oder die gröfstmögliche Helligkeit zu erwirken.

Da die Lichtstärke von der Gröfse der Oeffnung abhängt, und diese bei gleichseitigen Linsen am gröfsten ausfällt, so erreicht man den letzten Zweck, wenn man $R' = -R''$ nimmt.

Bedient man sich des aus Abschn. V, (29) gezogenen Näherungswerthes $R' = -R'' = \frac{F_1}{2(n'-1)}$, so findet man, wenn man so wie vorher verfährt,

$$5)\quad M = -\frac{1}{n'-1}\left(1 + \frac{(n'+1)d}{4n'^2}\right)$$

$$6)\quad f_2^{-1} = 1 + (n''-1)Mk + \frac{d}{4n}.$$

Im Uebrigen bleibt der Gang, wie vorher.

Die Gröfse der Oeffnung, x, ist dann gegeben durch die Gleichung

$$x = f_2 \, tang\, \varphi'''',$$

wo φ'''' die Neigung der aus der zweiten Linse tretenden Randstrahlen gegen die Axe ist.

Es ändert sich r''' nur langsam, wenn n' oder n'' sich ändert, jedoch stärker bei einer Aenderung von n' als bei einer Aenderung von n''. Diese Eigenheit benutzend, hat Lit-

---

entnehmen, wo A und A' zwei vorher versuchte Werthe von r''' bedeuten, und wo, wenn für dieselben $(f_2) = a$ und $(f_2) = a'$ gefunden wurde, $m = f_2 - a$ und $m' = f_2 - a'$ ist.

trow eine der obigen Herschel'schen ähnliche Tafel ·chnet, mittelst welcher sich r''', und daraus auch r'''' die letzte Vereinigungsweite sehr bequem bestimmen . (Das Nähere hierüber, so wie die Tafel selbst finman in Littrow's *Dioptrik p.* 139.)

Für die Berechnung getrennter Objektivlinsen giebt trow ein dem vorigen ganz ähnliches Verfahren an.

Bezeichnet man die Entfernung der beiden Linsen durch $(n'-1)(R'-R'')$ durch A, und die Vereinigungsweite Centralstrahlen nach der Brechung in der Flintglaslinse :h f_2, so erhält man aus Abschn. V, (31), wenn man höheren Potenzen der Dicke der Kronglaslinse, so wie Dicke der Flintglaslinse aufser Acht läfst,

$$f_2^{-1} = (n''-1)(R'''-R'''')+e'',$$

da $e'' = \frac{1}{F^{-1}-\varepsilon}$ und $F = A + \frac{(n'-1)^2}{n'} R'^2 d$ ist,

$$) \quad f_2^{-1} = (n''-1)(R'''-R'''') + \frac{A}{1-A\varepsilon} + \frac{(n'-1)^2 dR'^2}{n'(1-A\varepsilon)^2}.$$

erenzirt man diese Gleichung, und setzt $\partial f_2 = 0$, so et sich, $\frac{\delta n'}{\delta n''} = k$ setzend,

$$'-R''') = \frac{Ak}{(n'-1)(1-A\varepsilon)^2} + \frac{(n'-1)^2 A\varepsilon + n'^2 - 1}{n'^2(1-A\varepsilon)^3} R'^2 kd.$$

Nimmt man überdies die erste Linse als gleichseitig A zur Einheit an, so dafs $R' = -R'' = \frac{1}{2(n'-1)}$ l, so erhält man aus der letzten Gleichung:

$$) \quad R''''-R''' = \frac{k}{(n'-1)(1-\varepsilon)^2} + \frac{(n'-1)^2\varepsilon + n'^2 - 1}{n'^2(1-\varepsilon)^3} R'^2 \pi d,$$

diesen Werth von $R''''-R'''$ in (7) substituirend,

$$) \quad f_2^{-1} = \frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{(n''-1)k}{(n'-1)(1-\varepsilon)^2}$$

$$\cdot \frac{n''(n'-1)^2(1-\varepsilon) - (n''-1)[(n'-1)^2\varepsilon + n'^2 - 1]k}{n'^2(1-\varepsilon)^3} R'^2 d.$$

Die Gleichungen (8 und 9) treten an die Stelle der ·chungen (5 und 6); im Uebrigen bleibt das Verfahren Bestimmung von R''' und R'''' wie vorher.

[illegible]i[illegible]tem mühsamer als die Berechnung der Fernrohr[illegible]:tive ist die Berechnung der aus mehreren Linsenpaare[illegible]estehenden mikroskopischen Objektive, einestheils, w[illegible]sen selbst zahlreicher sind, anderntheils, weil die Dist[illegible]n und Dicken der Linsen zu den Objektsweiten in namhaftem Verhältniſs stehen, und daher selbst die Dicke der Flintglaslinsen nicht vernachlässigt werden darf.

Man kann bei der Berechnung, von den strengen Formeln (Abschn. V. 45—47) ausgehend, einen dem beim Fernrohrobjektiv a[illegible]eigten ähnlichen Näherungsweg einschlagen.

Macht man es sich, wie es unbedingt nöthig ist, zum Hauptzweck, die sphärische und chromatische Aberration möglichst zu vernichten, so geht man am sichersten, wenn man jedes einzelne Linsenpaar von diesen Abweichungen zu befreien sucht. Namentlich gilt dies für schärfere Objektive, wo wegen der starken Krümmungen, wenn man durch Verkleinerung der Oeffnungen der Helligkeit nicht zu sehr schaden will, geringe Abweichungen eines Linsenpaars durch die folgenden Paare leicht nicht mehr compensirt werden können.

Ist z. B. $\varphi^{(r)}$ der Winkel, welchen die auf die erste Linse fallenden äuſsersten Randstrahlen mit der Axe bilden, $f_4^{(r)}$ die hintere Vereinigungsweite dieser Strahlen nach dem Austritt aus dem zweiten Linsenpaar, $f_6^{(r)}$ dieselbe nach dem Austritt aus dem dritten Linsenpaar, und sind (f_4) und (f_6) die entsprechenden Vereinigungsweiten der Centralstrahlen, so sei zuvörderst $(f_4)=f_4^{(r)}$, also die sphärische Abweichung der beiden ersten Paare wenigstens in Bezug auf die äuſsersten Randstrahlen gehoben. Alsdann wird, wenn man statt des dritten Linsenpaars eine einfache Convexlinse nimmt, $(f_6)>f_6^{(r)}$. Bei Anwendung einer Doppellinse wird die Gleichheit von (f_6) und $f_6^{(r)}$ hauptsächlich durch die Krümmung der Hinterfläche des Flintglases hergestellt, indem wegen der Divergenz der Einfallsstrahlen die Einfallswinkel mit der Entfernung von der Axe wachsen, die Concavität der genannten Hinterfläche die

ndstrahlen demnach mehr zur Divergenz lenkt, als die ntralstrahlen, während die gleichgekrümmte Vorderfläche r anstofsenden Kronglaslinse wegen des geringeren Bre- ıngsvermögens den Ueberschufs an Divergenz nicht völ- wieder aufzuheben vermag. Wählt man aber auch die ümmungen so, dafs $(f_6) = f_6^{(r)}$ wird, so weichen doch : Strahlen, welche unter Winkeln auf das Objektiv fal- ı, die kleiner als $\varphi^{(r)}$ sind, nach der einen oder der an- rn Seite aus, und zwar um so mehr, je kleiner die Brenn- iten sind und je gröfser $\varphi^{(r)}$ ist.

Wenn dagegen $(f_4) > f_4^{(r)}$ ist, so mufs man bei gleicher ennweite des dritten Paars die hintere Krümmung der ntglaslinse gröfser nehmen, als im vorigen Fall, um noch $) = f_6^{(r)}$ zu erhalten. Ueberschreitet also $(f_4) - f_4^{(r)}$ ein wisses Maafs, so wird die erforderliche Krümmung zu ofs, um noch vom Künstler hergestellt werden zu kön- n, und es wird überdies schon vor dem Ueberschreiten eses Maafses der Gang der Zwischenstrahlen so unregel- fsig, dafs an Deutlichkeit des Bildes nicht mehr zu den- n ist. Dies mufs um so leichter eintreten, wenn die reinigungsweiten der Zwischenstrahlen (deren Axenwin- l beim Eintritt in das Objektiv zwischen 0 und $\varphi^{(r)}$ liegt) cht stetig von (f_4) bis $f_4^{(r)}$ abnehmen, wie es der Fall , wenn das erste Linsenpaar nur unvollkommen aplana- ch ist. Aehnliches tritt ein, wenn auch nicht in so ho- m Grade, wenn $(f_4) < f_4^{(r)}$ war. Doch kann schon bei fsigen Werthen von $(f_4) - f_4^{(r)}$ die vordere Krümmung r Flintglaslinse so übermäfsig stark concav werden müs- ı, dafs sie entweder unherstellbar ist, oder doch eine zu ringe Oeffnung erlaubt, um noch mit Vortheil angewen- t werden zu können.

Es ist hieraus ersichtlich, dafs, vorzugsweise bei klei- n Brennweiten, möglichst vollkommener Aplanatismus des sten und demnächst des zweiten Linsenpaars Bedingung ͽglichst gröfster Deutlichkeit des Bildes ist.

Ganz dasselbe gilt, wie man sich leicht überzeugt, für n Chromatismus.

Von nicht unbedeutendem Einflufs ist ferner die Distanz und die Dicke der Linsenpaare. Da nämlich die Strahlen zwischen den Doppellinsen, und meist auch innerhalb der Linsen divergiren, so treffen dieselben die brechenden Flächen dem Rande um so näher, je weiter die Linsen von einander entfernt und je dicker dieselben sind. Beschränkung dieser Gröfsen hilft daher nicht sowohl zur Deutlichkeit, als insofern zur Helligkeit, als die das erste Linsenpaar verlassenden Strahlen vollständiger von den folgenden aufgenommen werden.

Besteht das Objektiv aus drei Linsenpaaren, und betrachtet man die Objektsweite, die Brennweite des Linsensystems, so wie die Entfernung und Dicke der Gläser als ge[illegible] so läfst sich noch, da die sich berührenden Flä[illegible]n der Doppellinsen gleich sind, über drei Krümmungen [illegible] ersten und zweiten Doppellinse und über zwei Krümmungen bei der dritten schalten. Da ferner das Brennweitenverhältnifs der Paare nicht ganz willkürlich sein darf, insofern die vorderen Vereinigungsweiten kleiner als die Brennweiten sein müssen, so wird man die eine der Krümmungen der beiden ersten Paare dazu verwenden, die Brennweiten einer vorbestimmten Gröfse gleich, oder sie zwischen bestimmte Grenzen fallen zu machen. Es blieben sonach für jedes Paar nur noch zwei Krümmungen unserer Willkür zu überlassen.

Im Folgenden mögen diese zur Vernichtung der chromatischen Abweichung der Centralstrahlen und zur Aufhebung der sphärischen Abweichung der aus der Axe kommenden Strahlen verwendet werden.

Zur bequemeren Bezeichnung sollen die in (Abschn. V, 45—47) enthaltenen Gröfsen f', φ', r', n, α, α' durch f, φ, r, n, α, α' mit einem Index bezeichnet werden, welcher die Zahl der brechenden Fläche angiebt. Sind nun die Substanzen Flintglas und Kronglas, so ist $n_1 = n_5 = n_9$ das Brechungsverhältnifs des Flintglases, $n_2 = n_3 = n_6 = n_7 = n_{10} = n_{11}$ das des Kronglases in Bezug auf das Flint- und $n_4 = n_8 = n_{12}$ das des Kronglases in Bezug auf

Luft; und überdies ist $r_2 = -r_3$, $r_6 = -r_7$, $r_{10} = r_{11}$ und $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_6 = \alpha_7$, $\alpha_9 = \alpha_{10}$, so wie $f_2 = f_3$, $= f_7$, $f_9 = f_{10}$. Ferner seien die Entfernungen der Doppellinsen beziehlich e_1 und e_2, die Dicke der Flintglaslin- d_1, d_3, d_5, die der Kronglaslinsen d_2, d_4, d_6.

Für das erste Linsenpaar hat man alsdann die Forln:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sin\alpha_1 = \frac{a-r_1}{r_1}\sin\varphi, \quad \sin\alpha_1' = \frac{\sin\alpha_1}{n_1},\\
&\varphi_1 = \varphi + \alpha_1 - \alpha_1', \quad f_1 = r_1 + r_1\frac{\sin\alpha_1'}{\sin\varphi_1},\\
&\sin\alpha_2 = \sin\alpha_3 = \frac{f_1 - d_1 - r_2}{r_2}\sin\varphi_1, \quad \sin\alpha_2' = \frac{\sin\alpha_2}{n_2},\\
&\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_1 + \alpha_2 - \alpha_2', \quad f_2 = f_3 = r_2 + r_2\frac{\sin\alpha_2'}{\sin\varphi_2},\\
&\sin\alpha_4 = \frac{f_2 - d_2 - r_4}{r_4}\sin\varphi_2, \quad \sin\alpha_4' = \frac{\sin\alpha_4}{n_4},\\
&\varphi_4 = \varphi_2 + \alpha_4 - \alpha_4', \quad f_4 = r_4 + r_4\frac{\sin\alpha_4'}{\sin\varphi_4}.
\end{aligned}\right.$$

Ist die erste Fläche eben, so treten an die Stelle der n, 3ten und 4ten dieser Gleichungen:

$$\text{I}'. \quad \alpha_1 = -\varphi, \quad \varphi_1 = -\alpha_1', \quad f_1 = -a\frac{\tang\alpha_1}{\tang\alpha_1'}.$$

Aus diesen Formeln erhält man die Werthe der Verigungsweiten (f_1), (f_2), (f_4) der Centralstrahlen, wenn n φ, φ_1, φ_2, φ_4 als kleine Gröfsen annimmt, und demh für deren Sinus die Bögen setzt. Bezeichnet man mlich $\frac{a-r_1}{r_1}$ durch ω, so wird

$$\alpha_1 = n_1\alpha_1' = \omega\varphi, \quad \varphi_1 = \left(1 - \frac{n_1 - 1}{n}\omega\right)\varphi,$$

glich $(f_1) = \frac{n_1(1-\omega)r_1}{n_1 - (n_1 - 1)\omega} = \frac{ar_1}{(n_1 - 1)a - r_1}$,

d mithin

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{(f_1)} = \frac{n_1 - 1}{n_1 r_1} - \frac{1}{an_1}, \quad \frac{1}{(f_2)} = \frac{n_2 - 1}{n_2 r_2} - \frac{1}{((f_1) - d_1)n_2},\\
&\frac{1}{(f_4)} = \frac{n_4 - 1}{n_4 r_4} - \frac{1}{((f_2) - d_2)n_4}.
\end{aligned}\right.$$

Im Fall einer ebenen Vorderfläche wird die erste dieser Gleichungen

$$\text{II}'.\quad (f_1) = -an_1.$$

Bei der Berechnung des ersten Paars würde man nun etwa, wie folgt, verfahren können.

Nachdem man einen Werth F angenommen hat, von welchem die Brennweite desselben nicht stark abweichen soll, so bestimmt man aus der Näherungsformel

$$\pi F = -F_1(1-\pi)$$

vorläufig den Werth F_1 der Brennweite der Flintglaslinse, und nachdem man für r_1 einen bestimmten Werth gewählt hat, aus

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{(n_1-1)F_1}$$

den zugehörigen Werth von r_2. Den Radius r_1 wird man in der Regel mit Vortheil unendlich grofs (also die Vorderfläche eben) nehmen können. Alsdann bestimmt man r_4 so, dafs die chromatische Abweichung gehoben wird.

Ist nämlich (f_2'), (f_4'), n_4' für diejenigen Farbenstrahlen, welche man mit den mittleren vereinigen will, das, was (f_2), (f_4), n_4 für die mittleren Strahlen ist, und bezeichnet man die umgekehrten Werthe der Constanten $((f_2)-d_2)n_4$ und $((f_2')-d_2)n_4'$ beziehlich durch ν und ν', so hat man, wenn $(f_2) = (f_2')$ werden soll,

$$\text{III.}\quad r_4 = \frac{\partial n_4}{n_4 n_4'(\nu'-\nu)}$$

als Bedingung des Achromatismus.

Mittelst dieser Werthe von r_1, r_2, r_4 sucht man, dem φ einen Grenzwerth beilegend, aus (I.) f_4, und wiederholt die letzten Theile der Rechnung für einen etwas geänderten Werth von r_2 und von dem aus (III.) dazu gefundenen r_4 die Rechnung, wenn f_4 nicht hinreichend genau mit (f_4) übereinstimmt. Das Nicht-Coincidiren von f_4 und (f_4) giebt sich schon während der Rechnung kund, da f_1 sich nicht viel von (f_1) unterscheiden darf und f_2 etwas kleiner als (f_2) werden mufs. Wird f_4 zu klein, so hat man r_2 zu verkleinern, im entgegengesetzten Falle zu vergröfsern.

Es reichen meist wenige Versuche aus, einen hinlänglich genauen Werth von r_2 zu finden, namentlich wird man, da es auf kleine Aenderungen von F_1 nicht ankommt, selten r_1 zu ändern nöthig haben, welches letztere indeſs dann geschehen muſs, wenn r_2 oder r_3 zu kleine Gröſsen werden sollten. Da ferner die Kronglaslinse stets die kleinere Brennweite, also die stärksten Krümmungen hat, so werden die Verbindungen die vortheilhaftesten, in denen r_2 und r_4 nahe gleich werden.

Die Radien des zweiten Linsenpaares ergeben sich auf demselben Wege, aus denselben Formeln, in denen sich nur die Indices ändern, und φ und a durch φ_4 und $f_4 - e_1$ zu ersetzen sind. Am bequemsten möchte es sein, wo es sich thun läſst, die Brennweite F_3 der zweiten Flintglaslinse so zu nehmen, daſs $F_3 = \frac{f_4 - e_1}{a} F_1$ wird, weil alsdann $\frac{r_5}{F_3}$, $\frac{r_6}{F_3}$ und $\frac{r_8}{F_3}$ nahe gleich $\frac{r_1}{F_1}$, $\frac{r_2}{F_1}$ und $\frac{r_4}{F_1}$ genommen werden kann.

Was das dritte Linsenpaar betrifft, so setze man zuvörderst $r_9 = \infty$, also

$$(f_9) = (e_1 - f_4) n_1 \text{ und } (f_9') = (e_1 - f_4) n_1',$$

und substituire diese Werthe von (f_9) und (f_9') in die zweite der Gleichungen (II.) und in die correspondirende

$$\frac{1}{(f_{10}')} = \frac{n_2' - 1}{n_2' r_2} - \frac{1}{((f_9') - d_5) n_2'},$$

wodurch man zwei Gleichungen zwischen r_2, (f_{10}) und (f_{10}') erhält. Verbindet man hiermit die dritte Gleichung (II.), so wie (III.), d. h.

$$r_{12} = \frac{\partial n_4}{n_4 n_4' (\nu' - \nu)},$$

wo $\nu^{-1} = n_4((f_{10}) - d_6)$ und $\nu'^{-1} = n_4'((f_{10}') - d_6)$ und (f_{12}) die gegebene Brennweite des Objektives ist, so erhält man durch Elimination von (f_{10}) und (f_{10}') die durch den Achromatismus bedingten Werthe von r_{10} und r_{12}. Durch Variiren von r_9 und Wiederholen der Rechnung kommt man mittelst *der Gleichungen* (I.) auf die Systeme der Halb-

Da es bei der Herstellung dieser Funktionen auf keine grofse Schärfe ankommt, so ist in den nachfolgenden, hier auf sich beziehenden Rechnungen die sphärische Abweichung so wie die Dicke der Linsen, unberücksichtigt geblieben.

Es bedeute für die Folge f_a die Brennweite der $a$ten Linse, b_a ihre vordere, β_a ihre hintere Vereinigungsweite; y_a den Oeffnungs-Halbmesser, den dieselbe haben mufs, damit dem Randstrahl, welcher von der Mitte des Objekts auf den Rand des Objektivs fällt, und welcher anfangs mit der Axe den Winkel φ bildete, noch der Durchgang gestattet wird; φ_a den Winkel, welchen dieser Randstrahl nach der Brechung durch die $a$te Linse mit der Axe bildet; z_a oder $a_a f_a$ den Oeffnungs-Halbmesser, den dieselbe haben mufs, damit der Hauptstrahl (welcher, von dem Rande des Gesichtsfeldes kommend, durch die Mitte des Objektivs geht, und mit der Axe anfangs den Winkel ψ bildete) noch durch die Linse treten könne; ψ_a den Winkel, welchen dieser Hauptstrahl nach der Brechung durch die $a$te Linse mit der Axe bildet, m_a die Vergröfserung durch die ersten a Linsen, γ_{a-1} die Entfernung der $a$ten Linse von der $a-1$ten; endlich o_a die Entfernung des Auges hinter der $a$ten Linse.

In der Figur 101, in welcher DE das Objekt, C_1Y_1 das Objektiv, C_2Y_2, C_3Y_3 etc. die Ocularlinsen, und $DZ_2Z_3Z_4\ldots$ den Haupt-, $EY_1Y_2Y_3\ldots$ den Randstrahl vorstellt, ist demnach $C_1Y_1=y_1$, $C_2Y_2=y_2$, $C_3Y_3=y_3$ etc., $C_2Z_2=z_2$, $C_3Z_3=z_3\ldots\ldots\ldots$, $EC_1=b_1$, $e_1C_2=b_2$, $e_2C_3=b_3\ldots\ldots$, $C_1e_1=\beta_1$, $C_2e_2=\beta_2$, $C_3e_3=b_3\ldots\ldots$, $C_1C_2=\beta_1+b_2=\gamma_1$, $C_2C_3=\beta_2+b_3=\gamma_2\ldots$, $C_2O_2=o_2$, $C_3O_3=o_3\ldots.$ Ferner sei die Gröfse des durch die $a$te Linse erzeugten Bildes h_a, also $e_1d_1=h_1$, $e_2d_2=h_2\ldots$, und $O_2e_2=\delta_2$, $O_3e_3=\delta_3\ldots$, und zwar mögen alle diese Gröfsen positiv sein, wenn sie die in der Figur angezeigte Lage haben, negativ im entgegengesetzten Falle.

Setzt man statt der Tangenten die Bogen, so erhält man unmittelbar aus der Figur

$$10)\begin{cases}\varphi_1=\frac{y_1}{\beta_1}, & y_2=b_2\varphi_1=\frac{b_2}{\beta_1}y_1\\ \varphi_2=\frac{y_2}{\beta_2}=\frac{b_2y_1}{\beta_1\beta_2}, & y_3=b_3\varphi_2=\frac{b_2b_3}{\beta_1\beta_2}y_1\\ \varphi_3=\frac{y_3}{\beta_3}=\frac{b_2b_3y_1}{\beta_1\beta_2\beta_3}, \text{ etc.} & y_4=b_4\varphi_3=\frac{b_2b_3b_4}{\beta_1\beta_2\beta_3}y_1, \text{ etc.}\end{cases}$$

Ferner hat man

$$h_1=\frac{\beta_1}{b_1}h,\quad h_2=\frac{\beta_2}{b_2}h_1,\quad h_3=\frac{\beta_3}{b_3}h_2\ldots,$$

also, da $h=b_1\psi$ ist,

$$11)\quad h_1=\beta_1\psi,\quad h_2=\frac{\beta_1\beta_2}{b_2}\psi,\quad h_3=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{b_2b_3}\psi\ldots..$$

Ist hierbei h_a positiv, so ist das betreffende Bild aufrecht, wenn a gerade, verkehrt, wenn a ungerade ist, während das Umgekehrte stattfindet, wenn h_a negativ ist.

Da ψ die scheinbare Gröfse des Objekts (von C aus gesehen) ist, und ψ_2, ψ_3 ... die scheinbaren Gröfsen der Bilder (von O_2, O_3 ... aus gesehen) sind; da ferner, wenn in O_2 das Bild e_1d_1 deutlich gesehen werden soll, die austretenden Strahlen d_1C_2, Z_2O_2 nahe parallel sein müssen, so dafs $h_1=b_2\psi_2=\beta_1\psi$ ist, so hat man

$$12)\quad \psi_2=\frac{\beta_1}{b_2}\psi,\quad m_2=\frac{\psi_2}{\psi}=\frac{\beta_1}{b_2}.$$

Ebenso findet man

$$12)\begin{cases}\psi_3=\frac{\beta_1\beta_2}{b_2b_3}\psi, & m_3=\frac{\beta_1\beta_2}{b_2b_3}\\ \psi_4=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{b_2b_3b_4}\psi,\ldots. & m_4=\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{b_2b_3b_4},\ldots.\text{*)}\end{cases}$$

*) Da die Tangenten der Winkel ψ_2, ψ_3, ψ_4 ... der Vergröfserung m proportional sind, so können die Gleichungen (12), in denen diese Tangenten durch die Bögen ersetzt sind, so wie die von ihnen abgeleiteten Gleichungen, nur für schwächere Vergröfserungen genugsam genaue Resultate liefern.

Von dem im Text befolgten, von **Euler** in seiner Dioptrik eingeschlagenen Gang abgehend, hat daher **Schleiermacher** eine sich auf *strengen* Formeln gründende Theorie der Oculare aufzustellen versucht, deren Principien sich in (**Pogg.** Ann. XIV) entwickelt finden.

Wird m_α negativ, so liegt der Punkt O_α vor, statt hinter der Linse.

Endlich erhält man durch Verbindung von (10. u. 12)

$$13)\quad y_2 = \frac{y_1}{m_2},\quad y_3 = \frac{y_1}{m_3},\quad y_4 = \frac{y_1}{m_4}\ldots$$

Da sich nun die Menge des auf die letzte Linse fallenden Lichtes zu der ins Auge dringenden wie die Fläche der letzten Linse zur Fläche der Pupille verhält, so hat man zum Ausdruck der Helligkeit H, wenn $2p$ der Durchmesser der Pupille ist,

$$H = \frac{y_\alpha^2}{p^2} = \frac{y_1^2}{m_\alpha^2 p^2},$$

falls nur die Pupille gleich oder kleiner als die Oeffnung der letzten Linse ist. Nimmt man nun, wie es gewöhnlich geschieht, $y_\alpha = 0{,}02$ und $p = 0{,}05$, so wird $m_\alpha = 50 y_1$ und $H = \frac{400 y_1^2}{m_\alpha^2}$.

Da aus der Formel $F = f - e'$ p. 167 das Gesetz folgt, dafs die reciproke Focallänge gleich der Summe der beiden reciproken Vereinigungsweiten ist, sobald man auf die Linsendicke keine Rücksicht nimmt, so folgt für unsern Fall, wegen $C_2 O_2 = o_2$,

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{o_1 C_2} + \frac{1}{o_2},$$

also, insofern $z_2 = a_2 f_2 = o_1 \psi$ ist,

$$o_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - \psi};$$

ebenso wegen

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{O_2 C_3} + \frac{1}{o_3} \text{ und } O_2 C_3 = \frac{o_2 z_3}{z_2} = \frac{a_3 f_3}{a_2 - \psi},$$

$$o_3 = \frac{a_3 f_3}{a_3 - a_2 + \psi};$$

und allgemein:

$$14)\quad o_\alpha = \frac{a_\alpha f_\alpha}{a_\alpha - a_{\alpha-1} + a_{\alpha-2} \ldots \pm a_2 \mp \psi},$$

während aus $\psi_\alpha = \frac{z_\alpha}{o_\alpha}$ folgt:

15) $\left\{\begin{array}{l}\psi_2 = a_2 - \psi, \quad \psi_3 = a_3 - a_2 + \psi, \\ \psi_4 = a_4 - a_3 + a_2 - \psi \text{ etc.}\end{array}\right.$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich noch, wegen

$$m_\alpha = \frac{\psi_\alpha}{\psi},$$

16) $\left\{\begin{array}{l} m_2 = \dfrac{a_2 - \psi}{\psi}, \quad m_3 = \dfrac{a_3 - a_2 + \psi}{\psi}, \\ m_4 = \dfrac{a_4 - a_3 + a_2 - \psi}{\psi}, \text{ etc.,}\end{array}\right.$

und der Halbmesser des Gesichtsfeldes ψ:

17) $\psi = \dfrac{a_2}{m_2 + 1} = \dfrac{a_3 - a_2}{m_3 - 1} = \dfrac{a_4 - a_3 + a_2}{m_4 + 1}$ etc.

Ferner folgt aus (16 u. 12)

18) $\left\{\begin{array}{l} a_2 = \left(\dfrac{\beta_1}{b_2} + 1\right)\psi, \quad a_3 - a_2 = \left(\dfrac{\beta_1 \beta_2}{b_2 b_3} - 1\right)\psi, \\ a_4 - a_3 + a_2 = \left(\dfrac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{b_2 b_3 b_4} + 1\right)\psi \text{ etc.,}\end{array}\right.$

und aus (16 u. 14)

19) $o_\alpha = \dfrac{a_\alpha f_\alpha}{m_\alpha \psi}.$

Was die Werthe von z_α betrifft, so findet sich a[us] der Figur:

$$C_3 Z_3 : O_2 C_3 = C_3 Z_3 - e_2 d_2 : e_2 C_3, \text{ d. h.}$$

$$z_3 : \frac{z_3}{a_2 - \psi} = z_3 - h_2 : b_3,$$

woraus sich ergiebt:

20) $z_3 = a_3 f_3 = b_3 (a_2 - \psi) + h_2;$

Ebenso findet man

20) $\left\{\begin{array}{l} z_4 = b_4 (a_3 - a_2 + \psi) + h_3, \\ z_5 = b_5 (a_4 - a_3 + a_2 - \psi) + h_4, \ldots,\end{array}\right.$

wo $h_2, h_3, h_4 \ldots$ durch ihre Werthe aus (11) ersetzt we[r]den können.

Da überdies

$$z_2 = \gamma_1 \psi = C_2 O_2 \psi_2, \quad z_3 = O_2 C_3 . \psi_2 = O_3 C_3 . \psi_3,$$
$$z_4 = O_3 C_4 . \psi_3 = O_4 C_4 . \psi_4, \ldots.$$

und $C_2 O_2 + O_2 C_3 = \gamma_2$, $C_3 O_3 + O_3 C_4 = \gamma_3, \ldots.$ ist, hat man auch

21) $\gamma_2 = \frac{x_2 + x_3}{\psi_2}, \quad \gamma_3 = \frac{x_3 + x_4}{\psi_3}, \quad \gamma_4 = \frac{x_4 + x_5}{\psi_4} \dots$

d somit:

$$22) \quad \begin{cases} x_2 = \gamma_1 \psi, \quad x_3 = (a_2 - \psi)\gamma_2 - x_2, \\ x_4 = (a_3 - a_2 + \psi)\gamma_3 - x_3 \text{ etc.} \end{cases}$$

ı endlich

$O_2e_2 : e_2d_2 = C_2O_2 : C_2Z_2$, d. h. $\delta_2 : h_2 = x_2 : o_2$ ist, hat man noch

$$23) \quad \begin{cases} \delta_2 = \frac{h_2}{m_2\psi} = \frac{\beta_1\beta_2}{b_2m_2}, \text{ und ebenso} \\ \delta_3 = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{b_2b_3m_3}, \quad \delta_4 = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}{b_2b_3b_4m_4} \text{ etc.} \end{cases}$$

Für die Farbenzerstreuung in der Axe ergiebt sich aus 0):

$$\frac{\partial\varphi_2}{\varphi_2} = \frac{\partial b_2}{b_2} - \frac{\partial\beta_1}{\beta_1} - \frac{\partial\beta_2}{\beta_2},$$

welchem Ausdruck, weil $\gamma_1 = \beta_1 + b_2$ einen constanten 'erth hat, $\partial\beta_1 = -\partial b_2$ ist. Für den Fall, dafs die Strah- ı aus der zweiten Linse parallel austreten, wird daher

$$\partial\varphi_2 = -\frac{\varphi_2\partial\beta_2}{\beta_2} = -\frac{b_2y_1}{\beta_1\beta_2^2}\partial\beta_2.$$

rbindet man diese Gleichung mit Abschn. V (54), und ıerkt, dafs das dortige f_1, f_3, F_1, F_3, e'' identisch ist

$$\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}, -\frac{1}{b_2},$$

erhält man

$$24) \quad \partial\varphi_2 = -\left(\frac{\theta'}{f_1} + \frac{\theta'' b_2^2}{\beta_1^2 f_2}\right)\frac{\beta_1 y_1}{b_2};$$

l ebenso für drei Linsen aus Abschn. V (60):

$$24) \quad \partial\varphi_3 = \left(\frac{\theta'}{f_1} + \frac{\theta'' b_2^2}{\beta_2^2 f_2} + \frac{\theta''' b_2^2 b_3^2}{\beta_1^2\beta_2^2 f_3^2}\right)\frac{\beta_1\beta_2 y_1}{b_2b_3}, \text{ etc.}$$

Die Farbenzerstreuung am Rande, d. h. $\partial\psi_a$, erhält ın, wie folgt.

Die Gleichung (15) liefert $\partial\psi = \partial a_2$, während aus $= a_2f_2 = \gamma_1\psi$ folgt: $f_2^2\partial a_2 = -\gamma_1\psi . \partial f_2 = -a_2f_2\partial f_2$. ı nun nach Abschn. V (52) $\partial f_2 = -f_2\theta''$ ist, so er-

giebt sich

$$25)\quad \partial\psi_2 = a_2\theta''.$$

Betrachtet man, wenn eine dritte Linse hinzutritt, das Bild der zweiten Linse als Objekt, also $\partial\psi_2$ als den Gesichtswinkel, unter welchem dasselbe erscheint, so erhält man für die von demselben abhängige Aenderung von ψ_3 $\frac{\beta_2}{b_3}\partial\psi_2$, während die von der Aenderung von ψ_2 unabhängige Aenderung wiederum $a_3\theta'''$ ist. Man hat sonach

$$25)\quad \partial\psi_3 = \frac{\beta_2}{b_3}a_2\theta'' + a_3\theta''',$$

und ebenso für vier Linsen

$$25)\quad \partial\psi_4 = \frac{\beta_3}{b_4}\partial\psi_3 + a_4\theta'''' = \frac{\beta_2\beta_3}{b_3 b_4}a_2\theta'' + \frac{\beta_3}{b_4}a_3\theta''' + a_4\theta'''',$$

etc. etc.

Was die sphärische Abweichung, die wiederum (wie p. 170) durch ε vorgestellt werden möge, betrifft, so erhält man dieselbe aus Abschn. V (42), wenn man der Kürze wegen die in der eckigen Klammer stehenden Glieder nach der Reihe durch $2P_1$, $2P_2$, $2P_3 \ldots$ bezeichnet (da das dortige y die oben durch y_1 vorgestellte halbe Oeffnung und das dortige f der reciproke Werth der letzten Vereinigungsweite β_a ist), für ein System von a Linsen:

$$\varepsilon_a = \beta_a^2 y_1^2 (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots . P_a).$$

Der Ausdruck P_a läfst sich auf folgende Form bringen:

$$P_a = \frac{\mu_a}{f_a}\left(\frac{\lambda_a}{f_a} + \frac{\nu_a}{b_a\beta_a}\right),$$

wo μ_a und ν_a Funktionen des Brechungsverhältnisses sind, und zwar

$$\mu_a = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)}, \qquad \nu_a = \frac{4(n-1)^2}{4n-1},$$

(unter n das Brechungsverhältnifs der $a$ten Linse verstanden), und wo λ_a von den Krümmungsradien derselben r und r'' dergestalt abhängt, dafs

$$\frac{1}{r'} = \frac{\varrho_a}{b_a} - \frac{\sigma_a}{\beta_a} + \frac{\tau_a}{f_a}\sqrt{\lambda_a - 1}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{\varrho_a}{\beta_a} + \frac{\sigma_a}{b_a} - \frac{\tau_a}{f_a}\sqrt{\lambda_a - 1}$$

ist, in welchen Ausdrücken der Kürze wegen

$$\varrho_a = \frac{4+n-2n^2}{2(n-1)(n+2)}, \quad \sigma_a = \frac{n(2n+1)}{2(n-1)(n+2)},$$

$$\tau_a = \frac{n\sqrt{4n-1}}{2(n-1)(n+2)},$$

gesetzt ist *).

Bezeichnet man nun, wie p. 177 den Halbmesser des Abweichungskreises durch r, so erhält man dessen scheinbare Gröfse R, wenn man r durch den Abstand des Auges vom letzten Bilde, e, dividirt. Nun ist aber für 1, 2, 3, 4 .... Linsen beziehlich

$$e = \frac{\beta_1}{m_1}, \quad e = \frac{\beta_1\beta_2}{b_2 m_2}, \quad e = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{b_2 b_3 m_3}, \quad e = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}{b_2 b_3 b_4 m_4}, \ldots.$$

also für eine Linse

$$R_1 = \tfrac{1}{4} m_1 y_1^3 P_1,$$

und für a Linsen

$$26) \quad R_a = \frac{m_a y_1^3}{4}\left[P_1 + \left(\frac{b_2}{\beta_1}\right)^4 P_2 + \left(\frac{b_2 b_3}{\beta_1\beta_2}\right)^4 P_3 + \ldots \left(\frac{b_2 b_3 \ldots b_a}{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{a-1}}\right)^4 P_a\right],$$

und für ein Fernrohr, für welches $b_1 = \infty$ und $\beta_1 = f_1$ wird, wenn man

$$\lambda_c \left(\frac{b_c}{f_c}\right)^2 + \frac{\nu_c b_c}{\beta_c} = Q_c$$

setzt,

$$26, a) \quad R_a = \frac{m_a y_1^3}{4 f^4}\left[\mu_1\lambda_1 f_1 + \frac{\mu_2 b_2^2}{f_2} Q_2 + \frac{\mu_3 b_3^2}{f_3}\left(\frac{b_2}{\beta_2}\right)^4 Q_3 + \frac{\mu_4 b_4^2}{f_4}\left(\frac{b_2 b_3}{\beta_2\beta_3}\right)^4 Q_4 + \ldots\right].$$

Die bisher entwickelten Ausdrücke erhalten eine, namentlich für eine gröfsere Linsenzahl sehr bequeme Form,

---

*) In Euler's Dioptrik (Tom. II, p. 11) befindet sich eine Tafel, welche die Werthe von λ, μ, ν, ϱ, σ, τ für die Werthe von $n = 1{,}50$ bis $n = 1{,}60$, und in Littrow's Dioptrik (p. 59) eine Tafel, welche dieselben für die Werthe von $n = 1{,}30$ bis $n = 1{,}80$ ein für allemal berechnet enthält.

wenn man

$$\frac{\beta_a}{b_a} = A_{a-1}, \quad \frac{\beta_{a-1}}{b_a} = B_{a-1}$$

setzt. Es wird alsdann

$$b_2 = \frac{\beta_1}{B_1}, \quad b_3 = \frac{A_1 b_1}{B_1 B_2}, \quad b_4 = \frac{A_1 A_2 \beta_1}{B_1 B_2 B_3} \dots\dots$$

$$\beta_2 = A_1 b_2, \quad \beta_3 = A_2 b_3, \quad \beta_4 = A_3 b_4 \dots\dots$$

$$f_1 = \frac{A_1 \beta_1}{(1 + A_1) B_1}, \quad f_2 = \frac{A_1 A_2 \beta_1}{(1 + A_2) B_1 B_2},$$

$$f_3 = \frac{[illegible] \beta_1}{(1 [illegible] B_2 B_3} \dots\dots$$

und die Gleichungen (21, 12, 18, 19) gehen beziehlich über in:

$$\gamma_1 = \frac{(1 + B_1)\beta_1}{B_1}, \quad \gamma_2 = \frac{(1 + B_2) A_1 \beta_1}{B_1 B_2},$$

$$\gamma_3 = \frac{(1 + B_3) A_1 A_2 \beta_1}{B_1 B_2 B_3} \dots\dots$$

$$m_a = B_1 B_2 B_3 \dots\dots B_{a-1}$$

$$a_2 = (B_1 + 1)\psi, \quad a_3 - a_2 = (B_1 B_2 - 1)\psi,$$

$$a_4 - a_3 + a_2 = (B_1 B_2 B_3 + 1)\varphi \dots\dots$$

$$o_2 = \frac{\beta_1 a_2}{B_1^2 \psi}, \quad o_3 = \frac{A_1 \beta_1 a_3}{B_1^2 B_2^2 \psi}, \quad o_4 = \frac{A_1 A_2 \beta_1 a_4}{B_1^2 B_2^2 B_3^2 \psi} \dots$$

Da, wenn β_a negativ wird, das zugehörige Bild virtuell ist, so giebt es zwischen der ersten und zweiten, der zweiten und dritten etc. Linse kein Bild, sobald $B_1, B_2 \dots$ negativ werden.

Für Fernröhre hat man demnach aufser der Relation $m_a = B_1 B_2 B_3 \dots\dots B_{a-1}$ folgende Gleichungen

$$27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_1 a_2}{A_1 + 1} &= (B_1 + 1)\psi \\ \frac{A_2 a_3}{A_1 + 1} &= (B_1 B_2 - 1)\psi + a_2 \\ \frac{A_3 a_4}{A_3 + 1} &= (B_1 B_2 B_3 + 1)\psi + a_3 - a_2 \\ \frac{A_4 a_2}{A_4 + 1} &= (B_1 B_2 B_3 B_4 - 1)\psi + a_4 - a_3 + a_2, \end{aligned} \right.$$

je nachdem sie aus 2, 3, 4 oder 5 Linsen zusammengesetzt

setzt sind, oder da für ein Fernrohr von n Linsen β_n also auch A_{n-1} unendlich ist,

$$\psi = \frac{a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \ldots \pm a_2}{m \pm 1},$$

wo das (+) oder (—) Zeichen gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Die Gleichung, welche die Vernichtung der Randfarben bedingt (25), wird

$$28)\quad a_2 + \frac{a_3}{B_2} + \frac{a_4}{B_2 B_3} \ldots\ldots + \frac{a_n}{B_2 B_3 B_4 \ldots B_{n-1}} = 0,$$

und die sphärische Abweichung ist, wenn man

$$\lambda_n (A_{n-1} + 1)^2 + \nu_n A_{n-1} = S_n$$

setzt, für 2, 3, 4, 5 Linsen:

$$R_2 = \frac{m_2 y_1^3}{4\beta_1^3}\left(\mu_1 \lambda_1 + \frac{\mu_2 \lambda_2}{m_2}\right)$$

$$R_3 = \frac{m_3 y_1^3}{4\beta_1^3}\left(\mu_1 \lambda_1 + \frac{\mu_2 (A_1 + 1) S_2}{A_1^3 B_1} + \frac{\mu_3 \lambda_3}{A_1^3 m_3}\right)$$

$$R_4 = \frac{m_4 y_1^3}{4\beta_1^3}\left(\mu_1 \lambda_1 + \frac{\mu_2 (A_1 + 1) S_2}{A_1^3 B_1} + \frac{\mu_3 (A_2 + 1) S_3}{A_1^3 A_2^3 B_1 B_2} + \frac{\mu_4 \lambda_4}{A_1^3 A_2^3 m_4}\right)$$

$$R_5 = \frac{m_5 y_1^3}{4\beta_1^3}\left(\mu_1 \lambda_1 + \frac{\mu_2 (A_1 + 1) S_2}{A_1^3 B_1} + \frac{\mu_3 (A_2 + 1) S_3}{A_1^3 A_2^3 B_1 B_2} + \frac{\mu_4 (A_3 + 1) S_4}{A_1^3 A_2^3 A_3^3 B_1 B_2 B_3} + \frac{\mu_5 \lambda_5}{A_1^3 A_2^3 A_3^3 m_5}\right).$$

Anwendung auf die Construction der Fernröhre.

Um zu zeigen, wie sich die entwickelten Formeln zur Construction von Fernröhren anwenden lassen, mögen einige der vorzüglichsten dieser Instrumente etwas näher betrachtet werden.

Gallilei'sches Fernrohr mit einer Ocularlinse.

Da die Strahlen der Axe parallel in das Fernrohr fallen, und auch derselben nahe parallel austreten, so ist $b_1 = \beta_2 = \infty$, $\beta_1 = f_1$, $b_2 = f_2$, also

$$m_2 = \frac{f_1}{f_2}, \quad \psi = \frac{a_2}{m_2+1}, \quad \gamma_1 = f_1 + f_2,$$

$$o_2 = \quad \frac{f_2}{{}_2\psi} = (f_1+f_2)\frac{f_2}{f_1} = (m_2+1)\frac{f_2}{m_2}, \quad y_2 = \frac{y_1}{m_2},$$

$$z_2 = \qquad \frac{y_1^2}{p^2} = \tfrac{1}{400} y_1^2,$$

während f_2, und ${}_2$ negativ ist, also das Bild aufrecht erscheint. a_2 negativ, weil z_2 positiv sein mufs. Da s ativ ist, so sollte das Auge sich vor der C a en; man mufs daher, um so viel als mö h ψ bezeichneten Gesichtsfelde zu üb em Glase sehr nahe halten. Da überdies ψ m_2 zunimmt, so wird das Gesichtsfeld um so kleiner, je stärker die Vergröfserung ist.

Als Ausdruck für die Farbenzerstreuung in den Axen hat man wegen $f_1 = m_2 f_2$, $y_1 = m_2 y_2$ aus (24)

$$d\varphi_2 = (m_2\theta' + \theta'')\frac{m_2 y_2}{f_1};$$

es verhält sich dieselbe also, wenn Objektiv und Ocular aus demselben Glase bestehen, und mithin $\theta' = \theta''$ wird, wie die Quadrate der Vergröfserung.

Der Halbmesser der Kugelabweichung endlich ist

$$R_2 = \frac{m_2 y_1^3}{4 f_1^3}\left(\mu_1\lambda_1 + \frac{\mu_2\lambda_2}{m_2}\right)$$

oder für $\theta' = \theta''$

$$R_2 = \frac{m_2 \mu_1 \lambda_1 y_1^3}{4 f_1^3}\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{m_2^3 \mu_1 \lambda_1 y_1^3 (m_2+1)}{4 f_1^3}.$$

Der vom Ocular abhängige Theil der Abweichung ist, wie man aus diesem Ausdrucke ersieht, für starke Vergröfserungen sehr klein gegen den vom Objektiv herrührenden, so dafs man dieselbe meist gar nicht zu berücksichtigen braucht, wenn man ein Doppelobjektiv anwendet. Gans

m indefs die Abweichung nie fortgebracht werden. Bei fachem Objektiv und für $\theta' = \theta''$ wächst R_2 wie m_2^3, n mufs also f_1 und mithin die Länge des Fernrohrs in sem Fall bei stärkeren Vergröfserungen sehr grofs nehn, wenn man ein einigermafsen deutliches Bild haben ll.

Als zweckmäfsig hat man folgende Verbindungen (f_1 d f_2 in Zollen ausgedrückt) gefunden:

f_1	2	5	8	18	30
f_2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	-3
m_2	4	5	6	9	10

Will man nun ein Fernrohr construiren, so kann man der Bestimmungsstücke beliebig wählen, und zwar wird n unter diese den Werth von ψ oder von m_2 oder von - oder von $d\varphi_2$ und R_2 aufnehmen, je nachdem man ein sses Gesichtsfeld (welches für Taschenperspektive besonrs berücksichtigt werden mufs) oder eine starke Vergröserung, oder grofse Helligkeit, oder endlich grofse Deutkeit vorzugsweise bezweckt.

Ist das Objektiv einfach, und von demselben Glase e das Ocular, so betrachtet man am besten, $d\varphi_2$ und R_2 gegeben, und nimmt hierzu zwei andere Stücke, je ch den Anforderungen, denen das Fernrohr genügen soll. mmt man z. B. $n' = n'' = 1{,}55$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 1{,}6298$ d $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}9381$, so erhält man in Minuten

$$R_2 = 1314 \frac{m y_1^3}{f_1^3}(m+1)$$

$$d\varphi_2 = 3438\, m(m+1)\frac{y_1 \theta'}{f_1},$$

d daher, wenn man y_1 eliminirt, und $\theta' = \frac{1}{55}$ annimmt,

$$R_2 = \frac{0{,}0053798\,(d\varphi)^3}{(m+1)}.$$

a $d\varphi$ mit R zugleich abnimmt, und da überdies $d\varphi$ auf steigen darf, so reicht es hin, R klein genug zu nehm. Bestimmt man R auf eine Sekunde, so ergiebt sich

$$d\varphi = 1{,}45779\,(m+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f_1 = 42{,}8796\, y_1 \sqrt[3]{m+1}.$$

Nimmt man noch die Vergröfserung m und die Helligkeit, also y_2 als gegeben an, zu welchem letzten Zweck man y_2, so nahe als möglich an $\frac{1}{20}$ nehmen mufs, so findet man hieraus

$$y_1 = my_2 \text{ und } f_2 = \frac{f_1}{m}, \quad \psi = \frac{3438\, a_2}{m+1}.$$

Soll nun das Gesichtsfeld möglichst grofs werden, so mufs a_2 möglichst grofs genommen werden; jedoch ist hierbei zu berücksichtigen, dafs a_2 nicht gröfser als $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ sein darf, und dafs z_2, d. h. $f_2 a_2 > y_2$, also $a_2 > \frac{y_2}{f_2}$ sein mufs.

Wird z. B. $m = -11$, $y_1 = 0{,}55$, $\varphi = 20$ Min. vorausgesetzt, so wird $d\varphi = 6{,}77$ Min., $f_1 = 50{,}809$, $f_2 = -4{,}619$, $y_2 = 0{,}05$, $\gamma_1 = 46{,}190$, $a_2 = 0{,}058$, $z_2 = 0{,}2679$, $H = 1$.

Ist das Objektiv ein doppeltes, so gelten die obigen Formeln noch, wenn man die Doppellinse durch eine einfache ersetzt denkt, welche die Strahlen ebenso bricht, also mit ihr eine gleiche Oeffnung ($2y_1$), dieselbe Bildgröfse und dasselbe φ_2 hat. — Im Allgemeinen kann man annehmen, dafs die Oeffnung des Objektivs so grofs ist, dafs die Brennweite der substituirten (imaginären) Linse $\frac{1}{2}m$ Zolle beträgt, so dafs man durchschnittlich $f_1 = -\frac{1}{2}m$, mithin $f_2 = -\frac{1}{2}$, und demnach $z_2 = -\frac{1}{2}a_2$, $y_1 = my_2$, $\gamma_1 = f_1 - \frac{1}{2}$, $H = 400 y_2^2$, $\psi = \frac{3438\, a_2}{m+1}$ erhält.

Ist z. B. $m = -9$, $z_2 = \frac{1}{20}$, $y_2 = \frac{1}{50}$, so wird $f = \frac{9}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{10}$, $y_1 = 0{,}18$, $\psi = 42^m{,}97$, $\gamma_1 = 4$, $H = 0{,}16$.

Astronomisches Fernrohr mit zwei Ocularlinsen.

Setzen wir ein Doppelobjektiv voraus, dessen Bild von beiden Abweichungen frei ist, bezeichnen $\frac{a_3}{a_2}$ und $\frac{b_2}{\beta_2}$ beziehlich durch q und A, ersetzen m_3 durch m, und betrachten f_1, m, q, A als gegeben, so erhalten wir, da

$=f_1$, $b_3=f_3$ ist, aus der Gleichung

$$29)\quad f_2^{-1}=b_2^{-1}+\beta_2^{-1},$$

Verbindung mit den Gleichungen (12, 17, 22), d. h. mit

$$m=\frac{f_1\beta_2}{f_3 b_2},\quad \psi=\frac{a_3-a_2}{m-1},\quad f_1+b_2=\frac{f_2 a^2}{\psi},$$

Stücke f_2, f_3, b_2, β_2, wie folgt:

$$30)\quad \begin{cases} f_2=-\dfrac{f_1(q-1)}{B},\quad f_3=\dfrac{f_1}{Am}, \\ b_2=-\dfrac{f_1(q-1)(A+1)}{B},\quad \beta_2=\dfrac{b_2}{B}, \end{cases}$$

welchen Ausdrücken der Kürze wegen B für

$q-m+(q-1)A$ gesetzt ist.

rner findet sich

$$=-\frac{f_1(m-1)}{B},\quad \gamma_2=\frac{q-m+(q-1)[(1-m)A-m]}{mAB}f_1$$

$$x_2=a_2 f_2,\quad x_3=a_3 f_3,\quad o_3=\frac{a_3 f_3}{m\psi}=\frac{a_3 f_1}{m^2 A\psi}.$$

und q können indefs nicht ganz beliebig gewählt wer-
n, da die Bedingungen

$$a_2 f_2>\frac{b_2 y_1}{f_1}\text{ und } a_3 f_3>\frac{b_2 f_3 y_1}{\beta_2 f_1},$$

er in Folge der Gleichung (29), die Bedingungen

$$31)\quad a_2>(1+A)\frac{y_1}{f_1}\text{ und } a_3>\frac{Ay_1}{f_1}$$

üllt sein müssen. Es darf also A nicht sehr grofs sein, a_2 und a_3 nicht gröfser als $\frac{1}{4}$ sein dürfen, und bei einem ppelobjektiv y_1 höchstens gleich $0{,}05 f_1$ sein kann. Ueber-s müssen γ_1 und γ_2, und wo möglich auch o positiv sein.

Bei der noch freistehenden Wahl der Werthe für q d A kann man das Fernrohr noch die eine oder die an-re Bedingung erfüllen lassen.

1) Es werde zuerst das Gesichtsfeld möglichst grofs nommen, welches erreicht wird, wenn $a_3=-a_2$, also $=1$ ist. Die obigen Gleichungen gehen für diesen Fall er in:

$$f_2=\frac{2f_1}{B},\quad f_3=\frac{f_1}{Am},\quad b_2=\frac{2f_1(A+1)}{B},\quad \beta_2=\frac{b_2}{B},$$

$$B = -1 - m - 2A, \quad \gamma_1 = -\frac{m-1}{B} f_1,$$

$$\gamma_2 = -\frac{f_1(m-1)(2A+1)}{Am(1+m+2A)}, \quad o = \frac{(m-1)}{2m^2 A} f_1.$$

Da nun für a_2 oder $a_3 = \frac{1}{4}$ und $y_1 = 0{,}05 f_1$ die dingungen (31) in $A < 4$ und $A < 5$ übergehen, und, w o positiv sein soll, A negativ sein mufs, so mufs A z schen 0 und -4 liegen. Da ferner, damit γ_2 pos werde, insofern Am positiv, und $1 + m + 2A$ und $(m-1$ negativ ist, auch $2A + 1$ negativ werden mufs, so mufs zwischen $-\frac{1}{2}$ und -4 liegen.

Soll aber A negativ werden, so mufs entweder b_2 od β_2 negativ sein. Im ersten Falle fällt kein Bild zwisch die beiden ersten Linsen, sondern nur zwischen die b den letzten (weil sowohl β_2 als f_3 positiv ist); im zweit Falle fällt nur ein Bild zwischen die erste und zweite Lin (weil sowohl f_1 als b_2 positiv ist).

α) Es falle das Bild zwischen die Oculare.

Für starke Vergröfserungen wird

$$32) \quad \gamma_2 = -\frac{2A+1}{Am} f_1, \qquad b_2 = -\frac{2(A+1)}{m} f_1.$$

Da m, A und b_2 negativ und γ_2 positiv ist, so mufs $A >$ sein, also zwischen -1 und -4 liegen.

Für $A = -1$ würde $\gamma_1 = f_1$ werden, das erste Oc lar sich also im gemeinschaftlichen Brennpunkt der beid anderen Linsen sich befinden, es würden also die gerin sten Unreinigkeiten der zweiten Linse sichtbar werden, un daher der Deutlichkeit Eintrag thun.

Die vortheilhafteste Lage des Bildes ist die Mitte zw schen beiden Ocularen. Für diesen Fall wird

$$33) \quad \begin{cases} A = -\dfrac{3m+1}{2(m+1)}, \quad f_2 = -\dfrac{2(m+1)f_1}{m(m-1)}, \\ f_3 = -\dfrac{2(m+1)f_1}{m(3m+1)}, \quad \gamma_1 = \dfrac{(m+1)f_1}{m}, \\ \gamma_2 = -\dfrac{4(m+1)f_1}{m(3m+1)} = 2f_3, \quad b_2 = \dfrac{f_1}{m}, \quad \beta_2 = f_1 \end{cases}$$

Für $A = -1,6$ wird

$$f_2 = -\frac{10 f_1}{5m-11}, \quad f_3 = -\frac{5 f_1}{8m}, \quad b_2 = \frac{6 f_1}{5m-11},$$

$$= -\frac{3,75 f_1}{5m-11}, \quad \gamma_1 = \frac{5(m-1) f_1}{5m-11}, \quad \gamma_2 = -\frac{55(m-1) f_1}{8m(5m-11)},$$

o, wenn man z. B. $f_1 = 60$, $m = -30$, $\varkappa_2 = 0,93$ annmt, $f_2 = 3,727$, $f_3 = 1,250$, $\gamma_1 = 57,76$, $\gamma_2 = 2,647$, $= -a_3 = \frac{1}{4}$, $\varkappa_3 = 0,312$, $\psi = 55,4$ Min und $o = 0,64$.

Diese Werthe stimmen sehr nahe mit denen der Dolnd'schen und Fraunhofer'schen Fernröhre dieser Art erein.

Nimmt man $A = -1,6$, $f_1 = 25$, $m = -10$, $\varkappa_2 = 5$, so findet sich $f_2 = 4,098$, $f_3 = 1,562$, $\gamma_1 = 22,541$, $= 3,099$, $a_2 = -a_3 = 0,286$, $\varkappa_3 = 0,447$, $\psi = 178,8$ n., $o = 0,86$, welche Einrichtung, was die Verhältnisse n f_2, f_3, γ_2, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ betrifft, sehr nahe mit Fraunhor's Kometensuchern übereinstimmt.

Ist m sehr grofs, so dafs nahe

$$f_2 = -\frac{2 f_1}{m}, \quad f_3 = -\frac{2 f_1}{3m}, \quad \gamma_2 = -\frac{4 f_1}{3m}, \quad \gamma_2 = -\frac{4 f_1}{3m}$$

rd, so pafst dasselbe Ocular für alle Fernröhre, in den das Verhältnifs $f_1 : m$ dasselbe ist.

b) Es falle das Bild zwischen Objektiv und erstes cular.

Da m und A in diesem Fall negativ, und γ_2 und b_2 sitiv sind, so folgt aus den Gleichungen (32) für stärre Vergröfserungen

$$A > -\tfrac{1}{2} \text{ und } A < -1.$$

näher A an -1 liegt, desto kleiner wird b_2, und desto her tritt das Bild an die zweite Linse.

Für $A = -\frac{10}{11}$ wird, wenn man der Kürze wegen $\frac{f_1}{-11m} = c$ setzt,

$$b_2 = 2c, \quad \beta_2 = 4c, \quad f_2 = 22c, \quad f_3 = -1,1\frac{f_1}{m},$$

$$\gamma_1 = -11(m-1)c, \quad \gamma_2 = 9,9\frac{(m-1)}{m}c,$$

also wenn man z. B. $m = -30$, $f_1 = -60$, $x' = 0{,}9735$ setzt, $b_2 = 0{,}354$, $\beta_2 = -0{,}389$, $f_2 = 3{,}894$, $f_3 = 2{,}2$, $\gamma_1 = 60{,}36$, $\gamma_2 = 1{,}811$, $a_2 = -a_3 = \frac{1}{4}$, $x_3 = 0{,}55$, $\psi =$ 55,45 Min.

Für $A = -\frac{10}{13}$ wird, wenn man $\frac{f_1}{0{,}7 - 1{,}3m} = c$ setzt,

$$b_2 = 0{,}6c,\quad f_2 = 2{,}6c,\quad f_3 = -\frac{1{,}3 f_1}{m},$$

$$\gamma_1 = -1{,}3(m-1)c,\quad \gamma_2 = 0{,}91\frac{(m-1)}{m}c,$$

also z. B. für $m = -100$, $f_1 = 60$, $x_2 = 0{,}298$:

$b_2 = 0{,}275$, $f_2 = 1{,}193$, $f_3 = 0{,}780$, $\gamma_1 = 60{,}28$, $\gamma_2 = 0{,}422$, $a_2 = -a_3 = \frac{1}{4}$, $x_3 = 0{,}195$, $\psi = 17{,}02$ Min.

Beide Voraussetzungen stimmen sehr nahe mit Fraunhofer's Mittagsfernröhren und Meridiankreisen.

Je kleiner übrigens b_2 wird, desto größer wird γ_1 und desto näher $= \frac{1}{2}f_2$

2) Will man überdies noch auf den durch die Oculare erzeugten farbigen Rand Rücksicht nehmen, so muſs man noch die Gleichung (25)

$$a_2 + \frac{a_3 f_3}{\beta_2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{f_3}{\beta_2} = -\frac{1}{q}$$

hinzuziehen. Setzt man hierin die Werthe von f_3 und β_2 aus (33), so erhält man

$$\frac{1}{q} = \frac{B}{m(q-1)(A+1)},$$

also

$$A = \frac{2mq - q^2 - m}{(q-1)(q-m)},$$

und somit wird, wenn man den Zähler dieses Ausdrucks durch c, den Nenner durch d bezeichnet,

$$f_2 = -\frac{df_1}{m(m-1)},\quad f_3 = \frac{df_1}{mc},\quad b_2 = -\frac{qf_1}{m},\quad \beta_2 = -\frac{dqf_1}{mc},$$

$$\gamma_1 = f + b_2 = -\frac{q-m}{m}f_1,\quad \gamma_2 = \beta_2 + f_3 = -\frac{(q-1)df_1}{mc},$$

also auch $\beta_2 = -qf_3$, $\gamma_2 = -(q-1)f_3$.

Soll nun das Bild zwischen die Oculare fallen, so mufs, da f_1 positiv ist und m und b_2 negativ sind, q negativ sein. Da ferner, für grofse m, $\beta_2 = -\frac{q(q-1)f_1}{m(1-2q)}$ ist, und zugleich positiv sein soll, so mufs q zwischen 0 und $-\infty$ liegen. Ist aber $a_2 > a_3$, so darf q nie gröfser als -1 sein, und will man ein möglichst grofses Gesichtsfeld haben, so mufs man $q = -1$ nehmen, für welchen Fall man genau wieder die Gleichungen (33) erhält.

Für $m = -100$, $f_1 = 70$, $x_2 = 0{,}3$ würde man z. B. $f_2 = 1{,}372$, $f_3 = 0{,}463$, $\gamma_1 = 69{,}3$, $\gamma_2 = 0{,}927$, $a_2 = -a_3 = 0{,}219$, $x_3 = 0{,}101$, $\psi = 14{,}91$ Min erhalten.

Wollte man dagegen das Bild zwischen Objektiv und erstes Ocular fallen lassen, um das Instrument zu mikrometrischen Messungen zu gebrauchen, so würde das Gesichtsfeld so klein werden, dafs man es vorziehen mufs, die ohnehin geringen Randfarben sich gefallen zu lassen.

Terrestrisches Fernrohr mit 4 Ocularlinsen.

Für diesen Fall hat man aufser der Gleichung

$$34)\quad m = B_1 B_2 B_3 B_4$$

die 4 Gleichungen (27), von denen die letzte wegen $\beta_5 = \infty$ in

$$35)\quad \psi = \frac{a_5 - a_4 + a_3 - a_2}{m-1}$$

übergeht, und die Randfarbengleichung (28).

Die Gröfsen B_1, B_2, B_3, B_4 bleiben willkührlich, und man erhält verschiedene Einrichtungen, je nachdem man denselben verschiedene Werthe beilegt.

1) Es mögen zwei Bilder vorausgesetzt werden, von denen das eine zwischen die 2te und 3te, das zweite zwischen die 3te und 4te Linse falle.

Alsdann ist mit b_2 und β_4 zugleich B_1 und B_4 negativ, und wenn man, um ein grofses Gesichtsfeld zu erhalten, $a_2 = na_4$, $a_3 = 0$ und $a_4 = -a_5$, und z. B. $n = \frac{2}{\sqrt{m}}$

annimmt, so ergiebt sich

$$\psi = \frac{2a_5}{m + \sqrt{m}},$$

aus der zweiten und dritten der Gleichungen (27)

$$\frac{(B_1 B_2 - 1)}{m + \sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 0, \quad \frac{2}{\sqrt{m}} - \frac{1}{B_2 B_3} + \frac{1}{B_2 B_3 B_4} = 0,$$

welche in Verbindung mit (34) liefern:

$B_1 B_2 = -\sqrt{m}$, $B_2 B_3 = -\sqrt{m}$ und $(2B_2 - 1)B_3 = \sqrt{m}$.

Da nun zwischen die 4te und 5te Linse kein Bild fallen, also β_4 negativ sein soll und $\gamma_4 = \beta_4 + b_5$ positiv ist, so mufs $b_5 > \beta_4$, also $B_4 < 1$ sein, mithin $B_3 > \sqrt{m}$ und $2B_2 - 1 < 1$, d. h. $B_2 < 1$ werden.

Da ferner B_3 positiv ist, so mufs $2B_2 > 1$ sein, also B_2 zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen. Da überdies $B_1 B_2 = -\sqrt{m}$ ist, so mufs B_1 zwischen $\sqrt{m}$ und $2\sqrt{m}$ liegen. Der Mittelwerth von B_1 ist also $-\frac{3}{2}\sqrt{m}$, und der von B_2, $\frac{3}{4}$.

a) Es sei $B_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{m}$, also

$$B_2 = \frac{2}{3}, \; B_3 = 3\sqrt{m} \text{ und } B_4 = -\frac{1}{3}.$$

Es folgt für diesen Fall aus (27)

$$\frac{A_1}{A_1 + 1} = \frac{(2 - 3\sqrt{m})\sqrt{m}}{2(m + \sqrt{m})}, \quad \frac{A_3}{A_3 + 1} = \frac{2(1 + 3\sqrt{m})}{1 + \sqrt{m}},$$

also

$$A_1 = \frac{2 - 3\sqrt{m}}{5\sqrt{m}}, \quad A_3 = -\frac{2(1 + 3\sqrt{m})}{1 + 5\sqrt{m}}$$

und A_2 bleibt unbestimmt.

Setzt man abkürzend $\sqrt{m} + 1 = \mu$, $3\sqrt{m} + 1 = \mu_1$, $3\sqrt{m} - 2 = \mu_2$, $5\sqrt{m} + 1 = \mu_3$, so ergiebt sich hieraus:

$$b_2 = -\frac{2\beta_1}{3\sqrt{m}}, \quad \beta_2 = \frac{2\mu_2\beta_1}{15m}, \quad b_3 = \frac{\mu_2\beta_1}{5m}, \quad \beta_3 = \frac{\mu_2 A_2 \beta_1}{5m},$$

$$b_4 = \frac{\mu_2 A_2 \beta_1}{15m\sqrt{m}}, \quad \beta_4 = -\frac{2\mu_1\mu_2 A_2 \beta_1}{15\mu_3 m\sqrt{m}},$$

$$f_2 = \frac{\mu_2\beta_1}{3\mu\sqrt{m}}, \quad f_3 = \frac{\mu_2 A_2 \beta_1}{5m(A_2 + 1)},$$

$$f_4 = \frac{2\mu_1\mu_2 A_2 \beta_1}{15\mu m\sqrt{m}}, \quad f_5 = \frac{2\mu_1\mu_2 A_2 \beta_1}{5\mu_3 m\sqrt{m}},$$

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{m}}\right)\beta_1, \quad \gamma_2 = \frac{\mu_2\beta_1}{3m},$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_1 \mu_2 A_2 \beta_1}{15 m \sqrt{m}}, \qquad \gamma_4 = \frac{4 \mu_1 \mu_2 A_2 \beta_1}{15 \mu_3 m \sqrt{m}},$$

$$o = \frac{\mu \mu_1 \mu_2 A_2 \beta_1}{5 \mu_3 m^2}, \text{ und für } a_5 = \tfrac{1}{4}, \quad \psi = \frac{1719}{m + \sqrt{m}} \text{ Min.},$$

$$x_2 = \frac{2 a_5 f_2}{\sqrt{m}} \qquad y_2 = \frac{2 y_1}{3 \sqrt{m}},$$

und, wenn man die Oeffnungshalbmesser der zweiten Linse der Summe des Oeffnungshalbmessers des Gesichtsfeldes und des Halbmessers der Helligkeit gleich nimmt, um die Helligkeit im ganzen Gesichtsfelde gleich grofs zu erhalten, so hat man für denselben, $y_1 = \frac{1}{50} m$ nehmend,

$$y_2 + x_2 = \frac{2 a_5 f_2}{\sqrt{m}} + \frac{\sqrt{m}}{75}.$$

Die dritte Linse, für welche

$$y_3 = \frac{b_2 b_3 y_1}{\beta_1 \beta_2} = \frac{y_1}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}}{50}$$

ist, braucht nur klein zu sein, da der Hauptstrahl durch ihre Mitte geht, und wegen $a_3 = 0$ das Gesichtsfeld von ihrer Oeffnung unabhängig ist. Die 4te und 5te Linse nimmt man am besten gleichseitig, um möglichst grofse Oeffnungen anbringen zu können.

Für grofse Werthe von m wird die Länge des Fernrohrs:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{m}} + \frac{3 A_2}{5 \sqrt{m}}\right) \beta_1,$$

und $f_2 = \frac{\beta_1}{m}$, $f_3 = \frac{3 A_2 \beta_1}{5 (A_2 + 1) \sqrt{m}}$, $f_4 = \frac{6 A_2 \beta_1}{5 m}$,

$$f_5 = \frac{18 A_2 \beta_1}{25 m}.$$

b) Es sei $B_2 = \frac{3}{4}$, also

$$B_1 = -\tfrac{4}{3} \sqrt{m}, \quad B_3 = 2 \sqrt{m}, \quad B_4 = -\tfrac{1}{2},$$

und wenn man kürzend $\sqrt{m} + 1 = \nu$, $3 \sqrt{m} + 1 = \nu_1$, $2 \sqrt{m} + 1 = \nu_2$, $4 \sqrt{m} - 3 = \nu_3$ setzt,

$$b_2 = -\frac{3 \beta_1}{4 \sqrt{m}}, \quad \beta_2 = \frac{3 \nu_3 \beta_1}{28 m}, \quad b_3 = \frac{\nu_3 \beta_1}{7 m}, \quad \beta_3 = \frac{\nu_3 A_2 \beta_1}{7 m},$$

$$b_4 = \frac{\nu_3 A_2 \beta_1}{14 m \sqrt{m}}, \qquad \beta_4 = -\frac{\nu_2 \nu_3 A_2 \beta_1}{2 \nu_1 m \sqrt{m}}, \qquad f_2 = \frac{\nu_3 \beta_1}{4 \nu \sqrt{m}},$$

$$f_3=\frac{\nu_3 A_2\beta_1}{7m(A_2+1)},\quad f_4=\frac{\nu_2\nu_3 A_2\beta_1}{7m\nu\sqrt{m}},\quad f_5=\frac{2\nu_2\nu_3 A_2\beta_1}{7\nu_1 m\sqrt{m}},$$

$$\gamma_1=\frac{\nu_3\beta_1}{4\sqrt{m}},\quad \gamma_2=\frac{\nu_3\beta_1}{4m},\quad \gamma_3=\frac{\nu_2\nu_3 A_2\beta_1}{14\sqrt{m}},\quad \gamma_4=\frac{\nu_2\nu_3 A_2\beta_1}{7\nu_1 m\sqrt{m}},$$

$$o=\frac{\nu_2\nu_3 A_2\beta_1}{7\nu_1 m^2},\quad \psi=\frac{1718}{m+\sqrt{m}},\quad x_2=\frac{2a_5 f_2}{\sqrt{m}},$$

$$y_2=\frac{3y_1}{4\sqrt{m}},\quad y_2=\frac{x}{\sqrt{m}},$$

und für ein grofses m wird die Länge des Fernrohrs:

$$\left(1+\frac{1}{4\sqrt{m}}+\frac{4A_2}{7\sqrt{m}}+\frac{22A_2}{22m}\right)\beta_1,$$

$$f_2=\frac{\beta_1}{\sqrt{m}},\quad f_2=\frac{4A_2\beta_1}{7(A_2+1)\sqrt{m}},\quad f_3=\frac{8A_2\beta_1}{7m},$$

$$f_4=\frac{16A_2\beta_1}{21m},\quad o=\frac{8A_2}{7m}.$$

Nimmt man z. B. $\beta_1=48$, $f_5=2$, $m=36$, so wird $A_2=2{,}2$, mithin: $f_2=6$, $f_3=2{,}75$, $f_4=2{,}71$, $b_2=-6$, $\beta_2=3$, $b_3=4$, $\beta_3=8{,}77$, $b_4=0{,}75$, $\beta_4=-1$, $\gamma_1=42$, $\gamma_2=7$, $\gamma_3=9{,}5$, $\gamma_4=1$, also die Länge 60,67 und $\psi=$ 41 Min., und für $\omega_5=\frac{1}{4}$: $x_2=0{,}5$, $y_2=0{,}09$; der wahre Oeffnungs-Halbmesser der zweiten Linse endlich wird

$$x_2+y_2=0{,}59,\quad \text{und}\quad y_3=0{,}12.$$

Substituirt man die Werthe von B_1, B_2, B_3, B_4 aus (*a*) oder (*b*) in die Gleichung (24), welche die Farbenzerstreuung in der Axe ausdrückt, so findet man das Glied, welches von der dritten Linse abhängt, am beträchtlichsten, so dafs man namentlich bei einfachen Objektiven auf diese Linse ganz besonders Rücksicht nehmen mufs.

2) Von den zwei wahren Bildern möge das eine zwischen die zweite und dritte, das andere zwischen die vierte und fünfte Linse fallen (d. h. es mögen B_1 und B_3 negativ, und B_2 und B_4 positiv sein).

Die Linsendistanzen sind für diesen Fall:

$$\gamma_1=\left(1+\frac{1}{B_1}\right)\beta_1,\quad \gamma_2=\left(1+\frac{1}{B_2}\right)\frac{A_1\beta_1}{B_1},$$

$$\gamma_3=\left(1+\frac{1}{B_3}\right)\frac{A_1A_2\beta_1}{B_1B_2},\quad \gamma_4=\left(1+\frac{1}{B_4}\right)\frac{A_1A_2A_3\beta_1}{B_1B_2B_3}.$$

Da diese Distanzen positiv sein müssen, so folgt aus der ersten Gleichung, dafs das negative $B_1 > 1$, aus der zweiten, dafs A_1 negativ, aus der dritten, dafs $\left(1+\frac{1}{B_3}\right)A_2$ positiv, und aus der vierten, dafs $A_2 A_3$ negativ sein mufs.

Ist wie oben $a_2 = n a_5$, $a_3 = 0$, $a_4 = -a_5$, so wird, wenn man

$$36)\quad \frac{2-n}{m-1} = q$$

setzt, $\psi = q a_5$, und die drei ersten Gleichungen (27) werden:

$$\frac{A_1 n}{A_1+1} = (B_1+1)q, \quad 0 = (B_1 B_2 - 1)q + n,$$

$$\frac{A_3}{A_3+1} = n - (B_1 B_2 B_3 + 1)q,$$

von denen die beiden ersten

$$A_1 = -\frac{1+B_1}{B_1(1+B_2)},$$

und die beiden letzten

$$\frac{A_3}{A_3+1} = -B_1 B_2 (1+B_3) q$$

liefern.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt, dafs, wenn das negative $B_3 > 1$ ist, die linke Seite, also auch A_3 negativ, und daher (weil $A_2 A_3$ negativ ist) A_2 positiv sein mufs; dagegen A_2 negativ und A_3 positiv, im Fall $B_3 < 1$ ist.

Aus der Verbindung der Farbengleichung

$$0 = n - \frac{1}{B_2 B_3} + \frac{1}{B_2 B_3 B_4}$$

mit der Gleichung $n = (1 - B_1 B_2) q$ erhält man überdies

$$B_3 = \frac{B_4 - 1}{B_2 B_4 (1 - B_1 B_2) q},$$

woraus folgt, dafs $B_4 < 1$ sein mufs, und diese letzte Gleichung mit $m = B_1 B_2 B_3 B_4$ verbunden giebt wiederum

$$B_4 = 1 - \frac{m}{B_1}(B_2 B_3 - 1) q,$$

woraus noch $m(B_1 B_2 - 1) q < B_1$ hervorgeht.

I [illegible] dingungen, welche die Quotienten A und B zu erfüllen [illegible] en, sind demnach, daſs A_2, B_2, B_4 positiv, A_1, A [illegible] B_3 negativ, daſs B_1 und B_3 gröſser als Eins, und [illegible] ner als Eins sein müssen.

[illegible] as Gesichtsfeld betrifft, so findet sich aus dem vorаus[illegible] ten Werth von q (36), und aus

$$n = (1 - B_1 B_2) q:$$

$$n = \frac{2(1 - B_1 B_2)}{m - B_1 B_2} \text{ und } q = \frac{2}{m - B_1 B_2},$$

also [illegible] $\frac{2 a_5}{\ldots - B_1 B_2}$.

Nimmt man [illegible] weise $B_1 B_2 = -\sqrt{m}$, so wird

$$n: [illegible] = \frac{2 a_5}{m + \sqrt{m}},$$

und we[illegible] $4\sqrt{m}$, also $B_2 = \frac{1}{4}$ setzt, $B_4 = \frac{1}{4}$, [illegible] aus den Gleichungen (27) folgt

$$A_1 = -\frac{4\sqrt{m} - 1}{5\sqrt{m}}, \qquad A_3 = -\frac{2(\sqrt{m} - 1)}{5\sqrt{m} - 1},$$

während A_2 unbestimmt bleibt, jedoch positiv zu nehmen ist, da $B_3 > 1$ war. Setzt man nun abkürzend:

$$\sqrt{m} + 1 = \mu, \qquad 2\sqrt{m} - 1 = \mu_1,$$
$$4\sqrt{m} - 1 = \mu_2, \qquad 5\sqrt{m} - 1 = \mu_3,$$

so wird

$$f_2 = \frac{\mu_2 \beta_1}{4 \mu \sqrt{m}}, \quad f_3 = \frac{\mu_2 A_2 \beta_1}{5 m (A_2 + 1)}, \quad f_4 = \frac{\mu_1 \mu_2 A_2 \beta_1}{5 \mu m \sqrt{m}},$$

$$f_5 = \frac{2 \mu_1 \mu_2 A_2 \beta_1}{5 \mu_3 m \sqrt{m}}, \qquad \gamma_1 = \frac{\mu_3 \beta_1}{4\sqrt{m}} \qquad \gamma_2 = \frac{\mu_3 \beta_1}{4 m},$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_1 \mu_2 A_2 \beta_1}{10 m \sqrt{m}}, \qquad \gamma_4 = \frac{3 \mu_1 \mu_2 A_2 \beta_1}{5 \mu_3 m \sqrt{m}}.$$

3) Von den zwei Bildern möge das eine zwischen die erste und zweite, das andere zwischen die vierte und fünfte fallen, so daſs B_1 und B_4 positiv, B_2 und B_3 negativ sind.

Sei $a_2 = -a_4 = a_5 = \frac{1}{4}$, $a_3 = 0$, so daſs die Gleichungen (27) werden

$$37)\quad \frac{A_1}{A_1+1}=\frac{B_1+1}{m-1},\quad 0=\frac{B_1B_2-1}{m-1}+1,$$
$$\frac{A_3}{A_3+1}=1-\frac{B_1B_2B_3+1}{m-1},$$

und die Farbengleichung ist:

$$0=B_2B_3B_4-B_4+1.$$

Nimmt man z. B. $B_1=cm$, so zieht man aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen in Verbindung mit $m=B_1B_2B_3B_4$:

$$B_2=\frac{2-m}{cm},\qquad B_3=\frac{cm}{(c+1)(2-m)},\qquad B_4=\frac{c+1}{c}.$$

Ist daher c positiv, so mufs B_2 und B_3 kleiner als 1, mithin auch (weil $\gamma_2=\beta_2+b_3$ und $\gamma_3=\beta_3+b_4$ positiv sein müssen) b_3 und b_4 positiv und β_2 und β_3 negativ sein. Ferner erhält man aus der ersten und dritten Gleichung (37),

$$A_1=\frac{cm+1}{(1-c)m-2},\qquad A_3=\frac{m-2c-2}{c(m+1)+1},$$

und wenn man abkürzend $(1-c)m-2=s$, $m-2c-2=t$, $c(m+1)+1=u$ setzt,

$$f_2=\frac{cm+1}{cm(m-1)}\beta_1,\qquad f_3=-\frac{A_2}{A_2+1}\cdot\frac{(cm+1)}{(m-2)s}\beta_1,$$
$$f_4=\frac{A_2t(cm+1)}{cm(m-1)s}\beta_1,\qquad f_5=\frac{A_2t(cm+1)}{us}\beta_1,$$
$$\gamma_1=\frac{1+cm}{cm}\beta_1,\qquad \gamma_2=\frac{1+cm}{cm(m-2)}\beta_1,$$
$$\gamma_3=\frac{A_2t(cm+1)}{cm(m-2)s}\beta_1,\qquad \gamma_4=\frac{A_2(2c+1)(cm+1)t\beta_1}{cmsu}.$$

Ist z. B. $c=\frac{6}{5}$, $A_2=\frac{11}{10}$, also $\frac{A_2}{A_2+1}=11$, und $\beta_1=42$, $m=70$, so wird:

$$f_2=0{,}616,\quad f_3=36{,}091,\quad f_4=2{,}778,\quad f_5=2{,}668$$
$$\gamma_1=42{,}500,\quad \gamma_2=0{,}625,\quad \gamma_3=2{,}819,\quad \gamma_4=7{,}560.$$

Nimmt man dagegen $a_2=0{,}8a_5$, $a_3=0{,}3a_5$, $a_4=-a_5$, und $B_2=-0{,}3$ und $B_3=-5$, wie es sich in mehreren Fraunhofer'schen Fernröhren findet, so ergiebt sich aus der Farbengleichung

$$0 = a_2 + \frac{a_3}{B_2} + \frac{a_4}{B_2 B_3} + \frac{a_5}{B_2 B_3 B_4},$$

$B_4 = 0{,}7692$, und wenn man dafür, da es hier auf Sch nicht ankommt, $\frac{1}{2}$ setzt, aus $m = B_1 B_2 B_3 B_4$, $B_1 =$ also:

$$\psi = \frac{15 a_1}{10(m-1)}, \qquad A_1 = -\frac{5(4m+3)}{12m+23},$$

$$A_2 = \frac{2m-23}{m+20}, \qquad A_3 = -\frac{5m+4}{7m+2},$$

und somit

$$f_2 = \frac{15(4m+3)}{32m(m-1)}\beta_1, \qquad f_3 = \frac{80(2m-23)}{9(12m+23)}f_2,$$

$$f_4 = \frac{3(5m+4)}{10(m+20)}f_3, \qquad f_5 = \frac{4(m-1)}{7m+2}f_4,$$

$$\gamma_1 = \frac{4m+3}{4m}\beta_1, \qquad \gamma_2 = \frac{35\gamma_1}{12m+23},$$

$$\gamma_3 = \frac{8(2m-23)}{7(m+20)}\gamma_2, \qquad \gamma_4 = \frac{3(5m+4)}{4(7m+2)}\gamma_3.$$

Die Abmessungen an einigen Fraunhofer'schen strumenten gaben:

m	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	γ_2	γ_3	γ_4	$\frac{f_2}{f_3}$	$\frac{f_2}{f_4}$	$\frac{f_2}{f_5}$	$\frac{\gamma_2}{\gamma_3}$
70	44,428	1,22	1,49	1,70	0,94	1,81	2,79	1,43	0,82	0,71	1,30	0,65
66	58,614	1,71	2.09	2,38	1,31	2,55	3,92	2,01	0,82	0,72	1,30	0.65
60	56,562	1,82	2,23	2,55	1,40	2,72	4,19	2,15	0,82	0,71	1,30	0,65
42	31,150	1,45	1,78	2,02	1,11	2,16	3,32	1,71	0,82	0,71	1,30	0,65
26	20,217	1,56	1,91	2,18	1,20	2,33	3,58	1,84	0,82	0,71	1,30	0,65

Die obigen Ausdrücke liefern z. B. für $m = 70$,

$$\frac{f_2}{f_3} = 0{,}83, \quad \frac{f_2}{f_4} = 0{,}50, \quad \frac{f_2}{f_5} = 1{,}25,$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_3} = 0{,}67, \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_4} = 1{,}25,$$

also sehr nahe die aus den Fraunhofer'schen Instrumenten sich ergebenden Werthe.

Spiegelteleskope.

Für katoptrische Fernröhre bleiben die Rechnungen ganz dieselben. Da nämlich das Gesetz der Refraction $\sin\alpha = n \sin\alpha'$ in das Gesetz der Reflexion übergeht, sobald man $n = -1$ setzt, so erhält man den Gang, welchen die Strahlen nach irgend einer Anzahl Reflexionen an sphärischen Spiegeln annehmen, aus den Formeln, welche den Gang derselben nach ebensovielen Brechungen durch sphärische Flächen darstellen, sobald man nur n durch -1 ersetzt. Es bleiben daher auch für Spiegelteleskope die Formeln p. 394 etc. noch gültig, namentlich die Ausdrücke für die Oeffnungshalbmesser, für die Linsendistanzen und Vergröſserungen. Man hat nur, da das Objektiv ein Hohlspiegel ist, f_1, und im Fall eines zweiten Hohlspiegels auch f_2 negativ zu nehmen. Da die Farbenzerstreuung bei der Reflexion wegfällt, so wird für den Fall eines einzigen Spiegels in (24 u. 25) $\theta' = 0$, und für den Fall zweier Spiegel $\theta' = \theta'' = 0$ zu nehmen sein.

Bei dem Newton'schen Fernrohr, in welchem das Spiegelbild von einem kleinen Planspiegel zurückgeworfen, und mittelst einer Convexlinse betrachtet wird, ist wenig zu berechnen, indem nur das Verhältniſs der Brennweite des Spiegels zu seiner Oeffnung so zu wählen ist, daſs die Aberration möglichst gering werde, und indem man dem Ocular diejenigen Krümmungen giebt, welche die Abweichungen am meisten beschränkt. Die Vergröſserung ist wiederum $\frac{f_1}{f_2}$, das Gesichtsfeld $\frac{a_2}{m+1}$, und die Entfernung des Auges vom Ocular $\frac{a_2 f_2}{m\psi}$.

Das Herschel'sche Fernrohr unterscheidet sich von dem Newton'schen Hinsichts der Bestimmungsstücke gar nicht, nur daſs die Länge desselben (da sie der Summe beider Brennweiten gleich wird) um ein Geringes gröſser ist.

Gregory's Fernrohr verhält sich wie ein dioptrisches Fernrohr mit 3 Ocularlinsen, von denen die erste von dem kleinen Concavspiegel vertreten wird.

Man hat daher, wenn man die erste Linse in die Oeffnung des ersten Spiegels setzt,

1) $m = B_1 B_2 B_3$, 2) $a_2 f_2 = (\beta_1 + b_2)\psi$,

$$3)\ a_3 f_3 = \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{b_2} - b_3\right)\psi + b_3 a_2,$$

4) $a_4 - a_3 + a_2 = (m+1)\psi$, 5) $a_3 + \frac{a_4 b_4}{\beta_3} = 0$.

$$6)\ \beta_1 + b_2 = \beta_2 + b_3.$$

Nimmt man, um ein grofses Gesichtsfeld zu bekommen, $a_4 = -a_3 = -a$ und $a_2 = na$, und nimmt man B_1 negativ, so dafs das zweite Bild zwischen die beiden Oculare fällt, damit der Randfarbengleichung genug geschehen kann, so hat man $B_3 = 1$, und aus der ersten, vierten und fünften Gleichung wird:

$$m = B_1 B_2,\quad (2-n)a = (m-1)\psi,\quad \beta_3 = b_4 = f_4,$$

während $\beta_1 = f_1$ und daher $b_2 = \frac{f_1}{B_1}$ ist.

Diese Gleichungen reichen hin, um alle Bestimmungsstücke in m, a, f_1, B_1 auszudrücken. Man findet nämlich aus (6)

$$\beta_2 = \frac{(B_1+1)m}{B_1(m-B_1)} f_1,$$

welches in $f_2^{-1} = \beta_2^{-1} + b_2^{-1}$ substituirt giebt:

$$f_2 = \frac{(B_1+1)mf_1}{mB_1(B_1+2) - B_1^2};$$

ferner ist $b_3 = -\frac{B_1 \beta_2}{m} = -\frac{B_1+1}{m-B_1} f_1$.

Die letzten beiden Werthe in (2 u. 4) substituirt geben

$$n = \frac{2m(B_1+2) - 2B_1}{m(m+1) + (m-1)B_1},$$

und hierzu liefert die Gleichung (3)

$$f_3 = \frac{2(m-1)(B_1+1)}{m(m+1) + (m-1)B_1} f_1,$$

während hieraus und aus $f_3^{-1} = b_3^{-1} + \beta_3^{-1}$ folgt

$$\beta_3 = \frac{2(m-1)(B_1+1)}{m(3m-1)-(m-1)B} f_1.$$

Der Ort des Auges ist (19)

$$o = \frac{a_4 f_4}{m\psi} = \frac{m(m+1)-(m-1)B_1}{2m} f_4,$$

oder für grofse Werthe von m nahe $\frac{m+B_1}{2m} f_4$.

Damit die Hauptstrahlen vom Rande des Gesichtsfeldes noch in hinreichender Anzahl ins Auge gelangen, mufs die wahre Oeffnung des kleinen Spiegels bedeutend gröfser, als seine Oeffnung wegen des Gesichtsfeldes sein. Die Hälfte der letzteren ist naf_2, und die Hälfte der wahren Oeffnung, wenn man sie der Oeffnung im grofsen Spiegel gleich macht, af_3; es mufs also nf_2 bedeutend kleiner als f_3 sein, während nf_2 für grofse Werthe von m nahe $\frac{f_3}{B_1}$ ist.

Nimmt man die Oeffnung so grofs, dafs sämmtliche Strahlen, welche der Axe parallel auf den grofsen Spiegel fallen, aufgenommen werden, so mufs dieselbe $\frac{y_1}{B_1}$ sein. welches B_1 ungefähr gleich 5 giebt. Um also noch möglichst viel Randstrahlen aufzunehmen, wird man 6 oder 7 für B_1 setzen können. Nimmt man ferner $a=\frac{1}{4}$, so wird die halbe Oeffnung in dem grofsen Spiegel (also auch des ersten Oculars) $\frac{1}{4}f_3$, folglich darf f_3 nicht gröfser als der doppelte Durchmesser des Loches im grofsen Spiegel sein.

Was die sphärische Abweichung betrifft, so hat darauf der grofse Spiegel den gröfsten Einflufs, welchem durch die Gröfse seiner Brennweite und seiner Oeffnung vorgebeugt werden mufs.

Das Cassegrain'sche Fernrohr unterscheidet sich von dem vorigen nur durch die Convexität des kleinen Spiegels. Es läfst sich daher ganz ebenso berechnen; es wird nur a_2 und a_3 negativ und das Bild wird verkehrt. Wollte man das Bild des convexen Spiegels vor den grofsen Spiegel fallen lassen, so würde wegen

$$(m-1)\psi = a_3 - a_2$$

das Gesichtsfeld ungemein klein werden.

Das Gesichtsfeld würde bei weitem vergröfsert und der farbige Rand fortgeschafft werden können, wenn man noch zwei Ocalargläser dergestalt hinzufügte, dafs zwischen die erste und zweite Linse und zwischen die zweite und dritte ein Bild fiele. Es würde alsdann zu einem dem terrestrischen Fernrohr ähnlichen Teleskop und zeigte auch wie dieses die Gegenstände aufrecht.

Einfache Mikroskope.

Die Formeln, welche für Fernröhre entwickelt sind, gelten auch für Mikroskope, nur dafs das halbe Gesichtsfeld, wie p. 348 bemerkt wurde, nicht mehr ψ, sondern $b_1\psi$ ist, und dafs die Vergröfserung nicht mehr m, sondern $\frac{ml}{b_1}$ ist, wo l die Sehweite bedeutet, so dafs man, wenn die Vergröfserung durch m' bezeichnet wird, das m der Formeln durch $\frac{m'b_1}{l}$ ersetzen mufs.

1) Aus einer einzigen Linse bestehende Mikroskope.

Ist AB (Fig. 100) eine Linse, C deren Mittelpunkt und EF deren Axe, so mufs ein Objekt DE, wenn es durch die Linse hindurch deutlich gesehen werden soll, eine solche Lage haben, dafs die von den Punkten zwischen E und und D ausgehenden Strahlen nahe parallel die Linse verlassen; es mufs also DE nahe im Brennpunkt stehen. Einem in C befindlichen Auge wird daher das Objekt unter dem Winkel $DCE = \psi$ erscheinen. Ist nun $DE = h$, $EC = f$, so ist $tg\psi = \frac{h}{f}$, und wenn x die Gröfse eines Objektes ist, welches in der Sehweite l unter dem Winkel ψ erscheint, so ist $tg\psi = \frac{x}{l}$, also $x = \frac{hl}{f}$. Das Objekt erscheint also durch die Linse $\frac{l}{f}$ ($= m'$)mal vergröfsert.

Den Halbmesser der sphärischen Abweichung erhält man aus (26), wenn man für m seinen Werth

$$\frac{m'b_1}{l}=\frac{m'f}{l}=1 \text{ setzt,}$$

$$\frac{y^3\mu}{4f}\left(\frac{\lambda}{f^2}+\frac{\nu}{b\beta}\right),$$

welche Gröfse der Erfahrung gemäfs 5—6 Sekunden betragen darf. Bezeichnet man denselben durch $\frac{1}{4g^3}$, und setzt ihn gleich $\sin 6''$, so folgt $g=20'',5$. Für $g=20$ wird daher, da $\beta=\infty$ ist,

$$y=\frac{f}{20}\sqrt[3]{\frac{1}{\mu\lambda}}=\frac{l}{20m}\sqrt[3]{\frac{1}{\mu\lambda}},$$

also wenn die Linse gleichseitig ist, und wenn $l=8''$, $n=1,55$, mithin $\mu-0,9381$ und $\lambda=1,63$ genommen wird,

$$y=\frac{0,3472}{m},$$

oder wenn die Krümmungen so sind, dafs die Abweichung ein Kleinstes wird, in welchem Fall $\lambda=1$ ist,

$$y=\frac{0,4086}{m}.$$

Ist der Durchmesser des ins Auge tretenden Strahlencylinders dem Durchmesser der Linse gleich, so ist die Helligkeit $(20y)^2$, also $\left(\frac{7}{m}\right)^2$ oder $\left(\frac{8}{m}\right)^2$, je nachdem die Linse gleichseitig oder von kleinster Abweichung ist. Wegen der Kleinheit dieser Gröfse ist die Vergröfserung sehr beschränkt, und schon bei 50maliger Vergröfserung wird der Mangel an Helligkeit fühlbar.

2) Aus zwei Linsen bestehende Mikroskope.

Wenn die Linsen sich berühren, und ihre Dicke vernachlässigt wird, hat man für diesen Fall $\beta_1=-b_2$, $b_2=f_2$, $\beta_2=\infty$, also wird die Vergröfserung

$$m'=\frac{l\beta_1}{b_1f_2}=-\frac{l}{b_1},$$

wo b_1 die Objektsweite ist. Der Halbmesser der Kugelabweichung wird nach (26)

$$R = \frac{m b_1 y_1^3}{4l}\left(\frac{\mu_1 \lambda_1}{f_1^3} - \frac{\mu_1 \nu_1}{b_1 f_1 f_2} + \frac{\mu_2 \lambda_2}{f_1^3}\right),$$

oder, wenn die Linsen aus demselben Glase bestehen, also $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ wird, und die Abweichung ein Kleinstes, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ist, und wenn man überdies

$$\frac{b_1}{f_1} = A, \quad \frac{b_1}{f_2} = -\frac{b_1}{\beta_2} = A_1$$

setzt,

$$R = \frac{\mu y_1^3}{4 b_1^2 l}(A^3 - \nu A A_1 + A_1^3) = \frac{\mu y^3}{4 b_1^2 l} Z.$$

Da $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{\beta_1}$, also $\frac{b_1}{f_1} = 1 + \frac{b_1}{\beta_1}$, d. h. $A = 1 - A_1$ ist, so wird $Z = A^3 + \nu A(1 - A) + (1 - A)^3$. Setzt man das Differenzial von Z nach A gleich Null, um den kleinsten Werth von R zu finden, so erhält man $(1 - 2A)(\nu + 3) = 0$, also $A = \frac{1}{2}$ und $Z = \frac{1}{4}(1 - \nu)$. Wir haben daher $A = A_1 = \frac{1}{2}$, $f_1 = 2b_1 = -\beta_1 = f_2$ und

$$R = \frac{\mu(1-\nu) m y_1^3}{16 b_1^2 l} = \frac{1}{4 g^3},$$

mithin

$$y = \frac{2l}{mg}\sqrt{\frac{1}{2\mu(1-\nu)}}.$$

Für $l = 8$, $g = 20$, $\mu = 0{,}9382$, $\nu = 0{,}2327$ wird sonach $y = \frac{0{,}708}{m}$ der Oeffnungshalbmesser, und die Helligkeit, $y_1 = y_2$ setzend,

$$(20 y_2)^2 = \left(\frac{14{,}16}{m}\right)^2,$$

folglich bei weitem gröfser als bei einer einzigen Linse.

Berühren sich die Linsen nicht, sondern sind sie um hb_1 von einander entfernt, so wird b_2 (oder f_2) nicht mehr gleich $-\beta_1$, sondern gleich $-\beta_1 + hb_1$, und wenn man die obige Abweichungsformel noch gelten lassen will,

$$f_1 = -\beta_1 = 2b_1, \quad b_2 = f_2 = (2+h) b_1;$$

ferner

$$m' = -\frac{2l}{(2+h) b_1},$$

Der Oeffnungshalbmesser des Gesichtsfeldes ist dann

$$z_2 = a_2 f_2 = h b_1 \psi,$$

und die Hälfte des übersehbaren Theils des Objekts, d. h. $b_1 \psi$, ist gleich $\frac{a_2 f_2}{h}$, mithin für das Maximum der Oeffnung, d. h. für $a_2 = \frac{1}{4}$, $\frac{2+h}{4h} b_1 = \frac{2l}{4hm}$. Der Halbmesser der Helligkeit ist endlich $y_2 = \frac{b_2}{\beta_1} y_1 = \frac{2+h}{2} y_1$.

3) Aus drei Linsen bestehende Mikroskope.

Für diesen Fall ist, wenn sich die Linsen berühren, $\beta_1 = -b_2 = -b_3 = f_3$ und $\beta_3 = \infty$, und aus (26) erhält man, wenn die Linsen von demselben Material sind, und die Abweichung ein Kleinstes, also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ist, und wenn man ferner $\frac{b_2}{f_2} = B$, $\frac{b_2}{f_3} = B_1$ setzt, wegen $b_2 = -\beta_1$ und $b_3 = -\beta_2$,

$$R = \frac{\mu_1 m y_1^3}{4 b_1^2 l}\left(\frac{b_1^3}{f_1^3} + \frac{\nu b_1^2}{f_1 \beta_1} + \frac{b_1^3}{f_2^3}(B^3 - \nu B B_1 + B_1^3)\right).$$

Man findet, wie vorher, dafs $B^3 - \nu B B_1 + B_1^2$ ein Kleinstes wird für $B = B_1 = \frac{1}{2}$, also für $f_2 = f_3 = 2 b_2$, und dafs dieser kleinste Werth $\frac{1}{4}(1-\nu)$ ist. Setzt man überdies $\frac{b_1}{f_1} = A$, $\frac{b_1}{\beta_1} = -A_1$, so dafs $A + A_1 = 1$ wird, so wird

$$R = \frac{\mu m y_1^3}{4 b_1^2 l}\left(A^3 - \nu A(1-A) + \tfrac{1}{4}(1-\nu)(1-A)^3\right).$$

Bezeichnet man den eingeklammerten Theil durch Z, so hat man

$$Z = \tfrac{1}{4}(3+\nu)(A^3 + A^2 - A) + \tfrac{1}{4}(1-\nu).$$

Das Differenzial dieses Ausdrucks nach A, nämlich $\frac{1}{4}(3+\nu)(3A^2 + 2A - 1)$, verschwindet für $A = \frac{1}{3}$, welcher Werth Z zu einem Minimum, nämlich gleich $\frac{1}{27}(3-8\nu)$ macht.

Aus $A = \frac{1}{3}$ folgt $f_1 = 3b_1$, $\beta_1 = -\frac{3}{2}b_1$, $b_2 = \frac{3}{2}b_1$, $f_2 = 2b_2 = 3b_1$, $\beta_2 = -3b_1$, $f_3 = 3b_1$, und die Vergröfserung wird

$$m = \frac{l}{b_1} \cdot \frac{\beta_1 \beta_2}{b_2 b_3} = \frac{l}{b_1}$$

und $$R = \frac{\mu m y_1}{4 b_1^2 l} \cdot \frac{3 - 8\nu}{27} = \frac{1}{4 g^3},$$

also für das eben gefundene m

$$y_1 = \frac{3l}{mg} \sqrt[3]{\frac{1}{(3-8\nu)\mu}},$$

und für $l = 8$, $g = 20$, $\mu = 0{,}9382$, $\nu = 0{,}2327$

$$y_1 = \frac{1{,}174}{m}.$$

Die Helligkeit ist demnach

$$(20 y_2)^2 = (20 y_1)^2 = \left(\frac{23{,}5}{m}\right)^2,$$

also um vieles gröfser als für 2 Linsen.

Berühren sich wiederum die Linsen nicht, und sind sie gleichweit, und zwar um hb_1, von einander entfernt, so würde, die Abweichungsformel auch für diesen Fall als streng angenommen, $b_2 = (\frac{3}{2} + h) b_1$, $f_2 = -\beta_2 = (3 + 2h) b_1$,

$$f_3 = b_3 = -\beta_2 + h b_1 = 3(1 + h) b_1,$$

$$m = \frac{l \beta_1 \beta_2}{b_1 b_2 b_3} = \frac{1}{1+h} \cdot \frac{l}{b_1},$$

mithin auch

$$b_1 = \frac{1}{1+h} \cdot \frac{l}{m}.$$

Diese Werthe, in die betreffenden Formeln gesetzt, geben die Oeffnungshalbmesser des Gesichtsfeldes, nämlich

$$a_2 = \frac{h}{3 + 2h} \psi, \quad a_3 = -\frac{2 + h}{1 + h} a_2,$$

also $a_3 > a_2$. Wird die dritte Linse planconvex genommen, so darf a_3 nicht gröfser als $\frac{1}{8}$ genommen werden, für welchen Fall

$$a_2 = \frac{1 + h}{8(2 + h)} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{(1 + h)(3 + 2h)}{8h(2 + h)}$$

wird. Die Hälfte des übersehbaren Theils des Objektes wird demnach

$$b_1^3 \psi = \frac{3 + 2h}{3h(2 + h)} \cdot \frac{l}{m}.$$

Zusammengesetzte Mikroskope.

Das Objektiv sei eine Convexlinse, und das Ocular bestehe aus zwei Linsen, und zwar falle ein wahres Bild zwischen die beiden Ocularlinsen.

Die Gleichungen zur Bestimmung der Brennweiten und Linsendistanzen sind für diesen Fall

$$m = \frac{l}{b_1} \cdot \frac{\beta_1 \beta_2}{b_1 b_3}, \qquad a_2 f_2 = (\beta_1 + b_2)\psi,$$

$$a_3 f_3 = \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{b_2} - b_3\right)\psi + b_3' a_2, \qquad a_2 + a_3 \frac{b_3}{\beta_2} = 0,$$

oder wenn man

$$\frac{\beta_1}{b_2} = -B_1, \quad \frac{\beta_2}{b_3} = B_2, \quad a_3 = -a, \quad a_2 = ka$$

setzt,

$$m = \frac{l}{b_1} B_1 B_2, \qquad \frac{a f_2 k}{b_2} = -(B_1 - 1)\psi,$$

$$a = (B_1 B_2 + 1)\psi - k a, \qquad k B_2 = 1.$$

Aus der dritten dieser Gleichungen erhält man

$$\psi = \frac{(1+k)a}{B_1 B_2 + 1}.$$

Das Gesichtsfeld (ψ) wird also am gröfsten für $k = 1$, wodurch $B_2 = 1$ und $\beta_2 = b_3 = f_3$ wird. Die obigen Gleichungen geben unter dieser Voraussetzung

$$B_1 = \frac{m b_1}{l}, \quad \psi = \frac{2a}{B_1 + 1}, \quad \frac{f_2}{b_2} = -\frac{2(B_1 - 1)}{B_1 + 1}.$$

Für starke Vergröfserungen, also für ein grofses B_1 wird sonach $b_2 = -\frac{1}{2} f_2$ und mithin $\beta_2 = \frac{1}{3} f_2$, so wie $f_3 = \frac{1}{3} f_2$. Die Brennweite des Collektivs mufs daher dreimal so grofs sein als die der letzten Linse. Was die übrigen Bestimmungsstücke betrifft, so wird

$$\beta_1 = -b_2 B_1 = \frac{1}{2} f_2 B_1 = \frac{1}{2} \frac{m b_1}{l} f_2 \text{ und somit } b_1 = f_1 + \frac{2 l f_1}{m f_2}.$$

Die Entfernung des Objektivs vom Collektiv wird

$$\beta_1 + b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m b_1}{l} - 1\right) f_2,$$

die des Collektivs von der letzten Linse

$$\beta_2 + b_3 = 2f_3 = \tfrac{2}{3}f_2,$$

und die Hälfte des Gesichtsfeldes und des übersehbaren Theils des Objektes werden beziehlich

$$\psi = \frac{2al}{mb_1 + l}, \qquad b_1\psi = \frac{2ab_1l}{mb_1 + l},$$

endlich die Entfernung des Auges von der letzten Linse

$$\frac{a_2f_2}{m\psi} \cdot \frac{l}{b_1} \text{ oder } \frac{mb_1 + l}{2mb_1}f_3.$$

Vernachlässigt man ferner in dem Ausdruck für die sphärische Abweichung den von den Ocularen herrührenden Theil, da er wegen des grofsen Divisors β_1 nur unbedeutend ist, so wird

$$y_1 = \frac{f_1}{g}\sqrt[3]{\frac{l}{\mu mb_1}},$$

und die Helligkeit ist

$$(20y_2)^2 = \left(\frac{20ly_1}{mb_1}\right)^2.$$

Wie bedeutend man gewinnt, wenn man statt des einfachen Objektivs ein abweichungsfreies System von Doppellinsen anwendet, ist für sich klar.

Es ist nicht schwer, auf gleiche Weise den Fall zu behandeln, dafs das wahre Bild vor den beiden Ocularlinsen zu liegen kommt, d. h. für die Einrichtung, welche für mikrometrische Messungen die geschickteste ist.

Anhang.

A. Von den krystallographischen Verhältnissen.

Der Aufzählung der in optischer Beziehung wichtigeren Krystalle mag noch Einiges über die krystallographischen Verhältnisse im Allgemeinen vorausgeschickt werden.

Den Mittelpunkt aller Krystallformen bilden die Formen des zwei und zweigliedrigen Krystallsystems. Das Symmetrie-Gesetz, welches in denselben herrscht, ist, dafs jede an einem Krystall dieser Klasse vorkommende Fläche zu einer, im Allgemeinen aus 8 Flächen bestehenden Gruppe gehört, und dafs alle Flächen dieser Gruppe gleiche Winkel mit drei bestimmten auf einander senkrechten, mit den Axen doppelter Brechung zusammenfallenden Richtungen (Krystallaxen) bilden. Denken wir die Axen durch einen im Krystall befindlichen Punkt O gelegt, und von diesem Punkt aus eine Normale auf eine der Krystallflächen gelegt; nennen wir ferner jene Axen die Axe der x, der y, der z, und die Winkel, welche die Normale mit denselben bildet, beziehlich α, β, γ: so ist in jedem der 8 durch die Axen-Ebenen abgetheilten Räume eine durch O gehende Linie denkbar, welche mit den Axen dieselben Winkel α, β, γ bildet, und die Flächen, welche der erwähnten Fläche coordinirt sind, stehen senkrecht auf dieser Linie. Ist keiner der Winkel α, β, γ ein Rechter, und sind die Normalen, von O aus gerechnet, gleich lang, so schliefsen die Flächen ein Octaëder ein, welches man,

da die Durchschnitte mit den drei Axen-Ebenen Rhomben sind, Rhomben-Octaëder nennt. Alle bei einem solchen Krystall vorkommenden Flächen bestehen nun aus solchen 8flächigen Gruppen, die sich nur durch die Werthe von α, β, γ unterscheiden.

Von denjenigen Flächen, deren Normalen in einer Ebene liegen und welche sich daher sämmtlich in parallelen Kanten schneiden, sagt man, sie liegen in einer und derselben Zone.

Die Flächengruppen stehen selber wieder unter sich in Zusammenhang. Werden nämlich von der zu bestimmten Werthen von α, β, γ gehörigen Fläche von den Axen Stücke abgeschnitten, deren Verhältnifs $a:b:c$ ist, so läfst sich das Verhältnifs der durch jede andere Fläche abgeschnittenen Axenstücke durch $a:mb:nc$ ausdrücken, wo m und n einfache ganze oder gebrochene (rationale) Zahlen sind. Ist $m=1$ und n eine ganze Zahl, so nennt man die Flächengruppe $(a:b:nc)$ das $n$fach schärfere Octaëder des Octaëders $a:b:c$, und ist $m=1$ und n eine gebrochene Zahl, so nennt man sie das $\frac{1}{n}$fach stumpfere Octaëder desselben. Ist $\gamma=90°$, sind also die Flächen der Axe der z parallel, so dafs für sie $a:mb:\infty c$ ist, so fallen die Flächen paarweise zusammen, und die auf 4 reducirten Flächen bilden eine rhombische Säule.

Werden zwei der Winkel α, β, γ gleich $90°$, stehen die Flächen also auf einer Axe senkrecht, so fallen je 4 und 4 derselben zusammen, und die Gruppe reducirt sich auf zwei parallele Flächen. Man nennt dieselben »geradangesetzte Endflächen«, wenn sie senkrecht gegen diejenige Axe stehen, welche man sich als vertikal denkt und zu welcher wir die Axe der z ersehen wollen.

Das am häufigsten vorkommende Octaëder, oder nach den Umständen dasjenige, auf welches sich die übrigen Flächen am bequemsten beziehen lassen, wollen wir das Hauptoctaëder nennen, und für dasselbe die Bezeich- [illegible] $a:b:c$ wählen, während die anderen Flächen durch

$a:mb:nc$ bezeichnet seien (unter m und n die ihnen zukommenden Zahlen gedacht).

Das viergliedrige Krystallsystem ist ein specieller Fall des zwei und zweigliedrigen. In demselben wird nämlich für das Hauptoctaëder $b=a$, also das Symbol seiner Fläche $a:a:c$. Der Durchschnitt desselben mit der Axen-Ebene xy wird daher ein Quadrat, weswegen man das Octaëder Quadratoctaëder nennt.

Die Axen der x und y verhalten sich alsdann nicht blofs in Bezug auf diese Octaëderflächen, sondern auch in Bezug auf alle andere vorkommende Flächen genau gleich, so dafs wenn eine Flächengruppe α, β, γ existirt, auch eine zweite β, α, γ vorhanden ist. Statt eines einfachen Octaëders erscheinen daher stets zwei, welche in ihrer Verbindung einen Körper einschliefsen, den man Dioktaëder oder Vier und Vierkantner nennt, und dessen Durchschnitt mit der Ebene xy ein Achteck mit abwechselnd gleichen Winkeln bildet. Seine Bestimmungsformel ist $a:ma:nc$. Nur wenn $m=1$ wird, fallen beide Gruppen in eine zusammen und bilden ein Quadratoctaëder, Octaëder erster Ordnung genannt. Zu jeder rhombischen Säule gehört ebenso eine zweite, mit welcher vereint sie eine 8eckige (vier und vierkantige) Säule $a:ma:\infty c$ bildet. Beide Säulen fallen in eine einzige von quadratischer Grundfläche zusammen, sobald $m=1$ wird. Diese Säule, deren Symbol $a:a:\infty c$ ist, nennt man erste Säule. Wird α oder $\beta=90^0$, ist also das Flächensymbol $a:\infty a:nc$, so reducirt sich das Dioctaëder wiederum auf ein einfaches, Octaëder zweiter Ordnung genannt, und die zugehörige Säule, $a:\infty a:\infty c$, heifst zweite Säule..

Eine specielle Form des viergliedrigen Systems ist wiederum das reguläre System, in welchem das Hauptoctaëder zum Symbol $a:a:a$ hat, und daher ein reguläres Octaëder ist.

Eine Folge dieses Gleichverhaltens gegen alle Axen ist, dafs jede Flächengruppe das Vorhandensein fünf anderer Gruppen erfordert (siehe Bd. I, p. 10), so dafs die

zusan[illegible]hörigen Flächensysteme im Allgemeinen einen 48flächigen Körper einschliefsen, der je nach dem Zusammenfallen je zweier oder mehrerer Flächen 24, 12, 8 oder 6flächig wird.

Mit dem viergliedrigen System sehr nahe verwandt ist das 6gliedrige, dessen Symmetriegesetz schon Bd. I, p. 9 angegeben wurde. Dem Quadratoctaëder, den quadratischen Säulen, dem Dioctaëder, der 4 und 4kantigen Säule jenes Systems entspricht hier beziehlich ein Dihexaëder (ein aus zwei Pyramiden bestehe[illegible] Körper, deren gemeinsame Grun[illegible] l in reguläres [illegible]seck ist), reguläre sechsseitige [illegible], 6 und [illegible]tner, eine 6 und 6kantige S[illegible]

[illegible] man unter die vorbenannten Systeme zählt, [illegible]zelnen Flächengruppen die Hälfte ihrer Flächen. [illegible] nennt solche Krystalle hemiëdrisch, während man [illegible] vollzähligen homoëdrisch nennt. Bei einem hom[illegible]hen Krystall, welcher von den Flächen einer einfachen oder zusammengesetzten Gruppe begrenzt wird, lassen sich die Flächen ihrer gegenseitigen Lage nach in zwei Abtheilungen bringen, von denen die eine diejenigen Flächen enthält, welche nur in Ecken zusammenstofsen, und getrennt werden von denen der zweiten Abtheilung, die unter sich gleichfalls nur in Ecken zusammenstofsen, dagegen mit denen der ersten Abtheilung gemeinsame Kanten haben. Denkt man sich die eine Abtheilung verschwunden, die Flächen der andern ausgedehnt, so dafs sie sich gegenseitig schneiden, so erhält man die hemiëdrische Form des betreffenden Krystalls. So wird aus dem Octaëder durch dieses Verschwinden der Hälfte seiner Flächen ein Tetraëder, aus dem Dihexaëder erster und zweiter Ordnung ein Rhomboëder erster und zweiter Ordnung (vergl. Bd. I, p. 197); aus dem 6 und 6 Kantner ein 3 und 3 Kantner (Fig. 133) etc. Bei dem le[illegible]ren haben die Seitenkanten *de*, *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *id* die[illegible] Lage, wie die Seitenkanten des Rhomboëders (s. Fig. 13[illegible] wo diese Kanten gleich bezeichnet sind), und unterscheide[illegible]

sich von denselben nur dadurch, daſs je zwei anliegende dieser Kanten mit den Spitzen k und l (welche in der Axe der x sich befinden) nicht in einer Ebene liegen, so daſs jede Rhomboëderfläche sich gleichsam in zwei Flächen bricht.

Eine zweite Reihe von Systemen entspringt aus dem 2 und 2gliedrigen System durch Verschwinden gewisser Flächen, nämlich das zwei und eingliedrige, und das ein und eingliedrige System. In dem ersteren findet eine Homoëdrie nur in einer Zone statt, und zwar für diejenigen Flächen, deren Normalen in einer bestimmten der Axen-Ebenen liegen. Diese Ebene heiſse die Ebene der Symmetrie. Alle übrigen Flächen sind hemiëdrisch, in der Art, daſs von den 4flächigen Gruppen nur die beiden parallelen Flächen, und von den 8flächigen (Octaëder-) Gruppen nur zwei mit ihren Kanten zusammenstoſsende und die ihnen parallelen übrig bleiben. Die letzteren Flächen nennt man augitartige Paare. Man vergl. Band I, p. 25.

Die mit der Axe der y parallelen Flächen, welche die Säulen (deren Axe parallel der Axe der x ist) zu begrenzen pflegen, heiſsen schiefe Endflächen, und zwar vordere oder hintere, je nachdem die obere nach vorn oder hinten gerichtet ist, wenn man den Krystall so wendet, daſs die Axe der x dem Auge zugekehrt ist.

Im ein und eingliedrigen System entspricht jeder Fläche nur eine einzige, die ihr parallele; die äuſsere Form deutet daher auf keine bestimmte Axenrichtungen hin.

In der Folge wird von den Kunstausdrücken der Ausdruck Abstumpfung gebraucht werden. Abstumpfung einer Kante nennt man nämlich eine Fläche, welche eine Flächenkante gleichsam fortgeschnitten hat, und zwar so, daſs sie dieser Kante parallel ist. Die Abstumpfung heiſst eine gerade, wenn sie gleiche Winkel mit den beiden die fortgeschnittene Kante bildenden Flächen macht, schief dagegen, wenn diese Winkel ungleich sind. Abstumpfung einer Ecke dagegen heiſst eine Fläche, welche eine Ecke gleichsam fortgeschnitten hat.

Die Richtungen, nach denen ein Krystall durch Aufschlagen mit einem Hammer spaltet, heifsen Bruchflächen. Wenn mehrere solche Richtungen vorhanden sind, so nennt man sie, je nach der Leichtigkeit, mit welcher die Spaltung geschieht, den ersten, zweiten, dritten etc. blättrigen Bruch. Sie lassen sich schon durch den Anblick nach dem jedesmal ihnen anhaftenden verschiedenartigen Glanz unterscheiden. Dafs eine Fläche Bruchfläche ist, soll nachgehends durch ein danebenstehendes eingeklammertes (𝔅) angedeutet werden.

B. Verzeichnifs der wichtigeren, natürlichen, durchsichtigen Krystalle.

1) Krystalle des regulären Systems.

Homoëdrische Krystalle: Flufsspath, Steinsalz, Granat, Alaun, Leucit, Analcim, Hauyn etc.

Hemiëdrische Krystalle: Diamant, Boracit, Zinkblende etc.

2) Krystalle des viergliedrigen Systems.

Bei diesen Krystallen sind die Flächen hinzugefügt, welche am häufigsten und in gröfserer Ausdehnung vorkommen. Die in einer Parenthese eingeschlossenen Winkel bezeichnen die Neigung der Octaëderflächen gegen die optische Axe.

Zu den positiven Krystallen gehören:

1) Der Zirkon. Erste Säule (𝔅) mit octaëdrischer Endigung (47° 53').

2) Der Hyacinth, Varietät des vorigen, unterscheidet sich von demselben nur darin, dafs die herrschende Säule die zweite Säule ist.

3) Der Zinnstein. Erste und zweite Säule (𝔅), zwei Octaëder, (46° 22') und (56° 1'), ein Vier und Vierkantner ($a : \frac{3}{2}a : 3c$). Er kommt fast nur in Zwillingen vor, in der Art, dafs die Individuen die Octaëderfläche ($a : \infty a : c$)

gemein haben, und ihre Axen einen Winkel von 112° 1' bilden.

4) Der Apophyllit (Ichthyophthalm, Albin). Bald das Octaëder (29° 30'), bald die zweite Säule mit octaëdrischer Endigung, bald tafelförmig durch das Vorherrschen der senkrecht gegen die optische Axe gerichteten Endflächen (𝔅).

5) Der Schwerstein. Bald das Octaëder (33° 15') (𝔅), bald die Endflächen, welche dem Krystall Tafelform geben.

Zu den negativen Krystallen gehören:

1) Der Anatas. Das Octaëder (21° 48') (𝔅), zuweilen die Endfläche.

2) Der Vesuvian (Idocras). Die erste und zweite Säule (𝔅) und das Octaëder (52° 55').

3) Der Scapolith, von derselben Form (58° 6').

4) Der Mellit (Honigstein). Das Octaëder (43° 27').

5) Der Uranit. Tafelartig durch Vorherrschen der Endfläche (𝔅).

3) Krystalle des sechsgliedrigen Systems.

Die in Parenthese eingeschlossenen Winkel bedeuten die Neigungen der Dihexaëder- oder Rhomboëderfläche gegen die optische Axe.

Zu den positiven Krystallen gehören:

1) Der Bergkrystall. Die herrschende Form ist die erste sechsseitige Säule mit dihexaëdrischer Endigung. Die Dihexaëderflächen sind alternirend matt und glänzend — eine Andeutung einer Hemiëdrie —. Wichtig sind die Flächen eines Drei- und Dreikantners (Figg. 134 u. 135, *d*, *e*), welche die abwechselnden Ecken des Dihexaëders abstumpfen, und welche man ihrer Form wegen Trapezflächen nennt.

Bei einigen Individuen liegen diese Flächen, wie in Fig. 134, mit *a*, *b* und *c* in einer Zone, so dafs die Abstumpfung gleichsam von links oben nach rechts unten ge-

schehen ist; bei anderen liegen sie, wie in Fig. 135, mit den Flächen *g*, *b* und *h* in einer Zone, so dafs sie sich gleichsam von oben rechts nach unten links wenden. Jene Individuen heifsen linksdrehende und wenden die Polarisations-Ebene nach rechts (siehe Bd. I, p. 198), diese heifsen rechtsdrehend und wenden die Polarisations-Ebene nach links.

Nicht zu verwechseln hiermit sind die zuweilen vorkommenden, ihnen ähnlich sehenden, rhombischen Abstumpfungen durch die Flächen eines Dihexaëders 2ter Ordnung.

Oft sind zwei Individuen zu Zwillingen verwachsen, und zwar so, dafs die optischen Axen zusammenfallen, die Flächen aber um 60° gegen einander verdreht sind. Sie gleichen daher einem einfachen Individuum, und die Zwillingsverwachsung erkennt man äufserlich meist nur an den Dihexaëderflächen, von denen die rauhen Flächen des einen Individuums mit den glatten des anderen zusammenfallen, so dafs entweder alle Flächen glatt, oder glatt und von rauhen Stellen durchzogen erscheinen. Sind Trapezflächen vorhanden, so kommen die rechtsgewendeten zugleich mit den linksgewendeten vor.

Die Neigung der Dihexaëderflächen gegen die optische Axe ist 38° 13'.

2) Der Amethyst, wie der vorige eine Varietät des Quarzes, zeigt fast nur Dihexaëderflächen.

Zu den negativen Krystallen von dihexaëdrischer Bildung gehören:

1) Der einaxige Glimmer, durch Vorherrschen der Endfläche (𝔅) tafelförmig.

2) Der Apatit. Die erste (2ter 𝔅) und zweite Säule mit dem Dihexaëder oder der Endfläche (1ter 𝔅) als Endigung. (49° 41' bis 49° 57'). Trapezflächen wie beim Quarz, nur sind dieselben oben rechts und unten linksgedreht.

3) Der Beryll und Smaragd. Die beiden Säulen mit der Endfläche (𝔅). Untergeordnet ist das Dihexaëder (60°).

4) Der Nephelin. Erste Säule, Endfläche, Dihexaëder. (61° 53').

5) Der Pyromorphit (Phosphorbleispath). Bald herrscht die Endfläche, bald die erste Säule (𝔅), bald das Dihexaëder. (49° 7′ bis 49° 42′) (𝔅).

Zu den negativen Krystallen von rhomboëdrischer Bildung gehören:

1) Der Kalkspath. Die Formen dieses Krystalls sind aufserordentlich mannigfaltig. Gegen 30 verschiedene Rhomboëder und gegen 50 verschiedene Drei und Drei-Kantner sind schon beobachtet worden. Die Flächen des Hauptrhomboëders (𝔅) (siehe Bd. I, p. 197 u. 261) sind 44° 37′ gegen die optische Axe geneigt. Sehr häufig sind Zwillinge. Bald ist die Grenzfläche beider Individuen die Endfläche, so dafs ihre optischen Axen zusammenfallen, und die Flächen gegen einander um 60° verdreht sind; bald ist die Grenzfläche die Hauptrhomboëderfläche; bald (was das gewöhnlichste ist) gehört die Grenzfläche dem stumpferen Rhomboëder zweiter Ordnung zu, deren Axenverhältnifs $a:a:\frac{1}{2}c$ ist. Der letzten Art sind die (Bd. I, p. 197) erwähnten Zwillinge, in denen das zweite Individuum nur dünne Lamellen bildet, welche der längeren Diagonale der Hauptrhomboëderfläche parallel den Hauptkrystall durchziehen.

2) Der Turmalin. Erste und zweite Säule, geendigt durch das Hauptrhomboëder oder die Endfläche. Die erste Säule ist hemiëdrisch, also dreiseitig, so dafs sie, wenn sie mit der zweiten combinirt ist, deren abwechselnde Kanten abstumpft, und wenn sie durch das Rhomboëder geendigt wird, so sind die Flächen des letzteren am einen Ende auf die Kanten, am anderen auf die Seiten der Säule aufgesetzt. Häufig sind die beiden Seiten der Säule verschieden geendigt. (60° 49′ bis 63° 5′).

3) Der Korund (Saphir, Rubin). Zweite Säule (besonders beim Saphir), Endfläche, Rhomboëder (32° 26′).

4) Der Dioptas. Rhomboëder (𝔅) und zweite Säule. (58° 35′).

5) Talkspath. Nur Rhomboëder (𝔅). (46° 50′).

6) Bitterspath (Braunspath). Das Rhomboëder (𝔅),

und dessen zweifach und vierfach schärferes $(a:a:2c)$ und $(a:a:4c)$. (46° 7′).

7) Zinkspath (Galmei). Das Rhomboëder (𝔅) und dessen vierfach schärferes. (47° 1′).

8) Alaunspath. Rhomboëder mit oder ohne Endfläche (𝔅). (33° 13′).

9) Kupferglimmer. Durch die Endfläche (𝔅) tafelartig. Randflächen sind das Rhomboëder und die zweite Säule. (17° 33′).

Krystalle des zwei und zweigliedrigen Systems.

Die Winkel, welche die Normale einer Fläche mit den Axen der x, y, z bildet, sind bei den nachfolgenden Krystallen beziehlich durch α, β, γ bezeichnet, und der Winkel zwischen den beiden optischen Axen durch $2u$. Die Werthe des letzteren sind, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird, von Brewster bestimmt.

Zu den positiven Krystallen gehören:

1) Der Topas. Die rhombische Säule $a:b:\infty c$ ($\alpha = 27^0\ 50'$, $\beta = 62^0\ 10'$, $\gamma = 90^0$), welche mit den Flächen der Säule $a:\frac{1}{2}b:\infty c$ ($\alpha = 43^0\ 26'$, $\beta = 46^0\ 34$, $\gamma = 90^0$) oft eine 8seitige Säule bildet. Die gewöhnlichste Endigung des brasilianischen Topases ist octaëdrisch, die des sächsischen die gerade Endfläche (𝔅) (ohne die Octaëderflächen auszuschliefsen), die des sibirischen die Fläche $b:c:\infty a$. Die Ebene der optischen Axen steht senkrecht auf der geraden Endfläche. Beim brasilianischen Topas fand Biot den Winkel der optischen Axen zu 49° 1′, Brewster zu 49° 50′. Für den von Rudberg untersuchten weifsen Topas ergiebt sich aus Bd. I, p. 122 für die Strahlen B, C, D, E, F, G, H beziehlich: 55° 51′ 58″; 56° 3′; 56° 37′ 30″; 56° 40′ 30″; 56° 37′ 24″; 55° 34′ 24″; 54° 54′.

2) Der Schwerspath kommt bald als eine durch die Endfläche (1ter 𝔅) gebildete Tafel, bald als Säule vor. Die Tafel ist entweder geschoben vierseitig, mit der rhom-

ıen Säulenfläche $a:b:\infty c$ ($\alpha = 39^\circ\ 9'$, $\beta = 50^\circ\ 51'$) · 𝔅) als Randfläche (Fig. 136), oder rechtwinklig, so das eine Ränderpaar von den Flächen $b:c:\infty a$ ($\alpha = 0$, $37^\circ\ 15'$, $\gamma = 52^\circ\ 45'$ (3ter 𝔅), das andere von den hen $2a:c:\infty b$ ($\alpha = 51^\circ\ 8'$, $\beta = 0$, $\gamma = 38^\circ\ 52'$) bezt wird (Fig. 137). Die Axe der Säule ist bald die der x, bald die Axe der y. — $2n = 37^\circ\ 42'$.

3) Der Strontspath (Cölestin) hat ganz die Fordes Schwerspaths. Für die Fläche $a:b:\infty c$ ist $\alpha =$, $\beta = 52\frac{1}{4}^\circ$, $\gamma = 90^\circ$; für $b:c:\infty a$ ist $\alpha = 0$, $\beta = 52^\circ$ $\gamma = 37^\circ\ 50'$; für $2a:c:\infty b$ ist $\alpha = 39\frac{1}{2}^\circ$, $\beta = 0$, $\gamma =$ Bruchflächen wie vorher. — $2n = 50^\circ$.

4) Der Chrysoberyll (Cymophan). Die Säule ∞c ($\alpha = 25\frac{1}{4}^\circ$, $\beta = 64\frac{3}{4}^\circ$) ist gleichsam nur Endigung · Reihe von Säulenflächen, die mit der Axe der x llel sind. — $2n = 27^\circ\ 51'$.

5) Der Stilbit (Strahlzeolith). Eine breite rechtlige Säule, deren breite Seite ($a:\infty b:\infty c$) einem sehr ommenen blättrigen Bruch entspricht, mit einer von Octaëder gebildeten Rhombenzuspitzung. — $2n =$ $12'$.

6) Der Anhydrit. Kurze rechtwinklige Säule, de-Flächen senkrecht auf der Axe der x und der y ste-und welche durch die gerade Endfläche tafelförmig enzt wird. Alle drei Flächen sind Bruchflächen. — $= 28^\circ\ 7'$ (nach Biot $44^\circ\ 41'$).

Zu den negativen Krystallen gehören:

1) Der Arragonit. Die rhombischen Säulenflächen $:\infty c$ ($\alpha = 31^\circ\ 52'$, $\beta = 58^\circ\ 8'$, $\gamma = 90^\circ$) (2ter 𝔅) bilden zwei, auf der Axe der y senkrechten Flächen (1ter 𝔅) 6seitige Säule, deren Endigung die Fläche $b:c:\infty a$ $= 54^\circ\ 14'$) ist. Die Krystalle sind selten einfach. Von vielen Zwillingsformen ist die häufigste diejenige, in :her die Individuen mit der Seitenfläche der Säule an nder gewachsen sind. In Fig. 138 stellen *dehi* und g die Grundschnitte der beiden Individuen vor. Komdie auf der Axe der y senkrechten Flächen (*mo* und

pn) vor, und dehnen sich dieselben aus, so entsteht auch wohl eine 6seitige Säule *mknfed*, in welcher nur die Flächen *md* und *fn* parallel sind, und in welcher $\angle k = \angle d = \angle f = 116^\circ 16'$, $\angle e = 127^\circ 27$, $\angle m = \angle n = 121^\circ 52'$ ist. Oft setzen sich noch mehrere Individuen (*fq*, *qr* der Figur) nach demselben Gesetz an. Sehr häufig werden die zwischenliegenden Individuen wie z. B. *hf* so dünn, dafs die drei Individuen *dh*, *hf*, *fq* einen einfachen Krystall (eine 6seitige Säule) zu bilden scheinen. Dies ist der Fall bei der idiocyclophanen Krystallform Bd. I, p. 387. — Zuweilen sind die Individuen durch einander gewachsen, und zwar so, dafs sie eine einfache Säule zu bilden scheinen. Figur 139 zeigt einen Querschnitt derselben. Die Stücke *rfd* und *gre* gehören zu dem einen, *rdg* und *rfe* zu dem andern Individuum; *h*, *o*, *m*, *n* sind die stumpfen Seitenkanten; *de* ist die eine, der einen Seitenfläche parallele Grenze, so dafs die Winkel bei *d* und *e* 127° 27', und die Winkel bei *h*, *m*, *n*, *o* 116° 16' betragen. Die punktirten Linien stellen die Querschnitte der etwa vorhandenen, auf der Axe *y* senkrechten Flächen vor. — $2n = 18^\circ 18'$. Aus den Rudberg'schen Messungen ergiebt sich für die Strahlen *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* beziehlich: 19° 44' 40"; 19° 33' 14"; 19° 37' 8"; 19° 53'; 20° 0' 50"; 20° 12' 6"; 20° 25' 6".

2) Der Salpeter. Wie beim Arragonit eine 6seitige Säule, gebildet von der rhombischen Säule ($\alpha = 30^\circ 30'$, $\beta = 59^\circ 30'$, $\gamma = 90^\circ$) und der auf der Axe der *y* senkrechten Abstumpfung der scharfen Seitenkanten. Endigung: die Fläche $b : 2c : \infty a$ ($\gamma = 35^\circ 30'$). Auch die Zwillinge stimmen ganz mit den an einander gewachsenen Arragonitzwillingen überein. — $2n = 5^\circ 20'$.

3) Das Weifsbleierz. Die rhombische Säule $a : b : \infty c$ ($\alpha = 31^\circ 23'$, $\beta = 58^\circ 37'$, $\gamma = 90^\circ$) (𝔅) und $b : c : \infty a$ ($\gamma = 54^\circ 6'$) (𝔅); die Endigung bildet auch das Octaëder $a : b : c$, welches zuweilen selbstständig erscheint. Zwillinge so häufig wie beim Arragonit, auch nach demselben Gesetz gebildet. Oft kommen drei durch einander

gewachsene Individuen vor, welche dem Ganzen das Ansehen einer quarzähnlichen 6seitigen Säule geben, deren octaëdrische Endigung überdies der dihexaëdrischen Endigung der Quarzsäule gleicht. — $2n = 5^0\ 15'$.

4) Der **Witherit** (kohlensaurer Baryt). Flächen wie beim vorigen: $a:b:\infty c$ ($\alpha = 30^0\ 45'$, $\beta = 59^0\ 15'$, $\gamma = 90^0$), $b:c:\infty a$ ($\gamma = 34^0$); $a:b:c$ ($\gamma = 55\frac{1}{2}{}^0$); auch die Zwillinge wie beim Weifsbleierz.

5) Der **Strontianit** hat dieselbe Form, wie der Witherit, und selbst die Winkel stimmen sehr nahe überein. Für die Fläche $a:b:\infty c$ (𝔅) ist nämlich $\alpha = 31\frac{3}{8}{}^0$, $\beta = 58\frac{5}{8}{}^0$, $\gamma = 0$, und für die Fläche $b:c:\infty a$ ist $\gamma = 34\frac{5}{8}{}^0$. — $2n = 6^0\ 56'$.

6) Der **Dichroit**. Die 6seitige Säule des Arragonits (die hier aber regulär wird, da für $a:b:\infty c$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$ ist) mit Octaëderendigung ($\gamma = 41^0$): für einen Krystall wurde $2n = 60^0\ 6'$, für einen andern $2n = 62^0\ 50'$ gefunden.

7) Der **zweiaxige Glimmer**. Durch die Endfläche (𝔅) tafelförmig. Der Axenwinkel variirt sehr oft bei demselben Stück. So fand **Brewster** bei verschiedenen Stükken 6^0, 14^0, 25^0, **Biot**: 30^0, 31^0, 32^0, 34^0, 37^0, **Marx** bei russischem Glimmer $40^0\ 41'\ 55''$; beim Lepidolith (einer lithionhaltigen Varietät): 45^0. Dasselbe Glimmerstück ist zuweilen an einer Stelle zweiaxig, an einer anderen eineinaxig, was auf Ineinanderwachsung zu beruhen scheint. — Der krystallographische Unterschied beider Glimmerarten liegt nicht in der Neigung der, eine 6seitige Säule bildenden Randflächen der Tafel, sondern in der physikalischen Verschiedenheit dieser Flächen bei der zweiaxigen Art.

8) Der **Talk** (vielleicht 2 und 1gliedrig), nur dünn tafelartig (𝔅). — $2n = 7^0\ 24'$.

9) Der **Zinkvitriol**. Die rhombische Säule ($\alpha = 44\frac{3}{4}{}^0$, $\beta = 45\frac{1}{4}{}^0$), geendigt durch das Octaëder, welches letztere zuweilen hemiëdrisch ist. — $2n = 44^0\ 28'$.

10) Das **Bittersalz**. Bis auf die Winkel wie der Zinkvitriol. — $2n = 37^0\ 24'$.

Zu den, hinsichtlich der Beschaffenheit der Axen der doppelten Brechung noch ununtersuchten gehört: der Bleivitriol, das Linsenerz, der Prehnit, der Peridot (Chrysolith) ($2n = 57^0\ 56'$), der Mesotyp (Nadelzeolith), der Euchroit, das Zinksilicat etc.

Krystalle des zwei und eingliedrigen Systems.

Was die Bezeichnung der Flächen betrifft, so ist das *a* mit einem (—) Zeichen versehen, wenn die nach oben zu liegende Fläche die hintere Seite der Axe der *x* schneidet.

Zu den positiven Krystallen gehört:

Der Borax. Kurze rhombische Säule ($\alpha = 46\frac{1}{2}^0$, $\beta = 43\frac{1}{2}^0$), schiefe Endfläche ($\alpha = \gamma = 45^0$), Abstumpfung der scharfen Seitenkante durch eine auf der Axe der *y* senkrechte Fläche (1ter 𝔅). Die letztere bildet die Grenze in den Zwillingen. Brewster fand für den natürlichen Borax $2n = 38^0\ 48'$, für den künstlichen $2n = 28^0\ 42'$.

Zu den negativen Krystallen gehören

1) Der Adular. Meistentheils entweder eine 4seitige Säule, gebildet von den Flächen der rhombischen Säule (3,3; 4,4 Fig. 140) (für welche $\alpha = 30\frac{3}{4}^0$, $\beta = 59\frac{1}{4}^0$ ist), oder eine 6seitige, gebildet aus der vorigen durch Hinzutreten einer Abstumpfung ihrer scharfen Seitenkante (2,2). Die häufigsten schiefen Endflächen sind: die vordere (1,1 Fig. 141) $a : c \infty b$, eine hintere (dreifach schärfere) $-a : 3c : \infty b$ (5), und eine zweite hintere (6), welche mit der vorderen gegen die Axe *z* gleich geneigt ist, so daſs sie sich von derselben nur durch den Glanz unterscheidet. Ferner eine Octaëderhälfte $-a : \frac{1}{2}b : c$, Rhomboïdflächen genannt, welche mit (1) und (4) in einer Zone liegen (7); und eine Octaëderhälfte $\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c$, Diagonalflächen genannt, welche der von (1,1) und (2,2) gebildeten Kante parallel sind, und gegen diese beide Flächen gleiche Neigung haben (8). Die Ebene der Symmetrie ist die Ebene *yz*, und die Axe der *x* halbirt den Winkel der optischen Axen. Die Flächen 1, 2, 3, 4 sind Bruchflächen, deren Vollkommenheit in der ebengenannten Folge abnimmt.

In den sogenannten Baveno'er Zwillingen ist die Diagonalfläche (8) Grenzfläche, so dafs die Flächen 1 und 2 nach aufsen gekehrt sind und eine rechtwinklig 4seitige Säule bilden (Fig. 142), deren eines (meist allein ausgebildetes) Ende eine 4flächige Zuspitzung durch die Flächen 3 und 5 erhält. Man kann den Zwilling aus einem Individuum entstanden denken, welche durch die Ebene der *yx* in zwei Hälften getheilt ist, die um 180° in dieser Ebene gegen einander verdreht sind.

Nach demselben Gesetz bilden sich Drillinge und Vierlinge. Fig. 143 zeigt den Querschnitt eines Drillings. *ab* und *ac* sind die Grenzflächen (8); *ae* ist die den Individuen *B* und *C* gemeinschaftliche Fläche (1). Die Seitenflächen der rechtwinklig 4seitigen Säule sind von 3 Seiten der erste blättrige Bruch (1), von der vierten Seite der zweite blättrige Bruch (2). Bei den Vierlingen gehören alle 4 Seiten dem ersten blättrigen Bruch an. — $2n = 63°$.

2) Der Epidot. Rhombische Säule (3ter 𝔅), deren Kantenwinkel $70\frac{1}{2}°$ beträgt, eine auf der Axe der *x* senkrechte Fläche, eine vordere schiefe Endfläche $a:5c:\infty b$ ($\beta = 50\frac{3}{4}°$) und eine hintere $-a:3c:\infty b$ ($\beta = 64°$) (1ter 𝔅), so dafs die Flächen eine unsymmetrische Säule bilden, deren Höhendimension die Axe der *y* ist. Ferner eine Octaëderhälfte $a:\frac{1}{4}b:c$. Die Fläche $a:5c:\infty b$ (2ter 𝔅) bildet die Grenze in den Zwillingen. — $2n = 84°\ 19'$ (nach Marx 87° 19′).

3) Der Glauberit. Rhombische Säule, deren Kantenwinkel 96° 40′ beträgt, und welche durch eine auf die scharfen Seitenkanten aufgesetzte Endfläche (gegen die Säulenflächen 104° 15′ geneigt) (1ter 𝔅) geendigt wird.

Die Gestalt ist entweder kurz säulenförmig, oder tafelartig durch die schiefe Endfläche. Axenwinkel für violettes Licht $2n = 90°$.

4) Das kohlensaure Natron. Rhombische Säule von $79\frac{3}{4}°$ mit schiefen Endflächen. — $2n = 70°\ 1'$.

5) Der Gyps. Die Form ist entweder eine Tafel

oder eine Säule. Der Rand der Tafel Fig. 144 wird gebildet von den Flächen (2,2) einer rhombischen Säule von 111° 14′, und von einer Octaëderhälfte $\frac{1}{5}a:\frac{1}{4}b:c$ (3,3), deren Kantenwinkel 143° 52′ ist; die Tafelfläche (1), der erste blättrige Bruch, ist eine gerade Abstumpfung der scharfen Seitenkante der Säule. Zuweilen auch die gerade Endfläche, aber gewöhnlich gewölbt. Die Säule, Fig. 145, hat zu Seitenflächen die Flächen (1) und (2), und zur Endigung die Fläche (3) und eine hintere Octaëderhälfte $-\frac{1}{3}a:\frac{1}{4}b:c$ (4). Ein zweiter blättriger Bruch steht senkrecht auf (1) und würde die stumpfen Säulenkanten abstumpfen. Eine der gewöhnlichsten Zwillingsformen ist Fig. 146 abgebildet. Nach Marx bei der gewöhnlichen Temperatur, $2n = 60°$, bei 58,8° nach Mitscherlich 0°.

6) Der Eisenvitriol. Rhombische Säule von $82\frac{1}{3}°$ (2ter 𝔅) mit schief angesetzter Endfläche (1ter 𝔅), die auf die scharfen Seitenkanten aufgesetzt ist, und mit der Säulenfläche einen Winkel von 104° 20′ bildet. — $2n$ nahe gleich 90°.

Zu den in optischer Rücksicht weniger untersuchten Krystallen gehören:

Der Tremolith, der Diopsid, der Blätterzeolith etc.

Krystalle des ein und eingliedrigen Systems.

Der positive Cyanit ($2n = 81° 48′$), der Axinit, der Kupfervitriol.

Zu den künstlichen positiven Krystallen, deren Axenwinkel gemessen wurden, gehören:

Benzoësaures Ammoniak ($2n = 45° 8′$, nach Marx 48° 8′), schwefelsaure Ammoniak-Magnesia ($2n = 51° 22′$), Citronensäure ($2n = 70° 29′$), blausaures Kali ($2n = 19° 24′$; nach Marx 19° 34′), schwefelsaures Kali ($2n = 67°$), schwefelsaures Nickel ($2n = 42° 4′$), salpetersaures Silber ($2n = 62° 16′$)

Zu den negativen gehören:

Kohlensaures Ammoniak ($2n = 43^0\ 24'$), Barythydrat ($2n = 13^0\ 18'$), Bernsteinsäure ($2n$ nahe 90^0), essigsaures Blei ($2n = 70^0\ 25'$), Rochellersalz ($2n = 71^0\ 20'$, für Violett 56^0, für Roth 76^0), salzsaures Kupfer ($2n = 84^0\ 30'$), salzschwefelsaures Magnesia-Eisen (?) ($2n = 51^0\ 16'$), Weinsteinsäure ($2n = 79^0$), Zucker ($2n = 50^0$).

Ferner wurde gefunden:

Für chlorsaures Kali $2n = 82^0$, für kohlensaures Kali $2n = 80^0\ 30'$, für schwefelsaures Magnesia-Natron $2n = 46^0\ 49'$, für phosphorsaures Natron $2n = 55^0\ 20'$, für unterschwefelsaures Natron $2n = 89^0\ 20$, für salpetersaures Zink $2n$ nahe 40^0, und schwefelsaures Ammoniak (von Marx) $2n = 49^0\ 42'$.

C. Brechungsverhältnisse.

a) Gase bei 0° C. Temperatur und 0,76^m Luftdruck.

Name des Gases	Brechungsexponent n		Brechungsvermögen n^2-1	Dichte
Atmosphärische Luft	1,000294	1,000	0,000589	1,000
Ammoniakgas	1,000385	1,309	0,000771	0,591
Chlorgas	1,000772	2,623	0,001545	2,47
Cyangas	1,000834	2,832	0,001668	1,818
Cyanwasserstoffgas	1,000451	1,531	0,000903	0,944
Kohlenwasserstoffgas im Min.	1,000443	1,504	0,000886	0,559
Kohlenoxydgas	1,000340	1,157	0,000681	0,972
Kohlensäuregas	1,000449	1,526	0,000899	1,524
Oelbildendes Gas	1,000678	2,302	0,001356	0,980
Phosphorwasserstoffgas im Min.	1,000789	2,682	0,001579	1,256
Phosgengas	1,001159	3,936	0,002318	3,442
Sauerstoffgas	1,000272	0,924	0,000544	1,1026
Salzätherdunst	1,001095	3,72	0,002191	2,234
Salzsäuregas	1,000449	1,527	0,000899	1,254
Schwefelätherdunst	1,00153	5,197	0,003061	2,580
Schwefelwasserstoffgas	1,000644	2,187	0,001288	1,178
Schwefligsaures Gas	1,000665	2,260	0,001331	2,247
Schwefelkohlenstoffdunst	1,00150	5,110	0,00301	2,644
Stickgas	1,000300	1,020	0,000601	0,976
Stickstoffoxydgas	1,000303	1,03	0,000606	1,039
Stickstoffoxydulgas	1,000503	1,710	0,001007	1,527
Wasserstoffgas	1,000138	0,470	0,000277	0,0685

Die Messungen sind von **Dulong** *angestellt, mit Ausnahme der ersten, welche von* **Biot** *herrührt.*

b) feste und tropfbar flüssige Körper.

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper	Brechungsexponent
Aether W.	1,358	Wasserfeuchtigkeit	1,3366
Y.	1,374	ganze Linse	1,3839
» zum dreifachen Vo-		äufsere Lage der Linse	1,3767
lumen ausgedehnt	1,057	mittlere Lage	1,3786
Alaun W.	1,457	Kern	1,3999
N.	1,458	Glasfeuchtigkeit	1,3394
Y.	1,488	Auge eines Lammes:	
Alaunlösung, gesättigt H.	1,356	Hornhaut	1,386
Alaunerde, salpetersaure		äufsere Lage der Linse	1,386
W.	1,410	mittlere Lage	1,428
» in Alkohol W.	1,422	Kern	1,436
Albumen W.	1,360	Glasfeuchtigkeit	1,345
Alkohol W.	1,372	Auge des Kabeljau:	
» sp. Gw. 0,866 N.	1,370	ganze Linse Mr.	1,5492
» gewässert	1,374	äufsere Lage	1,410
» rectificirt H.	1,372	mittlere Lage	1,439
Aloe	1,634	Kern Mr.	1,5929
Ambra W.	1,547	Glasfeuchtigkeit Mr.	1,3531
» (sp. Gew. 1,04) N.	1,556	Auge eines Ochsen:	
Ambraöl W.	1,505	ganze Linse Mr.	1,4747
Amethyst W.	1,562	äufsere Lage »	1,4293
Ammoniak, kaust.	1,349	Kern »	1,5425
» wasserfrei, durch		Glasfeuchtigkeit »	1,3571
Kälte condensirt	1,752	Wasserfeuchtigkeit »	1,3358
» salzsaures	1,625	Axinit	1,735
» mit schwefelsau-		Balsam: Copaiva Mx.	1,507
rer Magnesia	1,483	» »	1,528
Ammoniakgummi	1,592	» » Y.	1,514
» Y.	1,578		1,516
Anatas	2,500	» » in Alk. W.	1,440
Angelicaöl	1,491	Mx.	1,397
Aniesöl	1,601	» Canada Y.	1.532
» Y.	1,536		1,549
Anhydrit, extraord.	1,6219	» » W.	1,528
» ordin.	1,5772	» Gilead Y.	1,529
Apfelsäure	1,395	» peruvianischer	1,597
Apophyllit H.	1,5431	Y.	1,593
Arragonit, ord. M.	1,6931		1,605
» extr. M.	1,5348	» Styrax	1,585
s. Bd. I, p. 123 u. 124.		» Tolu	1,628
Arsenik W.	1,811	Y.	1,610
Asand Mx.	1,590		1,627
Assa foetida Y.	1,575	» » in Alk. W.	1,400
Auge des Menschen:		Baryt: kohlensaurer min.	1,540
Hornhaut	1,386	» salzsaurer	1,646

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper	Brechungsexponent
Baryt: schwefelsaurer M.	1,6468	Cajeputöl Y.	1,478
» » extraord. M.	1,6352		1,483
» » ordin.	1,6201	Calcedon	1,553
» in der Richtung der		Calomel	1,970
Axe für die gelb-		Cassiaöl	1,641
grünen Str. H.	1,6460	H.	1,64
	1,6491	Mx.	1,603
» für die rothen Str.		Cautschouc W.	1,524
H.	1,6459		1,534
Benzoe W.	1,586	Y.	1,557
bis	1,596	Chamillenöl	1,457
Bergamotöl Y.	1,473	Y.	1,476
	1,471	Mx.	1,455
Bergkrystall N.	1,563	Chrysoberyll	1,760
C.	1,568	Chrysolith	1,660
	1,575	Citronenöl	1,527
s. Bd. I, p. 122 u. 124.		Citronensäure	1,527
Bernstein	1,47	Cölner Wasser Mx.	1,382
	1,552	Colophonium W.	1,543
Beryll	1,598	Comptonit	1,553
Bibergeil	1,626	Copal	1,549
» Y.	1,620	W.	1,535
Bittermandelöl	1,603	Y.	1,553
Blei, borsaures H.	1,866	Cryolit	1,344
» chromsaures	2,926	max.	1,685
» » max.	2,974	min.	1,668
	2,479	Cuminöl	1,512
» » min.	2,500	Cyan	1,316
	2,508	Diamant N.	2,439
» essigsaures W.	1,400	» R.	2,487
» kieselsaures H.	2,123	» braun	2,470
» kohlensaures im		Dichroit	1,544
max.	2,084	Dillsamenöl	1,477
» » min.	1,813		1,487
» salpetersaures	1,758	Drachenblut	1,562
» schwefelsaures	1,925	Eis W.	1,310
Bleisalpeter H.	2,322		1,307
Blut vom Menschen Y.	1,354		1,3085
Boracit	1,701	Eisenoxyd Y.	2,100
Borax N.	1,467	Eisen, salpetersaures W.	1,375
	1,475	» salzsaures W.	1,385
» geschmolzen	1,532	» schwefelsaures max.	1,494
Boraxglas (1 Th. Borax		» N.	1,515
2 Th. Kiesel)	1,522	Eiweifs v. Hühnerei	1,361
Brunnenwasser E.	1,3366	» » Y.	1,359
Buchelöl	1,500	Eigelb (frisches)	1,428
Butter, kalte W.	1,480	» (trocknes) Y.	1,500
Buxöl Y.	1,356	Eiter	1,395

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper
Elemiharz	1,547	Glas (Flint-)
W.	1,535	1 Th. Blei 4 Th. Kiesel
Y.	1,550	1 2
Epidot, Max.	1,703	1 1
» Min.	1,661	3 4
Essigsäure	1,396	2 1
Essig, gemeiner	1,347	3 1
» destillirter E.	[illegible]	1 4
Euklas, extr.	[illegible]	Glas (Crown-) englisch.
» ord.	[illegible]	W.
Feldspath	[illegible]	» » französisch. W.
Fenchelöl	[illegible]	s. Bd. I, p. 116, 118,
Fenugreköl	[illegible]	121, 128.
Fischbein	[illegible]	Gold in Königswasser
Flohkrautöl	[illegible]	gelöset W.
Flüssigkeit in Krystalle[n]		» in Alkohol W.
ausdehnbarere	[illegible]	Granat
minder ausdehnb[are]	[illegible]	Guajac Y.
1. Flüssigkeit im [Topas]	[illegible]	
2. » » »	[illegible]	Y.
Flüssigkeit im Amethyst	[illegible]	W.
Flufsspath	1,436	Gummi-Ammoniak
W.	1,433	Y.
Frauenmünzöl	1,481	Gummi, arabischer N.
	1,496	
Gewürznelkenöl	1,596	Y.
Glas, gemeines	1,530	W.
» v. St. Gobain W.	1,543	» Traganth
» zu Bouteillen	1,582	W.
» zu Tafeln	1,527	Gummilack
» grünes	1,615	Y.
» hyacinthrothes	1,647	Hausenblase
» blafsrothes	1,570	Holzöl
» dunkelrothes	1,729	Honig Y.
» rothes mit Gold	1,715	Horn
» purpurrothes	1,608	Jalappaharz
» rubinrothes	1,601	Jodlösung im Weingeist
» rosenrothes	1,570	Mx.
» oranges	2,695	Kalilösung
» lichtblaues	1,570	s. Bd. I, p. 116 u. 128.
» zimmtbraunes	1,530	Kali, arseniksaures W.
» opalartiges	1,635	» chromsaures, fest
Glas (Flint-) (borsaur.		max.
Bleioxyd) H.	2,0652	» » min.
» » kieselhalt. bor-		» kohlensaures
saures Blei-		» schwefelsaures
oxyd H.	1,8735	» » W.

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper	Brechungsexponent
li, weinsteinsaures mit		Mastix Y.	1,539
Soda	1,515	Marköl, kalt	1,525
. für d. grünen Str. H.	1,4985	» geschmolzen	1,481
. für d. rothen Str.	1,4929	Meionit	1,606
lkspath, ord. M.	1,6543	Mellit	1,556
» extr. M.	1,4833	»	1,538
. Bd. I, p. 123 u. 124.		Mesotyp, max.	1,522
lk, salpetersaurer	1,410	» min.	1,516
	1,427	Mohnöl	1,463
salzsaurer	1,425	Muskatenblüthenöl Y.	1,512
	1,440		1,526
schwefelsaurer W.	1,525	Muskatnufsöl W.	1,497
unterschwefelsaurer		Myrrhe	1,524
rothe Strahlen H.	1,561	» Y.	1,517
gelblichgrüne H.	1,566	Nadelstein von Faroë	1,5153
» min. H.	1,583	Naphta Y.	1,475
» max. H.	1,628	Nufsöl H.	1,490
wolframs. max.	2,120		1,507
» min.	1,970	Obsidian	1,488
kwasser	1,334	Octaëdrit	2,500
ellstein	1,750	Olibanum-Gummi	1,544
mpfer W.	1,487	Olivenöl W.	1,469
Y.	1,496		1,470
C.	1,500	Opium Y.	1,559
pec. Gew. 0,996) N.	1,500	Orangeschalensaft	1,403
salzlösung, gesät-		Palmöl Y.	1,475
gte C.	1,375	Pech, gemeines	1,530
mmelöl	1,508	» Burgunder	1,546
fer, schwefels. max.	1,552		1,560
» » min.	1,531	Perlen	1,653
rador, Hornblende H.	1,80	Pfeffermünzöl Y.	1,473
ndelöl	1,475	Phosphor	2,224
W.	1,467	» Y.	2,125
öl W.	1,485	»	2,260
spec. Gew.=0,932) N.	1,482	» in Schwefelkoh-	
» » » Y.	1,487	lenstoff gelöset	
cit	1,527	Mx.	1,708
oniöl W.	1,476	Phosphorglas	1,532
» in Alkohol W.	1,430	Phosphorige Säure Y.	1,437
nesia, salzsaure W.	1,416	Phosphorsäure, flüssige	1,426
schwefelsaure	1,488	Mx.	1,460
	1,465	» geschmolzene	1,532
ranöl	1,491	» feste	1,544
delöl W.	1,469	Phosphorwasserstoff	
delstein	1,515	flüssiger Y.	1,423
na Y.	1,533	fester W.	1.441
ix	1,560		2,442
W.	1,535	Pimentöl	1,503

Name der Körper	Brechungsexponent	Name der Körper	Brechungsexponent
Platin in Königswasser		Schwefel, gegossen	2,148
gelöset W.	1,370	» geschmolzen	2,1
Portwein	1,351	» in Schwefel-	
Pyrop	1,792	wasserstoff ge-	
Quarz, extr. M.	1,5582	löset Mx.	1,693
» ord. M.	1,5484	» Y.	2,008
s. Bd. I, p. 122 u. 124.		Schwefelbalsam	1,497
Quecksilber (wahrschein-		Mx.	1,532
lich) H.	[illegible]	Schwefelchlorid H.	1,67
Quecksilberchlorid	[illegible]	Schwefelkali W.	1,375
Rautenöl	[illegible]	Schwefelkohlenstoff H.	1,68
		» bei − 0°,56 Brl.	1,643
Realgar, künstlicher	[illegible]	» » 13°,89 Brl.	1,634
Ricinusöl	[illegible]	» » 28°,89 Brl.	1,625
Rochellersalz		Schwefelkalk	1,375
» (mittleres Grün) H.	[illegible]	Schwefelsäure, spec. Ge-	
» (mittleres Roth) H.	[illegible]	wicht 1,840 Mx.	1,440
Rodiumholzöl	[illegible]	» » W.	1,435
Rosenholzöl	[illegible]	» » N.	1,428
Rum Y.	[illegible]	Schwefelwasserstoff,	
Rosmarinöl	[illegible]	tropfbarer F.	1,767
Y.	1,472	Sebenbaumöl	1,482
Rubellit H.	1,768	Seife von Windsor Y.	1,487
	1,779	» neapolitanische Y.	1,479
Rubin	1,779	Seifengeist E.	1,4088
Rüböl Y. u. B.	1,475	Selenit W.	1,525
Salmiakauflösung, con-		» max.	1,536
centrirte Mx.	1,393	» (spec. Gew. 2,252) N.	1,488
Salpeter, max.	1,514	Selterwasser E.	1,3353
» min.	1,535	Soda, salpetersaure Mx.	1,481
Salpetersäure, spec. Ge-		» unterschwefelsaure	
wicht 1,48	1,410	max. H.	1,785
Mx.	1,391	» » min. H.	1,735
Salpetrige Säure	1,396	» geschmolzen Y.	1,411
Salzsäure, concentr.	1,401	Silber, salpeters. max.	1,788
» »	1,4098	» » min.	1,729
» sp. Gew. 1,134 H.	1,392	Smaragd	1,585
Sandarak	1,538	Spargelstein Y.	1,657
Saphir, weiſs W.	1,768	Spermacet Y.	1,478
» blau	1,794	Spermacetöl Y.	1,473
Sassafraſsöl	1,532	Speichel Y.	1,339
» W.	1,536	Spieſsglanz, salzs. W.	1,420
» Y	1,522	» in Alkohol W.	1,410
» E.	1,544	Spieſsglanzglas N.	1,889
» in Alkohol W.	1,405	Spinell W.	1,812
Schellak	1,525	» H.	1,756
Schildplatt	1,598	»	1,761
Schwefel, natürlicher W.	2,040	Stärkemehl Y.	1,504

Name der Körper	Brechungsexponent
Steinöl Y.	1,544
Steinsalz, grüne Strahlen H.	1,4985
» rothe Strahlen H.	1,4929
Stilbit	1,508
Storax	1,584
Strontian, kohlensaurer max.	1,700
» » min.	1,543
» unterschwefelsaur. max. H.	1,651
» » min. H.	1,608
» »	1,644
Styraxbalsam	1,584
Tabaköl	1,547
Tabasheer, gelblich	1,1111
» von Nagpore	1,1454
» » »	1,1503
» weiſs »	1,1825
Talg, kalt W.	1,491
» geschmolzen W.	1,460
Terpenthin	1,545
Terpenthinöl, gemein. W.	1,476
» » H.	1,486
» destillirt	1,470
s. Bd. I, p. 116. u. 121.	
Theriak	1,500
Thymianöl	1,477
» Y.	1,486
Topas, farbelos	1,6102
» von Brasilien ext.	1,6401
» » » ord.	1,6325
» blauer	1,636
» rother	1,652
» gelber Y.	1,638
Thran	1,483
Tragantgummi	1,520
Tungstein, max.	2,129
min.	1,970
Turmalin	1,668
Vogelleim	1,506
Vogelleim Y.	1,553
Wachholderöl	1,473
» Y.	1,482 1,491
Wachs bei 17°,5 M.	1,512
» geschmolzen M.	1,540
» siedend M.	1,442
» weiſses	1,462
» gelbes	1,542
Wachsöl C.	1,452
Wasser W.	1,336
s. Bd. I, p. 116 u. 121.	
» gesalzen	1,343
Weihrauch	1,554
» Y.	1,546
Wein, Porter Y.	1,351
Weinöl Y.	1,379
Weinsteinsäure max.	1,518
» min.	1,575
Wismuth, salpetersaurer max. H.	1,89
» » min. H.	1,67
» » Mx.	1,446
Wurmholzöl	1,453
Ysopöl	1,485
Zimmetöl Y.	1,589 1,604 1,632
Zink, salzsaures	1,425
» schwefelsaures (gew. Str.)	1,517
Zinkblende	2,260
Zirkon max.	2,015
» min.	1,961
Zucker, geschmolzen	1,545
» nach öfterem Schmelzen	1,555
» (weiſser) W.	1,535
Y.	1,541
Zwergbaumöl	1,483

D. Zerstreuungsverhältnisse.

dn bedeutet den Unterschied der zu den äufsersten Strahlen gehöre[nden] Brechungsverhältnisse, und *n* das Brechungsverhältnifs d[er] mittleren Strahlen.

Substanzen	*dn*	$\frac{dn}{n-1}$
Alkohol	0,011	0,029
Aepfelsäure	0,011	0,0282
Aether	0,012	0,037
Alaun	0,017	0,036
Aloe	0,058	0,085
Ambra	0,041	0,023
Ambraöl	0,012	0,032
Angelicaöl	0,025	0,051
Aniesöl	0,044	0,074
Apophyllit . H.	0,017	0,031
Auge vom Kabeljau: Wasserfeuchtigkeit	0,012	0,035
» » » Glasfeuchtigkeit	0,012	0,035
Axinit	0,022	0,030
Balsam: Canada	0,024	0,045
» Copaiva	0,021	0,041
» Peruvianischer	0,058	0,093
» Styrax	0,039	0,069
» Tolu	0,065	0,103
Baryt, schwefelsaurer	0,019	0,029
» kohlensaurer	0,015	0,0285
Bergamotöl	0,023	0,049
Bernstein	0,023	0,041
Beryll	0,022	0,037
Bergkrystall, ord. . Rud.	0,01727	0,00315
» extr. . Rud.	0,01782	0,00321
Bibergeil	0,018	0,036
Bittermandelöl	0,048	0,079
Blausäure	0,080	0,0227
Blei, chromsaures max.	0,770	0,400
» » min	0,388	0,262
» essigsaures	0,040	0,069
» kohlensaures, max.	0,091	0,091
» » min.	0,056	0,066
» schwefelsaures	0,056	0,066
Borax, geschmolzen	0,014	0,030
Boraxglas	0,014	0,026
Cajeputöl	0,021	0,044
Cassiaöl	0,089	0,139
Cautschouc	0,028	0,052
Chamillenöl	0,021	0,046
Chrysoberyll	0,019	0,025

Substanzen		dn	$\frac{dn}{n-1}$
Chrysolith		0,022	0,033
Citronensäure		0,019	0,035
Copal		0,024	0,043
Cryolith		0,007	0,022
Diamant		0,056	0,038
Dillsamenöl		0,023	0,049
Eisen, schwefelsaures		0,019	0,039
Eiweis vom Ei		0.013	0,037
Elemiharz		0,021	0,039
Epidot		0,024	0,035
Feldkümmelöl		0,024	0,049
Feldspalh		0,022	0,042
Fenchelöl		0,028	0,055
Fenugreköl		0,024	0,050
Flohkrautöl		0,024	0,049
Flufsspath		0,010	0,022
Frauenmünzöl		0,026	0,054
Gewürznelkenöl		0,033	0,062
Glas, gemeines	Bsc.		0,036
» zu Bouteillen		0,023	0,040
» braunes		0,025	0,044
» dunkelrothes		0,044	0,060
» purpurrothes		0.031	0,051
» oranges		0,042	0,053
» grünes		0,037	0,061
» (Flint-) borsaures Bleioxyd	F.		0,0740
» » kieselh. borsaur. Bleioxyd	F.		0,0703
» » »	Bsc.	0,032	0,0527
» » »		0,029	0,052
» » »		0,028	0,048
» » »			0,048
» » verschiedene Sorten	Bsc.		0,0457 0,0525
» (Crown-) grün		0,020	0,036
» » verschiedene Sorten	Bsc.		0,033 0,0346
Granat		0,033	0,027
Guajak		0,041	0,066
Gummi-Ammoniak		0,037	0,063
Gummi, arabisches		0,018	0,036
Harz, gemeines		0,032	0,057
Horn		0,025	0,045
Kalkspath, ord.	Rud.	0,0455	0,03022
» extr.	Rud.	0,0282	0,01389
Kümmelöl		0,033	0,065
Kupfer, schwefelsaures		0,019	0,036
Lavendelöl		0,021	0,045
Leim		0,022	0,041

Substanzen	dn	$\frac{dn}{n-1}$
Leucit	0,018	0,035
Limoniöl	0,023	0,048
Majoranöl	0,022	0,045
Mastix	0,022	0,038
Mohnöl	0,020	0,044
Myrrhengummi	0,020	0,037
Nufsöl	0,022	0,043
Obsidian	0,018	0,037
Olibanumgummi	0,024	0,045
Olivenöl	0,018	0,038
Pappelöl	0,020	0,044
Pech, Burgunder	9,024	0,043
Pfeffermünzöl	0,019	0,040
Phosphor	0,156	0,128
Phosphorglas	0,017	0,03137
Phosphorsäure, feste	0,017	0,032
» flüssige	0,012	0,0283
Pimentöl	0,026	0,052
Pyrop	0,026	0,033
Rapsöl	0,019	0,040
Rautenöl	0,016	0,037
Realgar, geschmolzen	0,394	0,267
» »	0,255	0,374
Rhodiumholzöl	0,022	0,044
Rosmarinöl	0,020	0,042
Rubellit	0,035	0,027
Sadebaumöl	0.021	0,044
Salpeter Min.	0,009	0,03040
Salpetrige Säure	0,018	0,044
Salpetersäure	0,019	0,045
Salzsäure	0,016	0,043
Sandarrak	0,021	0,046
Saphir, blau	0,021	0,026
Sassafrafsöl	0,032	0,060
Schildplatt	0,027	0,045
Schwefel, zerschmolzen	0,149	0,130
Schwefelbalsam	0,023	0,045
Schwefelkohlenstoff bei —0°,56 C. . . Brl.	0,03067	
» » +28°,89 C. . Brl.	0,03084	
Schwefelkupfer . . . H.	0,019	0,036
Schwefelsäure	0,014	0,031
Selenit	0,020	0,037
Smaragd	0,015	0,026
Spinell	0,031	0,040
Steinsalz	0,029	0,053
Spermacetöl	0,021	5,041
Spiefsglanz, salzsaurer	0,026	0,059
Stilbit	0,041	0,023

Substanzen	dn	$\frac{dn}{n-1}$
n, kohlensaurer max.	0,032	0,046
» min.	0,015	0,027
schwefelsaurer	0,015	0,024
l.	0,035	0,064
hin	0,029	0,048
hinöl	0,020	0,042
. . . .	0,032	0,062
bläulich	0,016	0,025
blau	0,025	0,024
in	0,019	0,028
nöl	0,024	0,050
ldergummi	0,025	0,046
lderöl	0,022	0,047
. . . .	0,012	0,035
uch	0.028	0,048
. . . .	0,012	0,032
olzöl	0,022	0,049
einsäure	0,016	0,930
. . . .	0,022	0,044
. . . .	0,045	0,044
. . . .	0,020	0,036

den letzten beiden Tafeln steht B. für Biot, Brl. für Bar- sc. für Boscowich, C. für Cavallo, E. für Euler, F. für ay, H. für Herschel, Hy. für Hauy, M. für Malus, Mr. nro, Mx. für Marx, N. für Newton, R. für Rochon, ir Rudberg, W. für Wollaston, Y. für Young. Die , bei denen keiner dieser Buchstaben steht, rühren von ter her.

Nachträge.

Neuerdings hat Volkmann (Pogg. XLV, p. 207) einen Versuch angestellt, um zu beweisen, dafs der Kreuzungspunkt der Richtungslinien nicht, wie Mile behauptete, in dem Mittelpunkte der Hornhautskrümmung, sondern in dem Mittelpunkte (Drehpunkt) des Auges liege. Es besteht dieser Versuch in einer Wiederholung des zweiten auf p. 218 angegebenen Versuches, bei welcher er das Kaninchenauge durch ein Ochsenauge ersetzte. Der Versuch mit jenem Auge war deshalb nicht beweisend, weil dessen Centrum mit dem Hornhautsmittelpunkt zusammenfällt. Beim Ochsenauge fallen dagegen beide Mittelpunkte aus einander, oder vielmehr, die Hornhaut desselben hat, da sie nicht sphärisch ist, gar kein Centrum. Das Resultat des Versuchs bestätigte Volkmann's Behauptung, und lieferte zugleich den Beweis, dafs die Sehrichtung mit der Richtungslinie zusammenfällt, da das Netzhautbild seine Lage nicht änderte, wenn die Flamme dem Auge in der Richtungslinie genähert wurde. Der auf p. 222 angeführte Mile'sche Versuch bestätigt überdies das Zusammenfallen des Kreuzungspunktes mit dem Drehpunkte des Auges, und den Widerspruch, dafs eine von einer Karte verdeckte Lichtflamme durch eine Wendung des Auges sichtbar werde (p. 222), erklärt Volkmann folgendermafsen:

Ist (Fig. 147) AB das Auge, c dessen Drehpunkt, i die Pupille, mn die Karte, pq die Lichtflamme, so wird der Theil bA der Netzhaut von der Karte beschattet, und der Ort ab des Flammenbildes bleibt dunkel, weil durch

mn die Strahlen von *pq* verhindert werden, durch *i* einzudringen. Wendet man aber das Auge in seiner Höhle so, daſs die Pupille nach *o* rückt, so erhalten die Strahlen von *pq* durch *o* Zutritt zur Netzhaut, und es erscheint ein Bild der Flamme auf der Netzhaut, der Kreuzungspunkt *c* mag beweglich oder unbeweglich sein. In dem letzten Falle ist der Ort des Bildes genau wieder *ab*.

Fechner macht (Pogg. Ann. XLV, p. 227) auf eine Farbenerscheinung aufmerksam, welche man erblickt, wenn man eine in weiſse und schwarze Sektoren getheilte Scheibe in eine rotirende Bewegung versetzt. Statt des Grau erblickt man nämlich Farbenzeichnungen, die mit der Umdrehungsgeschwindigkeit variiren, und welche, wie Fechner vermuthet, von der ungleichen Zeit abhängt, in welcher der Eindruck der verschiedenen im weiſsen Licht enthaltenen Farben anfängt sich geltend zu machen und zu verschwinden. Bei mäſsig hellem Tageslicht unter Anwendung eines schwarzen Halbkreises auf weiſsem Grunde färbte sich bei mäſsiger Drehungsgeschwindigkeit die Scheibe gelb, und bei zunehmender Geschwindigkeit allmälig gelbgrün, grün, schön hellblau, stets aber durchzogen von bunten Adern, welche während der gelben Färbung blau waren. Bei gröſserer Geschwindigkeit zeigte sich ein zelliges Muster, auf welches gröſsere Flecke eingestreut waren. Bei direktem Sonnenlicht strahlten, wenn die Geschwindigkeit mäſsig war, unregelmäſsig zerstreute Stellen vom schönsten Goldglanze. Der Musterüberzug tritt um so früher ein, je zahlreicher die schwarzen Sektoren sind, und von einer gewissen Geschwindigkeit ab erblickt man erst in diesem Falle reines Grau. Die zellige Zeichnung erklärt Fechner aus ungleicher Empfänglichkeit verschiedener Netzhautstellen.

Die Erscheinung erreicht die gröſste Mannigfaltigkeit, wenn man eine Spiralzeichnung (Fig. 123) anwendet. Hierbei tritt der Umstand ein, daſs bei einer Geschwindigkeit,

wo die schwarze Grenze noch einigermafsen erkennbar ist, die Ränder der Spirale sich blaugrün färben, wenn die Drehung in der Richtung des Pfeils geschieht, dagegen rothgelb bei entgegengesetzter Drehung. Das Umgekehrte findet statt, wenn die Spirale das Weifs umgrenzt, während die übrige Scheibe schwarz ist. In beiden Fällen scheint sich bei der Drehung in der ersten Richtung die Spiralfigur auszudehnen, bei der entgegengesetzten Drehung zusammenzuziehen.

Folgenden sehr artigen Versuch zur Darstellung subjektiver Complementarfärbung hatte kürzlich der Hr. Professor Dove die Güte mir zu zeigen.

Es wird in vertikaler Richtung an einem Tisch eine (etwa 1 Fufs lange) Metallnadel befestigt, die sich oben in einen kleinen Knopf endigt und dünn und elastisch genug ist, um in anhaltende Schwingungen versetzt werden zu können. Läfst man nun auf den Knopf von einer Seite gedämpftes Tageslicht, von einer andern Seite Kerzenlicht fallen, so sieht man auf demselben einen blauen und einen rothen Lichtpunkt, welche vermöge der Dauer des Lichteindrucks beim Schwingen der Nadel zwei parallele sich in einander schlingende Lichtcurven bilden, von denen die eine blau, die andere roth ist. Natürlich läfst sich dieser Versuch auch mit jedem anderen Paar verschiedenfarbiger Lichter anstellen.

Eine wesentliche Verbesserung der Einrichtung des Wollaston'schen Goniometers verdanken wir Mitscherlich. Es wird durch dieselbe möglich, noch mit Sicherheit Winkel zu messen, die an Gröfse von den Variationen übertroffen werden, welche man bei einem und demselben Winkel an verschiedenen Individuen desselben Minerals antrifft. Die Veränderung besteht in einer abgeänderten Einrichtung des Krystallhalters und in einer geschickten

Anwendung eines Fernrohrs. Das letztere, dessen Ständer sich in einen Bügel endigt, und welches in einer gegen die Rotationsaxe des Limbus senkrechten Ebene beweglich ist, dient zur Beobachtung des Reflexionsbildes, und ist so eingerichtet, dafs es nach Hinwegnahme des Oculars die Dienste eines Mikroskops verrichtet. Der Halter besteht aus zwei Messingstäbchen, welche der Umdrehungsaxe des Limbus parallel sind, und zwischen sich eine Vorrichtung aufnehmen, in welcher der Krystall befestigt wird. Diese letztere besteht aus einem Kugelsegment, welches sich mittelst Schrauben um sein Centrum drehen läfst, und in diesem Centrum den Krystall zwischen zwei Backen eingeklemmt enthält. Durch Drehung des Kugelsegments wird die Krystallkante in eine, der Umdrehungsaxe des Limbus parallele Lage gebracht. Die Richtigkeit dieser Lage erkennt man daran, dafs bei einer Drehung des Krystalls durch die innere Welle das im Krystall reflektirte Bild einer Vertikallinie seine Lage nicht ändert. Diese Vertikallinie wird von einem perpendikular herabhangenden, unten mit einem Gewicht versehenen Faden gebildet, und ihr Durchschnittspunkt mit einer Querlinie (z. B. mit der horizontalen Kante eines Fensterkreuzes) dient als Objekt bei der Messung.

Ist die Kante in die erwähnte Lage gebracht, so wird dieselbe parallel mit sich verrückt, bis sie in die Umdrehungsaxe selbst fällt. Zu diesem Zweck sind die zwei Stäbchen (*ab* und *cd* Fig. 150), welche zwischen ihren Enden *c* und *d* das oben erwähnte Kugelsegment aufnehmen, auf einem Schieber *ef* befestigt, welcher sich durch eine Schraube *g* verschieben läfst. Die Platte *hk*, in welche der Schieber eingelassen ist, hängt fest zusammen mit einem zweiten Schieber *il*, welcher durch die Schraube *o* in der Unterlage *mn* in einer auf *ef* senkrechten Richtung verschoben werden kann. Die Unterlage *mn* ist an dem Limbus so befestigt, dafs *ab* und *cd* senkrecht gegen denselben gerichtet sind und mithin *hk* und *mn* in einer vertikalen Ebene liegen.

Liegt die Krystallkante in der Umdrehungsaxe, so verändert sie ihre Lage nicht, wenn man mittelst der inneren Welle den Krystall dreht, und diese Unveränderlichkeit erkennt man mittelst des Mikroskops, in welches sich das Fernrohr durch Entfernung des Oculars verwandelt.

Um die Ebene, in welcher sich das Fernrohr bewegt, genau vertikal zu stellen, ist dasselbe in einem Bügel aufgehängt, welcher auf dem Ständer aufgesetzt ist, und durch Schrauben noch kleiner Bewegungen fähig ist. Die vertikale Lage erkennt man an dem genauen Herabgleiten des Fadenkreuz-Mittelpunktes längs der oben erwähnten vertikalen Linie, wenn man das Fernrohr auf den oberen Punkt derselben richtet und alsdann langsam senkt.

Polarisationsmikroskop. Mit diesem Namen belegt man eine Vorrichtung, welche dazu dient, im polarisirten Licht erscheinende zu ausgedehnte Ringsysteme in einen kleineren Raum zusammen zu drängen.

Eine von Dove selbst angewendete, an seinem Polarisationsinstrument angebrachte Einrichtung besteht in einem System von drei planconvexen Linsen, von denen die erste hinter dem 2ten Nicol aufgeschraubt ist und zum Halbmesser der Vorderfläche 3,5‴ hat, die zweite und dritte, in einer gemeinsamen Fassung befindlich, zwischen dem zweiten Nicol und dem Krystall aufgestellt sind. Der Radius der Vorderfläche der zweiten Linse ist 2,7‴, der Radius der Hinterfläche der dritten (von der zweiten 2‴ entfernten) Linse 3,5‴.

Um den Einfallsstrahlen eine bequemere Richtung zu geben, befindet sich überdies hinter der Linse des Ständers s_3 eine andere planconvexe, deren hinterer Krümmungshalbmesser 3,4‴ beträgt.

Ettingshausen wählte statt der 3 Linsen zwei, welche zwischen dem Krystall und dem zweiten Nicol in ei-

r Entfernung von 3″ von einander aufgestellt werden, d von denen die vordere zum Halbmesser der hinteren ümmung 8‴, die hintere zum Halbmesser der vorderen ümmung 16‴ hat.

Eine sehr einfache Einrichtung eines Heliostaten mit em einzigen Spiegel, deren Kenntniſs ich der gütigen ltheilung ihres Erfinders, des Herrn Direktor August, danke, besteht darin, daſs eine Axe, welche mit der eltaxe parallel gestellt worden ist und an welcher ein egel so befestigt ist, daſs er mit ihr in einer Ebene ;t, durch ein Uhrwerk in 48 Stunden um sich selbst umbewegt wird.

Das zum Grunde liegende Princip läſst sich folgender-ſsen beweisen:

Ist AB (Fig. 148) der Weltaxe parallel, C der Mit-unkt des Spiegels, SC ein Sonnenstrahl, also SCB p, der Poldistanz der Sonne gleich; ist ferner CD das ıfallsloth, und CS_1 der reflektirte Strahl, also $SCD =$ $CS_1 = \alpha$ der Einfallswinkel, so ist, wenn CS_1 während Bewegung der Sonne seine Richtung behält, BCS_1 e feste Ebene. Vermöge der Sonnenbewegung wendet ı die Ebene SCB der festen Ebene BCS_1 mit gleich-ßiger Geschwindigkeit zu, während vermöge der Spiegel-hung die Ebene CBD ihre Lage gegen BCS_1 ändert. l nun durch eine gleichmäſsige Drehung des Spiegels der ahl CS_1 seine Lage behalten, so müssen die Winkel BS_1 und DBS_1 proportional sein.

Nun findet man aus dem Dreieck SBS_1, da $\angle BCS_1$ $180° - p$ ist,

$$2\alpha = -\cos^2 p + \sin^2 p \cos SBS_1 = \sin^2 p(\cos SBS_1 + 1) - 1,$$

l aus dem Dreieck S_1DB:

$$\cos\alpha = \sin p \cos S_1BD,$$

)

$$\cos 2\alpha = 2\sin^2 p \cos^2 S_1BD - 1,$$

derselben Krümmung eine weit stärkere Vergröfserung gemithin, wenn man die beiden Werthe von $\cos 2\alpha$ einander gleich setzt,

$$2\cos^2 S_1BD = \cos S_1BS + 1,$$

d. h.

$$S_1BS = 2S_1BD.$$

Es mufs sich folglich die Ebene ***DCB***, d. h. der Spiegel halb so schnell bewegen als die Sonne, also mufs, da die Sonne in 24 Stunden sich um ***AB*** bewegt, der Spiegel in 48 Stunden einen Umlauf um ***AB*** machen.

Zur Einstellung der Axe, um welche sich der Spiegel dreht, dient folgende Einrichtung. Die Uhr ***Aa*** (Fig. 149) ist an einer Axe ***AB*** befestigt, welche bei ***B*** mit dem Stativ ***BC*** durch ein Charnier verbunden ist, so dafs sie in jede beliebige Neigung gebracht werden kann; ferner kann der Spiegelträger, der bei *a* in der Mitte des Uhrkastens eingesetzt ist, herausgenommen und durch ein Stäbchen *ab* ersetzt werden, welches einen getheilten Halbkreis *def* trägt, dessen Mittelpunkt *c* auf *ab* liegt. In *c* und in einem etwas entfernten Punkt *b* des Stäbchens hängen Fäden herab, welche kleine Gewichte, *m* und *n*, tragen.

Bei der Aufstellung wird nun zuerst *ab* in die Ebene des Meridians gebracht, indem man das Stativ so dreht, dafs die beiden Gewichte *m* und *n* auf eine der Mittagslinie parallel gezogene Linie einspielen, und alsdann wird dem Arme ***BA*** eine solche Neigung gegeben, dafs der Winkel *dcm* der Polhöhe gleich wird.

Nachträglich mag noch der Versuche Erwähnung geschehen, welche man gemacht hat, in optischen Instrumenten das Glas durch andere Materialien zu ersetzen.

Am erfolgreichsten war die von **Brewster** zuerst in Vorschlag gebrachte Anwendung der Edelstein-Linsen zu einfachen Mikroskopen, namentlich der Linsen aus Diamant, Saphir, Rubin und Granat, welche durch ihr geringes Zerstreuungsvermögen die chromatische Abweichung bedeutend schwächen, und durch ihr starkes Brechungsvermögen bei

ihren, als Glas. Zur Vergleichung mögen die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse hier folgen.

	Brechungs-Vh.	Zerstreuungs-Vh.
Diamant	2,470	0,38
Saphir	1,780	0,26
Rubin	1,779	0,26
Granat	1,815	0,33.

Den gröfsten Ruf haben die Mikroskope Pritchard's langt, welcher Saphir- und Diamantlinsen von $\frac{1}{100}$ engl. Zoll Brennweite verfertigte, die mit den besten zusammengesetzten Mikroskopen hinsichtlich des Effekts wetteifern konnten. Siehe Pogg. Ann. XV, 517.

Ferner verwendete Cauchoix Bergkrystall zu Fernrohrobjektiven, und zwar statt des Kronglases, und gewann dadurch bei derselben Oeffnung wegen der vollkommneren Durchsichtigkeit eine gröfsere Helligkeit, und in Folge der geringeren Dispersion und gröfseren Brechkraft bei derselben Vergröfserung eine Verringerung der Fernrohrlänge um $\frac{1}{3}$, ja bei terrestrischen Röhren bis um die Hälfte. Siehe Pogg. Ann. XV, 244.

Endlich hat Blair schon vor längerer Zeit, um das secundäre Spektrum fortzuschaffen, zu Fernrohr-Objektiven Combinationen von Glas mit Flüssigkeiten angewendet, welche zwischen sphärisch gekrümmten Gläsern eingeschlossen wurden. Späterhin hat Barlow das Flintglas ganz fortgelassen, und durch eine concave Flüssigkeitslinse ersetzt. Er bediente sich hierzu des Schwefelkohlenstoffs, dessen sehr grofse zerstreuende Kraft es möglich machte, die Correktionslinse (welche von der Flüssigkeit gebildet wurde) von der Kronglaslinse um deren halbe Brennweite entfernt anzubringen — eine Stellung, welche er überdies für die am besten wirkende erklärte. Die Vorzüge solcher Linsen bestehen besonders darin, dafs die Oeffnung des Objektivs beträchtlich erweitert werden kann, und dafs es die Helligkeit, das Gesichtsfeld und die Focalkraft eines Glasfernrohrs von mindestens anderthalbmal so grofser Länge giebt. Das Nähere hierüber sehe man in Pogg. Ann. XIV, 313.



I, Fig: 15 (

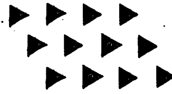


Fig: 18.

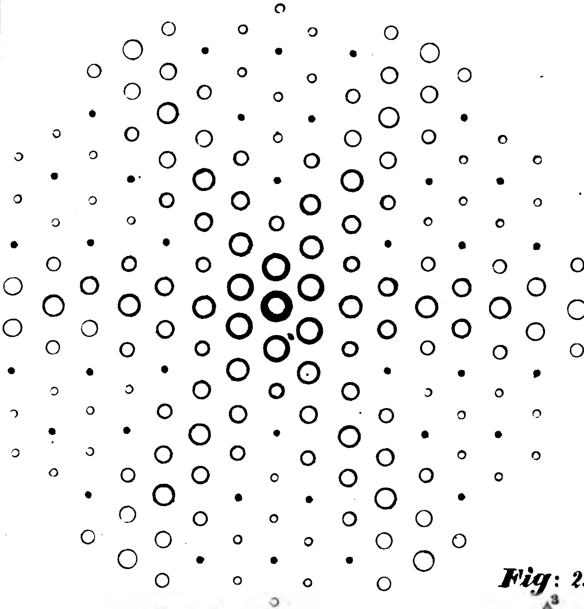


Fig: 21.

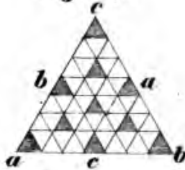
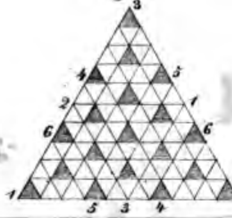


Fig: 25.



Das letzte tritt auch z. B. ein, wenn $\varphi(r) = I$
oder $\varphi(r) = He^{-ar} \cos br$ wäre, a und b als reelle
stanten, und zwar a als positiv gedacht.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhielte ma
nach aus

$$\omega^2 = \tfrac{4}{30}\pi \Delta H$$

einen von der Wellenlänge unabhängigen Werth, so
es die nicht zerstreuenden Mittel erfordern.

Die Kraft, mit welcher die Aethertheilchen auf ei
der wirken, mufs also eine abstofsende sein, und
mufs sie, wenn man die einfachste Bedingung

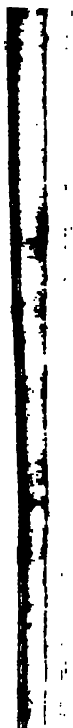
$$F(r) = -\frac{H}{r^4}$$

als die naturgemäfseste voraussetzt, in dem umgeke
Verhältnifs der vierten Potenzen der Entfernung wirk

Vergleicht man zwei Mittel, welche die Farben
zerstreuen, und bezeichnet ihre Dichtigkeiten durch Δ
Δ', die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch ω und
so folgt aus

$$\omega^2 = \tfrac{4}{30}\pi \Delta H, \quad \omega'^2 = \tfrac{4}{30}\pi \Delta' H,$$

dafs sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die
dratwurzeln aus der Dichte des Aethers verhalten. Da
die Geschwindigkeit im leeren Raume die geringste ist
mufs in demselben der Aether am dichtesten sein.
Dichtigkeiten in den Gasarten können jedoch nur um
niges geringer sein, da die Brechungsverhältnisse (die
gekehrten Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit)
wenig von der Einheit unterscheiden.



Sachregister.

Fig: 68.

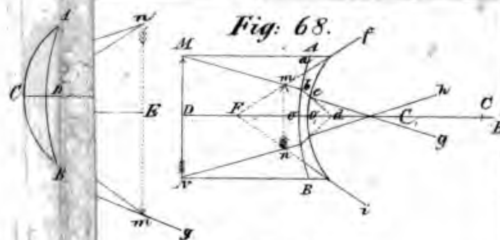


Fig: 82.

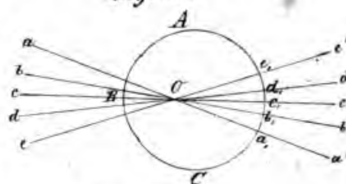
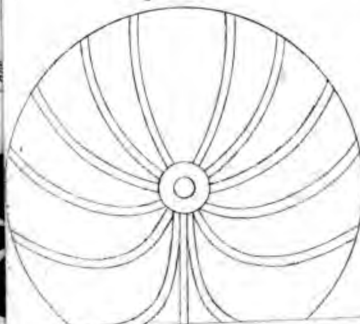


Fig: 91.





Taf. V, Fig. 100 bis 150.

Fig. 104.

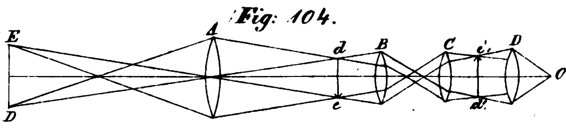


Fig. 110.

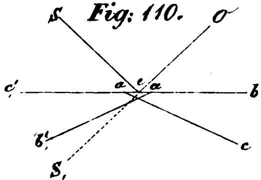


Fig. 111.

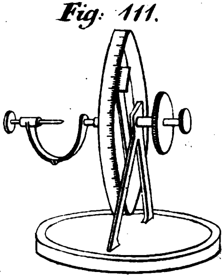


Fig. 118.

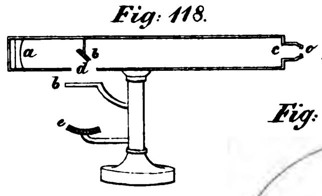


Fig. 123.

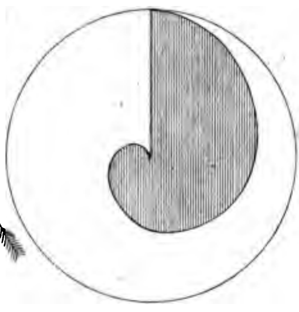


Fig. 130.

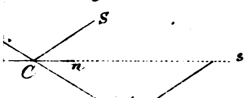


Fig. 139.



Fig. 140.



...z... der in den zweiten Abtheilungen der ersten ...hnitte wiederholt gebrauchten Bezeichnungen.

...ungen, welche in allen drei Abschnitten gebraucht worden sind.

... bezeichnen ... gsgeschwindigkeiten derjenigen ...hlen, welche ... axen parallel sind, und zwar st... den gröfst... ...ten der drei Werthe vor. Für di... ıxigen Krystalle re... ...n ...ich dieselben auf π und μ.

o bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der gewöhnlichen ebenen Wellensysteme in krystallinischen Mitteln,

...ichnet dieselbe für die ungewöhnlichen ebenen Wellensysteme.

...flanzungsgeschwindigkeit des gewöhnlichen Strahls,

...flanzungsgeschwindigkeit des ungewöhnlichen Strahls.

...ichnet den Winkel der wahren optischen Axen,

n den Winkel der scheinbaren optischen Axen,

T die Schwingungsdauer,

l die Wellenlänge.

Bezeichnungen, welche im ersten Abschnitt insbesondere gebraucht worden sind.

m bedeutet die Masse der einzelnen Aethermoleküle.

r den Abstand der Moleküle von demjenigen Molekul μ, von welchem die Erschütterung ausgehend gedacht wird.

α, β, γ die Winkel, welche die von μ nach den Theilchen *m* gehenden Linien mit den Coordinatenaxen bilden.

$F(r)$ die anziehende oder abstofsende Kraft zweier Masseneinheiten in der Entfernung *r*.

$f(r) = rF'(r) - F(r)$.

ξ, η, ζ die Verschiebungen von μ zur Zeit *t* in der Richtung der Coordinatenaxen.

ξ_0, η_0, ζ_0 die Werthe derselben zur Zeit $t = 0$.

ξ_1, η_1, ζ_1 die Anfangsgeschwindigkeiten in der Richtung der Coordinatenaxen.

s die Verschiebung von μ zur Zeit *t* in der Richtung einer der Axen des Polarisations-Ellipsoids.




Fig: VII.
N
S
D
Fig: IV.
Fig: VIII.
Fig: VI.

Seite 136 Zeile 9 v. u. lies Mg statt dg.
» 175 » 7 v. u. l. δ'' statt δ.
» 194 » 1 u. 2 v. u., und Seite 195 Zeile 1 v. o. l. d sta
» 219 » 17, 21, 27 v. o. l. h statt b.
» 266 » 19 v. o. l. i_1 statt i.
» 377 » 7 v. o. l. seinen statt einen.

Zum völligen Verständnifs der Zeichnung der Figur 131 p. 3' ich erst nach dem Druck des Bogens, welcher ihre Beschreibung ausgeführt sah) bemerke man, dafs der hinter der Axe ab bef schraffirte Theil das Uhrwerk, und F und G zwei verschiebbare gewichte vorstellen.

Taf. I. Fi

B

Fig: 7.

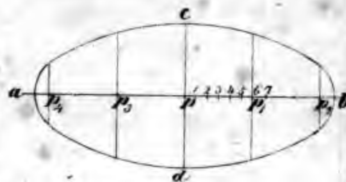


Fig: 13.

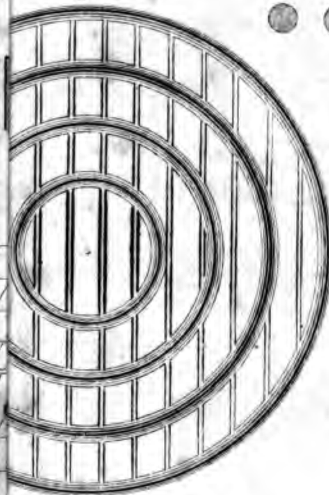


Fig: 9.

A



Fig: 14.













